

Cálculo vectorial

Edgar Ovidio Santisteban León

Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Agraria La Molina

Aldo Alcides Mendoza Uribe

Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Agraria La Molina



UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA LA MOLINA

DR. AMÉRICO GUEVARA PÉREZ
Rector

PH.D. HÉCTOR GONZÁLES MORA
Vicerrector Académico

DRA. PATRICIA GIL KODAKA
Vicerrectora de Investigación

DR. JOSÉ CARLOS VILCAPOMA
Jefe del Fondo Editorial

EDGAR OVIDIO SANTISTEBAN LEÓN - ALDO ALCIDES MENDOZA URIBE
Cálculo vectorial

Lima: 2024; 396 p.

© Edgar Ovidio Santisteban León

© Aldo Alcides Mendoza Uribe

© Universidad Nacional Agraria La Molina
Av. La Molina s/n La Molina, Lima, Perú

Derechos reservados

ISBN: N° 978-612-5086-33-4

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2024-08524

Primera edición digital: agosto de 2024

Disponible en: <https://fondoeditorialunalm.com/ebooks/>

Diseño y diagramación:

Daniella Luna Barrios

Diseño de portada:

Luz Fatima Cristina Cieza Olaya

Queda terminantemente prohibida la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, químico, óptico, incluyendo sistema de fotocopiado, sin autorización escrita de los autores.

Todos los conceptos expresados en la presente obra son responsabilidad de los autores.

Índice general

1	Integrales Dobles	Página 5
1.1	Definiciones preliminares	6
1.2	Integral doble sobre un rectángulo	13
1.2.1	Integrales iteradas o sucesivas	16
1.3	Integral doble sobre regiones más generales.	24
1.3.1	Propiedad de simetría	36
1.4	Cambio de variables en una integral doble	46
1.4.1	Integral doble en coordenadas polares	51
1.4.2	Problemas propuestos	62
1.5	Aplicaciones de la integral doble	68
1.5.1	La integral doble como el área de la región de integración	68
1.5.2	Valor promedio de una función	73
1.5.3	Masa de una lámina plana	75
1.5.4	Área de una porción de superficie	84
1.5.5	Volumen de un sólido	89
1.5.6	Problemas propuestos	95

2	Integrales triples	Página 101
2.1	Integral triple sobre regiones más generales.	107
2.2	Cambio de variables en una integral triple	114
2.2.1	Cambio de variables cilíndricas	114
2.2.2	Cambio de variables esféricas	119
2.3	Aplicaciones de las integrales triples	126
2.3.1	Volumen de un sólido	126
2.3.2	Masa de un sólido	129
2.3.3	Momentos de inercia	132
2.3.4	Problemas propuestos	136

3 **Curvas en el espacio euclidiano \mathbb{R}^m** Página 143

3.1	Funciones vectoriales de variable real	144
3.1.1	Operaciones con funciones vectoriales de una variable Real	148
3.1.2	Límite y continuidad de una función vectorial	151
3.1.3	Continuidad de una función vectorial	159
3.1.4	Derivada de una función vectorial	163
3.1.5	Integración de funciones vectoriales	185
3.1.6	Curvas definidas por tramos	193
3.1.7	Movimiento curvilíneo de una partícula	196
3.1.8	Problemas propuestos	201
3.2	Curvas parametrizadas	207
3.2.1	Problemas propuestos	228

4 **Integral de línea** Página 233

4.1	Integrales de líneas de campos escalares	234
4.1.1	Aplicaciones de la integral de línea de un campo escalar	242
4.1.2	Problemas propuestos	253
4.2	Integral de línea de campos vectoriales	257
4.2.1	Integral de línea en la forma diferencial	261
4.2.2	Trabajo realizado por una fuerza	270
4.3	Teorema fundamental de la integral de línea	273
4.3.1	Campos vectoriales conservativos	275
4.3.2	Problemas propuestos	291
4.4	Teorema de Green	296
4.4.1	Problemas propuestos	304

5 **Integral de Superficie** Página 309

5.1	Superficies parametrizadas	310
5.1.1	Superficie como la gráfica de una función de dos variables	313
5.1.2	Producto vectorial fundamental área	314
5.2	Integral de superficie de campos escalares	324
5.2.1	Masa de una lámina	329
5.2.2	Problemas propuestos	335
5.3	Integral de superficie de campos vectoriales	338
5.3.1	Superficie orientable	338
5.3.2	Integrales de superficie de un campo vectorial	340
5.3.3	Integrales de flujo	348
5.3.4	Problemas propuestos	352

5.4	Teorema de Stokes	355
5.4.1	Problemas propuestos	363
5.5	Teorema de la divergencia de Gauss	367
5.5.1	Problemas propuestos	375

6

Respuestas a los ejercicios con números impares Página 379

Problemas propuestos 1.4.2	↔ página 62	379
Problemas propuestos 1.5.6	↔ página 95	380
Problemas propuestos 2.3.4	↔ página 136	381
Problemas propuestos 3.1.8	↔ página 201	382
Problemas propuestos 3.2.1	↔ página 228	384
Problemas propuestos 4.1.2	↔ página 253	385
Problemas propuestos 4.3.2	↔ página 291	385
Problemas propuestos 4.4.1	↔ página 304	386
Problemas propuestos 5.2.2	↔ página 335	386
Problemas propuestos 5.3.4	↔ página 352	386
Problemas propuestos 5.4.1	↔ página 363	387
Problemas propuestos 5.5.1	↔ página 375	387
Fórmulas de derivación		388
Fórmulas de integración inmediata		389

Bibliografía Página 390

Prólogo

El cálculo vectorial es el lenguaje elemental de la física matemática, pues proporciona una manera de describir cantidades físicas en el espacio tridimensional y la forma en que varían estas cantidades. Muchos temas de la física tales como la dinámica de fluidos, la mecánica de sólidos y electromagnetismo, pueden analizarse y explicarse matemáticamente utilizando las técnicas de cálculo vectorial ya que todos ellos implican magnitudes vectoriales y escalares en tres dimensiones.

Este libro no asume ningún conocimiento previo de vectores, sin embargo, alentamos al lector a que se empape de estos tópicos con los libros que incluimos en la bibliografía, además de temas como el cálculo de límites, la diferenciación, integración, derivación parcial, matrices y determinantes.

El propósito de la presentación de este texto es que sea de ayuda para el resto de su carrera en ingeniería o matemáticas, de modo que sea considerado como un “libro de trabajo” para aprender cómo utilizar el cálculo vectorial en cálculos y derivaciones prácticas. Después de estudiar el texto y resolver los problemas, el lector llegará al punto en el que pueda usar del cálculo vectorial en el mismo nivel en el que lo haría con cálculos algebraicos simples.

Tras la introducción teórica de cada nuevo capítulo o sección, se proveen de ejemplos resueltos cuyo objetivo es fijar los conceptos desarrollados. Es esencial que estos se estudien detenidamente, de modo que se desarrolle una comprensión completa antes de seguir adelante. Como es usual en matemática, cada sección del libro se basa en los cimientos establecidos en las secciones y capítulos anteriores. Además de los ejemplos resueltos, se incluye una sección de ejercicios propuestos al final de cada capítulo o sección, cuyas soluciones se encontrarán al final del libro, sin embargo, animamos al estudiante lector a intentar resolver todos los de los ejercicios antes de buscar las respuestas.

Con bastante frecuencia, muchas ideas en matemáticas se transmiten y se expresan más fácilmente cuando se presentan visualmente, y en especial el cálculo vectorial no escapa a este patrón, motivo por el cual hemos aprovechado el geogebra para capturar el espíritu de las nociones que desarrollamos a lo largo del texto y mostrarlo en forma impresa. En consecuencia, la mayoría de los conceptos se introducen y se explican

con el apoyo de figuras y gráficos con un generoso uso del color que sea agradable a la vista. De hecho, el color se utiliza también para diferenciar una definición de un ejemplo o de un teorema o una proposición, etc. y, en algunas ocasiones, para resaltar piezas específicas de información.

Si bien es cierto que se trata de un texto de cálculo, hemos creído conveniente presentar la demostración de algunos resultados, y omitir algunos de ellos por el manejo que supone tener presente teoremas importantes del análisis matemático de funciones de una variable, pero debemos hacer hincapié que no hemos escatimado recursos ni espacio en el libro para dos aspectos: primero, la formulación matemática apropiada y luego un ejemplo de cómo usarlos.

En el capítulo 1 presentaremos las definiciones y resultados sobre las integrales dobles en coordenadas cartesianas y polares, así como sus diversas aplicaciones.

El capítulo 2 se dedica al estudio de las integrales triples y sus aplicaciones en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

El capítulo 3 se consagra al estudio de las curvas paramétricas en el plano cartesiano y en el espacio.

El capítulo 4 se ocupa de la integral de línea de campos escalares y vectoriales, dedicando una sección completa al teorema de Green.

Finalmente, en el capítulo 5 cierra el libro con la presentación de las integrales de superficie, con el detallado estudio de los teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss.

1

Integrales Dobles

Las integrales dobles son una de las herramientas que surgieron de la ampliación de los conceptos y propiedades de integrales simples, que a su vez emergieron para resolver algunos problemas geométricos conocidos, por ejemplo, los problemas de área y volumen; asimismo tuvieron un gran aporte en la física, permitiendo la solución de cuestiones relacionadas con la masa, el centro de masa, el momento de inercia y muchos otros. El estudio de las integrales dobles de funciones de dos variables se inicia introduciendo los conceptos de partición de un bloque y conjunto de medida nula lo que nos permitirá definir la integral doble como el doble límite de una doble suma de Riemann, tal como se hace con las integrales simples. Para ilustrar sus aplicaciones, la representación de los sólidos en su forma analítica o en su forma gráfica se discute con el auxilio del entorno informático Geogebra. Como la situación lo requiere, no escatimamos en el formalismo matemático, buscando que las definiciones y las propiedades queden bien establecidas, apuntaladas con la presentación y demostración de teoremas. El objetivo general que nos planteamos es ayudar al público académico a tener una fácil comprensión de las integrales dobles, sus definiciones, propiedades y aplicaciones, utilizando un lenguaje ameno para una fácil comprensión a la hora de resolver problemas así como mostrando la mejor manera de hacer una interpretación, ya sea algebraica y/o geométrica y su importancia en la ciencia en base a situaciones problemáticas simples que giran en torno el cálculo del área, volumen, centro de masa, masa y momento de inercia.

1.1 Definiciones preliminares

En el cálculo integral de una variable, se define la integral definida de una función continua $f(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$ como límite de sumas de Riemann y se denota como $\int_a^b f(x) dx$, donde queda claro que los límites de la integración son los extremos del intervalo. En esta sección ampliamos esta idea para definir la integral de una función continua de dos variables $f(x, y)$ considerando el tipo más simple de región plana, un rectángulo R en el plano.

Recordemos que las sumas de Riemann para la integral de una función de una sola variable $f(x)$ son obtenidas dividiendo un intervalo finito en subintervalos de ancho pequeño, multiplicando el ancho de cada subintervalo por el valor de f en un punto c_k dentro de ese subintervalo y luego sumando todos los productos.

En esta sección, mostraremos que se utiliza un método similar de partición, multiplicación y suma para construir integrales dobles, sin embargo, para esto dividimos una región plana rectangular R en rectángulos pequeños, en lugar de subintervalos pequeños. Luego tomamos el producto del área de cada rectángulo pequeño con el valor de f en un punto dentro de ese rectángulo, y finalmente sumar todos estos productos.

Cuando f es continua, estas sumas convergen a un solo número cuando cada uno de los pequeños rectángulos se reducen tanto en ancho como en alto. El límite es el integral doble de f sobre R .

Bloque m -dimensional

Un bloque m -dimensional es un producto cartesiano de la forma

$$B = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_m, b_m] \subset \mathbb{R}^m \quad (1.1)$$

de m intervalos compactos $[a_i, b_i]$, es decir cerrados y acotados, cada uno de los cuales se llama una *arista* del bloque B .

Asimismo, se define el volumen m -dimensional del bloque dado por (1.1) como el número

$$\text{vol}(B) = \prod_{i=1}^m (b_i - a_i).$$

Concretamente cuando $m = 1$, el bloque se reduce a un intervalo y su volumen¹ es igual a $\text{vol}(B) = b_i - a_i$; para $m = 2$ se obtiene un rectángulo con lados paralelos a los

¹Para $m = 1$, se debe entender el volumen como la longitud del intervalo.

ejes coordenados cuya área^2 resulta del producto de la longitud de los intervalos, es decir $\text{vol}(B) = (b_2 - a_2)(b_1 - a_1)$; y cuando $m = 3$, el bloque se visualiza como una paralelepípedo rectangular con caras paralelas a los planos coordenados y su volumen es igual a $\text{vol}(B) = (b_2 - a_2)(b_1 - a_1)(b_3 - a_3)$.

En el caso particular de que todas las aristas tengan la misma longitud $a = b_i - a_i$, al bloque se le llama un cubo m -dimensional y su volumen se reduce a $\text{vol}(B) = a^m$.

El bloque m -dimensional $B = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$ es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^m cuyo interior es

$$\text{int}(B) = \prod_{i=1}^m]a_i, b_i[, \tag{1.2}$$

es decir es el producto cartesiano de los intervalos abiertos $]a_i, b_i[$.

Al bloque definido en (1.2) le llamaremos bloque m -dimensional abierto y, por definición, su volumen es el mismo que del bloque cerrado correspondiente.

Conjunto de medida nula

En este apartado introduciremos el concepto de conjunto de medida nula, herramienta que será de utilidad para demostrar, más adelante, ciertas propiedades de las integrales dobles y triples.

Estableceremos este concepto partiendo de la definición general, es decir conceptualizaremos un conjunto de medida nula en el espacio euclidiano \mathbb{R}^m , para luego ir desmenuzando e ilustrando el concepto con ejemplos en los espacios habituales \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 . Asimismo mencionaremos las propiedades de estos conjuntos que nos permiten modelar y resolver integrales múltiples de manera eficiente.

Definición 1.1 [Conjunto de medida nula]

Diremos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^m$ tiene medida nula o contenido nulo en \mathbb{R}^m si para todo $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de bloques m -dimensionales abiertos $B_1, B_2, \dots, B_i, \dots$ tales que la unión de ellos contiene a A y que la suma de sus volúmenes es menor que ε , es decir

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i \text{ y } \sum_{i=1}^{+\infty} \text{vol}(B_i) < \varepsilon.$$

Con el fin de ilustrar este concepto, retomaremos algunos de los conceptos que se estudiaron al momento de presentar y definir la integral definida.

²Para $m = 2$, volumen del bloque se debe entender como área del rectángulo.

Cuando nos ubicamos en el terreno donde $m = 1$, diremos que el intervalo $A \subset \mathbb{R}$ tiene medida nula si $\forall \varepsilon > 0$ existe un intervalo $]a_i, b_i[$ tal que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty}]a_i, b_i[\text{ y } \sum_{i=1}^{+\infty} (b_i - a_i) < \varepsilon.$$

En el plano cartesiano, un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ se dice que tiene contenido nulo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto de rectángulos de áreas $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ tales que la unión de ellos contiene a A y que la suma de sus áreas es menor que ε , es decir

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \text{ y } \sum_{i=1}^{+\infty} A_i < \varepsilon.$$

En vista de que la definición 1.1 se debe cumplir para todo $\varepsilon > 0$, esto nos brinda la libertad de elegir el número ε tan pequeño como se desee de modo que la suma de las longitudes de los intervalos o la suma de las áreas de los rectángulos sea, a su vez, tan próxima a cero como se desee.

A continuación destacaremos algunas propiedades que envuelven a los conjuntos de medida nula³. La mención que haremos de ellas se efectivizará a nivel informativo e ilustrativo, prescindiendo de la demostración, ya que serán de importancia en los temas que se tratarán en este libro.

Proposición 1.1

[CMN1] Todo subconjunto de un conjunto de medida nula tiene también medida nula.

[CMN2] Toda reunión enumerable de conjuntos de medida nula es también un conjunto de medida nula.

[CMN3] Todo conjunto finito de puntos del plano tiene medida nula.

[CMN4] Todo segmento de recta tiene contenido nulo.

[CMN5] Toda curva del plano que puede ser representada por alguna de las ecuaciones

$$y = f(x), a \leq x \leq b \text{ o } x = g(y), c \leq y \leq d,$$

donde f y g son funciones continuas, tiene contenido nulo.

³Para ampliar el estudio de los conjuntos de medida nula, consultar Lima, Elon. Análise 2 pg 355 y siguientes

Partición de un bloque

Una partición de un bloque $B = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$ es un conjunto finito definido como el producto cartesiano $P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_m$, donde cada P_i es una partición del intervalo $[a_i, b_i]$.

Una partición del tipo definido líneas arriba determina una descomposición de B en sub bloques de la forma $A = I_1 \times \dots \times I_m$, donde cada I_j es un intervalo de la partición P_j . Si para cada $j = 1, 2, \dots, m$, la partición P_j descompone al intervalo $[a_i, b_i]$ en k_j subintervalos, entonces la partición P descompone al bloque B en $k_1 k_2 \dots k_m$ sub bloques.

Por otro lado, tenga en cuenta que si A_1 y A_2 son bloques de la misma partición, entonces o bien la intersección $A_1 \cap A_2$ es vacía o bien ella es una cara común k -dimensional a A_1 y A_2 , con $k = 0, 1, \dots, m - 1$.

En el mismo orden de las ideas, la longitud de cada arista $[a_i, b_i]$ del bloque se determina con la suma de las longitudes de los intervalos que conforman la partición P_i . Por consiguiente, en razón de lo expresado anteriormente, el volumen de B es igual a la suma de los volúmenes de todos los bloques en que la partición P descompone al bloque B .

Con el fin de visualizar lo descrito líneas arriba, la partición de un intervalo $[a, b]$, para $m = 1$, lo descompone en sub intervalos $[a_i, b_i]$ que tienen como punto común sus respectivos extremos y la suma de las longitudes de todos ellos resultará en la longitud del intervalo $[a, b]$, tal como se aprecia en la figura 1.1.

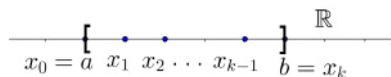


Figura 1.1: Partición de un intervalo

En el caso de un rectángulo en \mathbb{R}^2 , con lados paralelos a los ejes coordenados, el valor de su área resulta de la suma todos los sub rectángulo obtenidos de la partición que a su vez se obtienen de multiplicar las longitudes de dichos sub intervalos. Además, cada dos subrectángulos comparten un lado, lo que es visible en la figura 1.2.

En el espacio tridimensional, la partición de un paralelepípedo rectangular con caras paralelas a los planos coordenados genera sólidos que comparten una cara, es decir la porción de un plano paralelo al uno de los planos coordenados y la suma de los volúmenes de los mencionados sólidos resultará en el volumen del paralelepípedo. La idea geométrica la visualizamos en al figura 1.3

Ya que el objetivo final de la integral es el de conseguir la mejor aproximación del

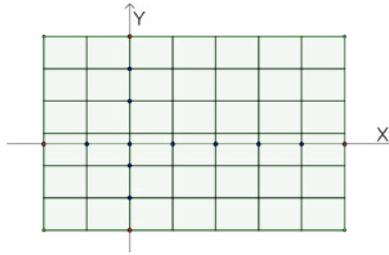


Figura 1.2: Partición de un rectángulo

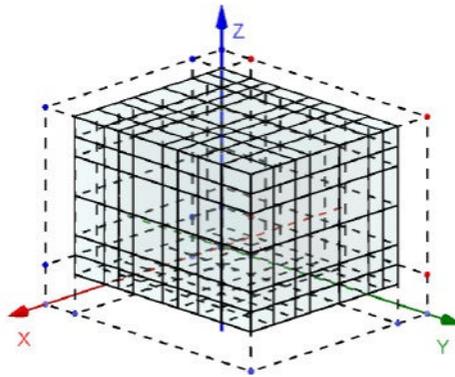


Figura 1.3: Partición de un paralelepípedo

área bajo la curva o del volumen bajo una superficie, se precisa de describir el concepto de partición más fina. Para ello consideremos dos particiones P y Q del bloque B , entonces diremos que Q es más fina que P cuando $P \subset Q$. Esto implica que si

$$P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_m \text{ y } Q = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_m$$

sucedirá que $P \subset Q$ si y solo si $P_1 \subset Q_1, \dots, P_m \subset Q_m$.

Geoméricamente, esto significa que Q tiene más sub bloques que P , por tanto cada bloque de la partición Q está contenido en un único bloque de P y cada bloque de P es la reunión de los bloques de Q contenidos en él. Esta idea es más nítida si pensamos en que Q determina una partición en cada bloque de P que equivale a decir que el volumen de un bloque de P es igual a la suma de los volúmenes de los bloques de Q contenidos en él.

En línea con nuestro objetivo de definir la integral doble, pasaremos a ilustrar los

conceptos descritos para el caso de que un bloque es un rectángulo definido como

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}. \quad (1.3)$$

En este caso, una partición del rectángulo R se define como el producto cartesiano $P = P_1 \times P_2$, donde $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ y $P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_l\}$ es una partición del intervalo $[c, d]$. Luego, la partición P divide al rectángulo cerrado R en kl sub rectángulos a los que denotaremos por R_1, R_2, \dots, R_n , donde $n = kl$ y que satisfacen las siguientes propiedades:

- ❶ $R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n = R$.
- ❷ Dos rectángulos cualesquiera R_i y R_j , con $i \neq j$, no tienen puntos comunes más allá de aquellos ubicados en las dos rectas que forman la frontera, si son sub rectángulos adyacentes.

En la figura 1.4 se muestra una representación gráfica de una partición P .

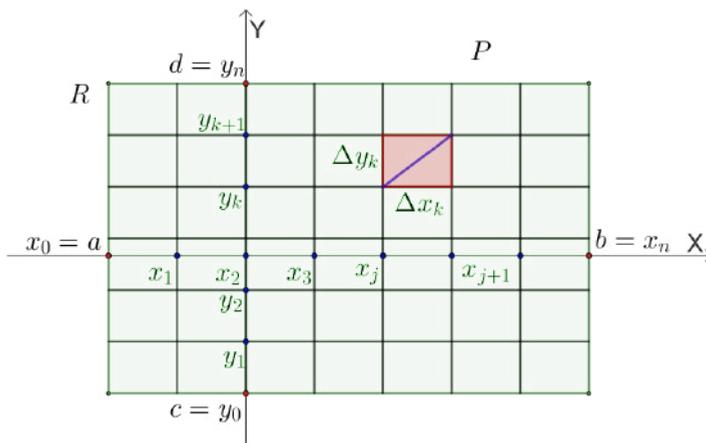


Figura 1.4: Partición de un rectángulo

Es claro que las particiones P_1 y P_2 determinan rectas paralelas a los ejes coordenados que, a su vez, dan origen a los sub rectángulos de R .

Con respecto al concepto de partición más fina, diremos que una partición Q refina a una P , si la primera se obtiene añadiendo nuevas rectas paralelas a las rectas que forman la partición P . Sea, a modo de ejemplo, las particiones que se muestran en la figura 1.5 en la que, además de las rectas que forman P , se han agregado otras rectas paralelas a los ejes coordenados para obtener la partición.

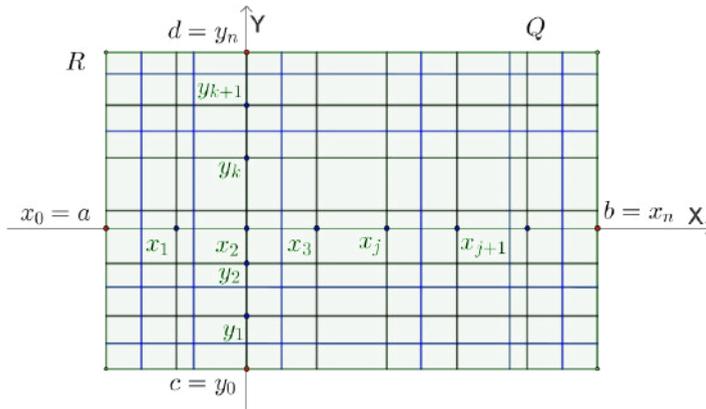


Figura 1.5: Partición más fina de un rectángulo

Norma de una partición

En este punto de nuestro camino, definiremos lo que llamaremos la norma de una partición que, a la postre, nos permitirá plantear la definición de integral doble como una doble suma de Riemann. Tengamos en cuenta que nuestro objetivo es aproximar volúmenes con un grado cada vez mayor de exactitud; por consiguiente se desea que nuestras particiones definan una gran número de sub rectángulos con área pequeña.

Definición 1.2 [Norma de una partición]

La norma de una partición P , denotada por $\|P\|$, se define como el máximo entre el ancho o la altura de cualquiera de los rectángulos que forman dicha partición, es decir

$$\|P\| = \max_{1 \leq k \leq m} \{\Delta x_k; \Delta y_k\}. \quad (1.4)$$

La definición de arriba establece una medida en la partición y con ella será más sencillo entender el hecho que cuando la norma de la partición tienda a cero, el número de rectángulos tienda a infinito.

1.2 Integral doble sobre un rectángulo

En este apartado estudiaremos la definición de integral doble como el límite de sumas, y en segundo término, mostraremos una manera rápida de calcularlas.

Recordemos que en el cálculo de una variable la integral de una función continua no negativa representa el área debajo del gráfico de la función $y = f(x)$, para $x \in [a, b]$. De modo similar, la integral doble de una función continua no negativa $f(x, y)$ definida en una región del plano, rectangular o genérica, está asociada con el volumen de la región del espacio bajo la gráfica de la superficie $f(x, y)$.

Consideremos el rectángulo definido por

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}.$$

y la función

$$\begin{aligned} f: R &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto z = f(x, y) \end{aligned}$$

definida y acotada en R . Asimismo, tengamos en mente dos particiones regulares P_1 y P_2 ambas de orden n de los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$, respectivamente, es decir

$$P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \text{ y } P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_n\},$$

donde

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n} \text{ y } c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d,$$

con $y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n}$.

Al producto cartesiano $P_1 \times P_2$ se le llama una **partición regular** de orden n del rectángulo R que lo descompone en n^2 subrectángulos denotados por R_{jk} .

En cada subrectángulo $[x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$, de área $\Delta x \Delta y = \Delta A$, elegimos un punto arbitrario c_{jk} .

Si $z = f(x, y)$ es una función real limitada en R y $f(c_{jk})$ denota el valor de la función en los puntos elegidos, formamos la suma de los productos $f(c_{jk}) \Delta A$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta A \right) = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta x \Delta y \quad (1.5)$$

donde

$$\Delta x = x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n} \text{ y } \Delta y = y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n}.$$

La suma definida en (1.5) es llamada **suma de Riemann** de f sobre R .

En la siguiente definición formalizaremos el concepto de función integrable que resume al análisis mostrado anteriormente.

Definición 1.3 [Función integrable]

Si la sucesión (S_n) , dada por (1.5), de las sumas de Riemann de la función f tiene límite $s \in \mathbb{R}$ cuando $n \rightarrow +\infty$ y este límite es independiente de la elección de los puntos c_{jk} en los subrectángulos R_{jk} , es decir

$$s = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta A, \quad (1.6)$$

diremos que f es integrable sobre R y escribimos

$$s = \iint_R f(x, y) \, dx dy.$$

- (N)** Para que una función f sea integrable sobre un rectángulo R ella debe ser acotada en todos los puntos de R , pues de lo contrario al seleccionar arbitrariamente un punto c_{jk} , la suma integral puede hacerse indefinidamente grande y, en consecuencia, no existe el límite dado en (1.6).

Teorema 1.1

Toda función continua definida en un rectángulo R es integrable sobre R .

El teorema anterior nos faculta para afirmar que son integrables, en un rectángulo R , todas las funciones polinómicas, trigonométricas, exponenciales, etc.

Adicionalmente debemos destacar que tanto la definición 1.3 y el teorema 1.1 son aplicables a cualquier función de dos variables, sin importar su signo. Sin embargo, cuando $f(x, y) \geq 0$ en R , la integral doble $\iint_R f(x, y) \, dA$ representa el volumen V del sólido que se encuentra arriba del rectángulo R y debajo de la superficie $z = f(x, y)$, tal como se explica a continuación.

Interpretación geométrica de la integral doble

Sea $z = f(x, y)$ una función real de dos variables definida y continua en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, tal que $f(x, y) \geq 0$ en R , es decir, el gráfico de f es una superficie ubicada por encima del rectángulo R . Con estas referencias consideramos la región E del espacio limitada por el gráfico de f , el rectángulo R y los planos $x = a$, $x = b$, $y = c$ y $y = d$ tal como se muestra en la figura 1.6

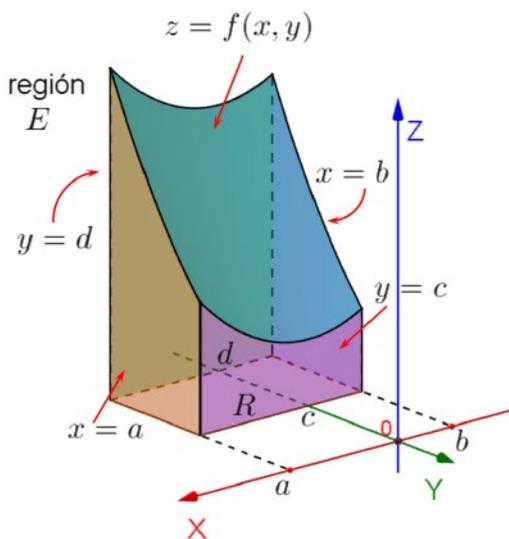


Figura 1.6: La región E del espacio

Si admitimos que la región E tiene un volumen V , llamamos a este volumen la **integral doble de f sobre R** y se denota por

$$V = \iint_R f(x, y) dA. \tag{1.7}$$

Propiedades de la integral doble

En este apartado exhibimos las principales propiedades de la integral doble que, en esencia, son las mismas que se estudiaron para las integrales definidas simples.

Proposición 1.2

Sean f y g dos funciones integrables en un rectángulo R , k_1 y k_2 dos constantes reales. Entonces, se cumple que

[IntDob1] Linealidad. La función $k_1f + k_2g$ es integrable sobre R y

$$\iint_R (k_1f(x, y) + k_2g(x, y)) dA = k_1 \iint_R f(x, y) dA + k_2 \iint_R g(x, y) dA.$$

Esta propiedad puede ser extendida a cualquier número finito de funciones interables.

[IntDob2] Monotonicidad. Si además $f(x, y) \geq g(x, y)$, para todo $(x, y) \in R$, se cumple que

$$\iint_R f(x, y) dA \geq \iint_R g(x, y) dA.$$

[IntDob3] Aditividad. Si el rectángulo R es subdividido en n rectángulos R_1, R_2, \dots, R_n y si f es integrable sobre cada $R_i, i = 1, \dots, n$, entonces es integrable sobre R y

$$\iint_R f(x, y) dA = \sum_{i=1}^n \iint_{R_i} f(x, y) dA.$$

[IntDob4] Positividad. Si $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in R$, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA \geq 0.$$

[IntDob5] Módulo de la integral.

$$\left| \iint_R f(x, y) dA \right| \leq \iint_R |f(x, y)| dA.$$

[IntDob6] Valor medio. Si además existen dos valores reales m y M tales que $m \leq f(x, y) \leq M$ en dicha región y A_R representa el área de R , entonces

$$m(A_R) \leq \iint_R f(x, y) dA \leq M(A_R).$$

1.2.1. Integrales iteradas o sucesivas

Iteración significa realizar una acción o proceso repetidamente, esto significa que para calcular una integral doble, tendremos que poner en marcha nuestras estrategias de integración repetidamente. Este tipo de integrales se denominan integrales iteradas, ya que son el resultado de aplicar la integración de una variable más de una vez cuyo

método práctico lo proporciona el siguiente teorema.

Teorema 1.2 [Teorema de Fubini]

Sea $z = f(x, y)$ una función continua en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, siendo $f(x, y)$ integrable con respecto a y en el intervalo $[c, d]$, de modo que existe la función

$$\phi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

integrable en $[a, b]$ entonces la integral doble de f sobre R puede ser calculada a través de las integrales iteradas, es decir,

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy. \quad (1.8)$$

Prueba 1.1 La idea de la demostración empieza definiendo una partición en el rectángulo R . Para este fin, dividimos el intervalo $[a, b]$ en m sub intervalos trazando segmentos de recta paralelos al eje Y que corten al eje X en los puntos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Asimismo particionamos el intervalo $[c, d]$ en p subintervalos dibujando segmentos de recta paralelos al eje X que intersecten al eje Y en los puntos $y_0 < y_1 < \dots < y_p$. Así, la región R queda dividida en n sub rectángulos cada uno de ellos de área igual a $\Delta A_i = \Delta x_j \Delta y_k$ para $i = 1, 2, \dots, n$, donde

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1} \text{ y } \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$$

para $j = 1, 2, \dots, m$ y $k = 1, 2, \dots, p$.

En cada uno de estos sub rectángulos elegimos un punto arbitrario $P_i(x_j, y_k)$ con el cual formulamos la suma

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta A_i = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p f(x_j, y_k) \Delta y_k \Delta x_j. \quad (1.9)$$

A continuación tomamos el límite cuando la norma de la partición tiende a cero lo que implicará que tanto m como p crecerán de manera desmedida, es decir

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta A_i = \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p f(x_j, y_k) \Delta y_k \Delta x_j,$$

pero

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta A_i = \iint_R f(x, y) dy dx,$$

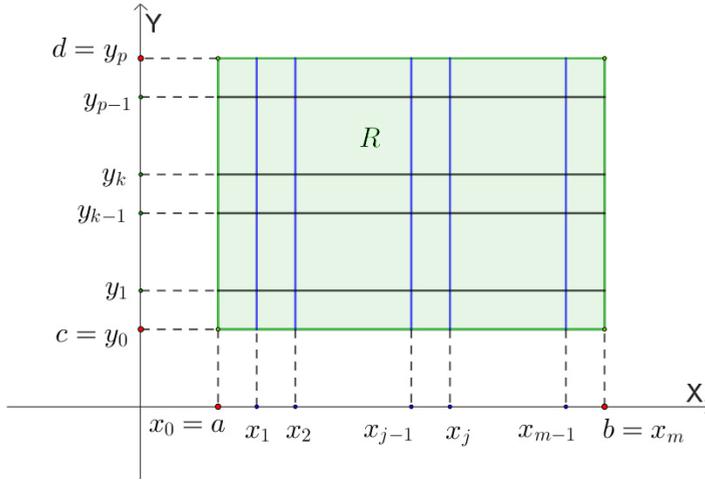


Figura 1.7: Partición del rectángulo R

luego

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p f(x_j, y_k) \Delta y_k \Delta x_j = \iint_R f(x, y) dy dx. \quad (1.10)$$

En la hipótesis tenemos que $f(x, y)$ es una función integrable con respecto a y en $[c, d]$, luego en concordancia con la definición de integral definida se llega a

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p f(x_j, y_k) \Delta y_k = \int_c^d f(x_j, y) dy. \quad (1.11)$$

Sustituyendo (1.11) en (1.10) se obtiene

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^m \left(\int_c^d f(x_j, y) dy \right) \Delta x_j = \iint_R f(x, y) dy dx \quad (1.12)$$

si a esto le añadimos el hecho que

$$\phi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

es integrable en $[a, b]$ se arriba a

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^m \left(\int_c^d f(x_j, y) dy \right) \Delta x_j = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^m \phi(x_j) \Delta x_j = \int_a^b \phi(x) dx.$$

Al comparar el resultado anterior con (1.12) se concluye que

$$\int_a^b \phi(x) dx = \iint_R f(x, y) dy dx.$$

Finalmente llegamos a nuestro objetivo reemplazando $\phi(x)$ en la igualdad anterior, es decir

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \iint_R f(x, y) dy dx.$$

La otra igualdad se verifica cuando se intercambian las funciones de x e y . ■

Observación 1 Puesto que el teorema de Fubini permite calcular de igual modo dos integrales iteradas, cuyos órdenes de integración están intercambiados, es saludable analizar qué orden resulta más ventajoso al momento de evaluar la misma, tal conveniencia queda especificada por dos la siguientes dos razones:

- 1 La cantidad de integrales iteradas a plantear a fin de valuar la integral doble.
- 2 La dificultad que se presente al momento de calcular la integral.

Por consiguiente, se debe analizar las integrales iteradas en ambos órdenes de integración y luego optar por aquel que resulte más eficiente.

- N** Calcular una integral doble se realiza como un proceso de iteración y para ello es importante ser conscientes que estamos realizando el cálculo de la integral en dos pasos, es decir, al momento de integrar con respecto a x se considera constante a y ; mientras que cuando toca el turno de integrar con respecto a y , la variable x es considerada como constante.

Ejemplo 1.1

Calcule la integral doble

$$I = \iint_R e^{2y-x^2} dA,$$

donde $R = [-2, \sqrt{8}] \times [0, 3]$.

Solución.

Ya que el orden de integración no se especifica en el enunciado, elegimos el orden de integración más conveniente. En este ejercicio, el proceso de integración es un poco más simple si integramos en el orden $dydx$. En efecto:

$$I = \iint_R e^{2y-x^2} dA = \int_{-2}^{\sqrt{8}} \int_0^3 e^{2y-x^2} dy dx.$$

Al resolver la integral con respecto de y se tiene

$$\int_0^3 e^{2y} e^{-x^2} dy = e^{-x^2} \int_0^3 e^{2y} dy = \frac{e^{-x^2}}{2} e^{2y} \Big|_0^3 = \left(\frac{1}{2} e^6 - \frac{1}{2} \right) e^{-x^2}.$$

Finalmente

$$I = \int_{-2}^{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{2} e^6 - \frac{1}{2} \right) e^{-x^2} dx = 355.798$$

□

Ejemplo 1.2

Calcule el valor de la integral doble iterada

$$\int_0^{\pi/2} \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{2} x^4 \cos^2 y - 8x^2 \right) dx dy.$$

Solución.

Tendiendo en mente que todas las funciones en donde aparece y se comporta como constante, procedemos a integrar respecto de x tal como sigue

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{2} x^4 \cos^2 y - 8x^2 \right) dx &= \left[\frac{1}{10} \cos^2 y x^5 - \frac{8}{3} x^3 \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{1}{10} (2^5) \cos^2 y - \frac{8}{3} (2^3) - \left(\frac{1}{10} (-2)^5 \cos^2 y - \frac{8}{3} (-2)^3 \right) \\ &= \frac{32}{5} \cos^2 y - \frac{128}{3}. \end{aligned}$$

Finalmente, se integra respecto de y .

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{32}{5} \cos^2 y - \frac{128}{3} \right) dy &= \int_0^{\pi/2} \frac{32}{5} \cos^2 y dy - \int_0^{\pi/2} \frac{128}{3} dy \\ &= \frac{32}{5} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2y)}{2} dy - \int_0^{\pi/2} \frac{128}{3} dy \\ &= \frac{32}{5} \left[\frac{1}{2} y + \frac{1}{4} \sin(2y) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{128}{3} dy. \end{aligned}$$

En virtud del segundo teorema fundamental del cálculo se llega a que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{32}{5} \cos^2 y - \frac{128}{3} \right) dy &= \frac{32}{5} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{4} \sin \left(2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) \right] - \frac{128}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right) \\ &= -\frac{296}{15} \pi \approx -61.994. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.3

Resuelva la integral doble iterada

$$\int_0^{\sqrt{5}} \int_{-1}^4 (x^2 + y^2) dy dx.$$

Solución.

Al calcular $\int_{-1}^4 (x^2 + y^2) dy$ debemos considerar a todas las expresiones que contengan a x como constantes. Con esto de antemano, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-1}^4 (x^2 + y^2) dy &= \left. x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right|_{-1}^4 = 4x^2 + \frac{1}{3} (4)^3 - \left(x^2 (-1) + \frac{1}{3} (-1)^3 \right) \\ &= 5x^2 + \frac{65}{3}. \end{aligned}$$

Finalmente, resolvemos la integral con respecto de x con el auxilio del segundo teorema fundamental del cálculo, o sea

$$\int_0^{\sqrt{5}} \left(5x^2 + \frac{65}{3} \right) dx = \left. \frac{5}{3} x^3 + \frac{65}{3} x \right|_0^{\sqrt{5}} = 30\sqrt{5}.$$

□

Caso especial

Si la función integrando $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ puede ser escrita como un producto de dos funciones, una de ellas que depende de una de las variables y una segunda función que dependa solo de la otra variable, entonces el cálculo de la integral doble de f se simplifica.

En efecto, sea $f(x, y) = g(x)h(y)$ una función integrable sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$; donde la función g , que depende solo de la variable x , está definida en el intervalo $[a, b]$ y h , que depende de y , está definida en $[c, d]$. Entonces, por el teorema de Fubini se tiene que

$$\iint_R f(x, y) dy dx = \int_a^b \int_c^d g(x)h(y) dy dx = \int_a^b \left(\int_c^d g(x)h(y) dy \right) dx.$$

Notemos que en la integral dentro del paréntesis, la expresión $g(x)$ es constante en relación al dy , en consecuencia escribimos

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(\int_c^d g(x) h(y) dy \right) dx &= \int_a^b \left(g(x) \int_c^d h(y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\int_a^b \int_c^d g(x) h(y) dy dx = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy. \quad (1.13)$$

Bajo las condiciones planteadas, la igualdad anterior estipula que la integral doble puede ser escrita como el producto de dos integrales definidas simples de una variable.

Ejemplo 1.4

Calcule la integral doble iterada

$$\int_1^3 \int_{-5}^{-1} x^2 y^3 dx dy.$$

Solución.

En virtud de (1.13), la integral doble iterada se escribe como

$$\int_1^3 \int_{-5}^{-1} x^2 y^3 dx dy = \int_1^3 y^3 dy \int_{-5}^{-1} x^2 dx.$$

Evaluamos cada una de las integrales definidas simples. En efecto,

$$\int_1^3 y^3 dy = \left. \frac{1}{4} y^4 \right|_1^3 = \frac{1}{4} (3^4 - 1) = 20.$$

Por otro lado

$$\int_{-5}^{-1} x^2 dx = \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_{-5}^{-1} = \frac{1}{3} \left((-1)^3 - (-5)^3 \right) = \frac{124}{3}.$$

Finalmente se tiene

$$\int_1^3 \int_{-5}^{-1} x^2 y^3 dx dy = 20 \left(\frac{124}{3} \right) = \frac{2480}{3}.$$

□

Ejemplo 1.5

Determine el valor de la integral doble iterada

$$\int_{-6}^2 \int_{-1}^8 x^2 y^2 e^{y^3} dy dx.$$

Solución.

En concordancia con (1.13), la integral doble iterada se escribe como

$$\int_{-6}^2 \int_{-1}^8 x^2 y^2 e^{y^3} dy dx = \int_{-6}^2 x^2 dx \int_{-1}^8 y^2 e^{y^3} dy.$$

En primer lugar, encontramos la solución de la integral con respecto a x .

En efecto,

$$\int_{-6}^2 x^2 dx = \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_{-6}^2 = \frac{1}{3} (2^3 - (-6)^3) = \frac{224}{3}.$$

En segundo término, para resolver la integral con respecto de y , proponemos el cambio de variable $u = y^3$ para el cual $u = 3y^2 dy$. Además, si $y = -1$ entonces $u = -1$ y, por otro lado, para $y = 8$ se tiene $u = 8^3 = 512$.

Al implementar dicho cambio de variable obtenemos que

$$\int_{-1}^8 y^2 e^{y^3} dy = \int_{-1}^8 y^2 e^{y^3} dy = \frac{1}{3} \int_{-1}^{512} e^u du = \left[\frac{e^u}{3} \right]_{-1}^{512} = e^{512} - e^{-1}.$$

Finalmente,

$$\int_{-6}^2 \int_{-1}^8 x^2 y^2 e^{y^3} dy dx = \frac{224}{3} (e^{512} - e^{-1}) \approx 1.7057 \times 10^{224}.$$

□

1.3 Integral doble sobre regiones más generales.

Hasta ahora hemos calculado la integral iterada de funciones continuas definidas sobre rectángulos $R = [a, b] \times [c, d]$, sin embargo, podemos calcular una integral doble sobre regiones más generales del plano, es decir regiones que no sean un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados. Las integrales sucesivas, como las presentadas anteriormente, pueden ser utilizadas cuando las curvas que delimitan a la región D , sobre la cual la función f está definida, no son tan simples como en el caso de un rectángulo R .

Consideremos un subconjunto D del plano XY descrito por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}, \quad (1.14)$$

donde φ_1 y φ_2 son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ y $\varphi_1 \leq \varphi_2$, y cuya representación gráfica se aprecia en la figura.

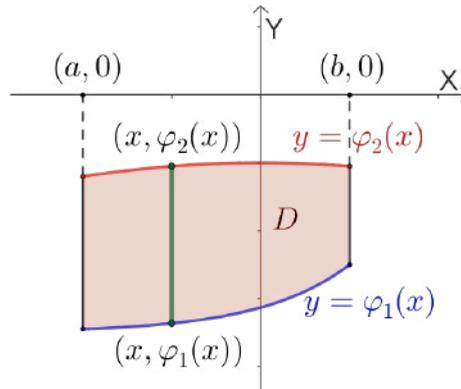


Figura 1.8: Región del tipo I

Observe que la región D es cerrada y limitada en virtud de que φ_1 y φ_2 son continuas en $[a, b]$ y que el segmento de extremos $(x, \varphi_1(x))$ y $(x, \varphi_2(x))$ está contenido en D , para cada $x \in [a, b]$. A la región descrita por (1.14) se le llama **región del tipo I**.

En otro orden de las cosas, una **región del tipo II** es un subconjunto D del plano XY descrito por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \wedge \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}, \quad (1.15)$$

donde ψ_1 y ψ_2 son funciones continuas en el intervalo $[c, d]$ y $\psi_1 \leq \psi_2$. Este tipo de región, cuya representación gráfica se aprecia en la figura 1.9, también es cerrada y

limitada; además, el segmento de extremos $(\psi_1(y), y)$ y $(\psi_2(y), y)$ está contenido en D , para cada $y \in [c, d]$.

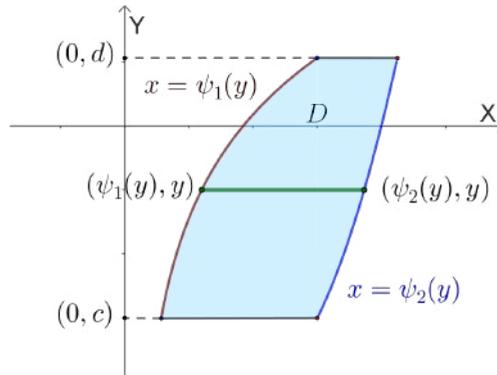


Figura 1.9: Región del tipo II

Teorema 1.3 [Teorema de Fubini]

Sea $f(x, y)$ una función definida y continua en un subconjunto limitado y cerrado $D \subset \mathbb{R}^2$. Si D es del **tipo I**, además existen la integral doble $\iint_D f(x, y) dydx$ y la función $\phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ para cada $x \in [a, b]$, entonces

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dydx. \tag{1.16}$$

Si D es del **tipo II**, así mismo existen la integral doble $\iint_D f(x, y) dx dy$ y la función $\phi(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$ para cada $y \in [c, d]$, entonces

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy. \tag{1.17}$$

Prueba 1.2 A continuación se muestra la demostración de (1.16). Para la prueba de (1.17) el lector solo debe seguir los lineamientos considerando el orden $dx dy$ o intercambiando x por y .

Para alcanzar nuestro cometido, cimentaremos la demostración reduciendo el caso en el que D es del **tipo I**, al caso corroborado para (1.8). Para ello consideremos la

región D encerrada en el menor bloque rectangular B posible, con lados paralelos a los ejes coordenados tal como apreciamos en la figura 1.10.

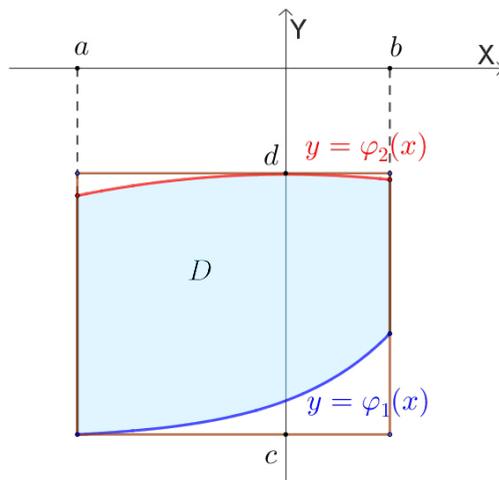


Figura 1.10: Región D encerrada en el menor bloque rectangular B

Simultáneamente definimos la función

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & , \quad (x, y) \in D \\ 0 & , \quad (x, y) \in B, (x, y) \notin D \end{cases} \quad (1.18)$$

que, por un lado, al ser nula en los puntos del bloque rectangular B que están fuera de D , ella es continua en dichos puntos; por otra parte la igualdad $g(x, y) = f(x, y)$ para todo $(x, y) \in D$ y la hipótesis garantizan la continuidad de g .

Teniendo en consideración que la frontera de D es una curva de contenido nulo, la función $g(x, y)$ es integrable en B , por ser continua en todos sus puntos, excepto en aquellos que pertenecen a una curva de contenido nulo. Este razonamiento nos permite, en virtud del teorema 1.2, afirmar que

$$\iint_B g(x, y) \, dx dy = \int_c^d \int_a^b g(x, y) \, dx dy.$$

Más aún, como consecuencia de la regla de correspondencia de $g(x, y)$ se tiene

$$\iint_B g(x, y) \, dx dy = \iint_D f(x, y) \, dx dy$$

lo que nos lleva a

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \int_c^d g(x, y) \, dy dx. \quad (1.19)$$

Observando la figura 1.10 y en uso estricto de las propiedades de la integral definida y de la continuidad de g se tiene

$$\int_c^d g(x, y) dy = \int_c^{\varphi_1(x)} g(x, y) dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} g(x, y) dy + \int_{\varphi_2(x)}^d g(x, y) dy. \quad (1.20)$$

Según (1.18) $g(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in B - D$, se ve fácilmente que

$$\int_c^{\varphi_1(x)} g(x, y) dy = \int_{\varphi_2(x)}^d g(x, y) dy = 0,$$

Luego (1.20) se reduce a

$$\int_c^d g(x, y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} g(x, y) dy.$$

La hipótesis garantiza existencia de $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ para cada $x \in [a, b]$ y además $g(x, y) = f(x, y)$ para todo $(x, y) \in D$, entonces

$$\int_c^d g(x, y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Sustituyendo este resultado en (1.19)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx$$

desemboca en lo que queremos demostrar. ■

Observación 2 Si para todo $(x, y) \in D$ se cumple que $f(x, y) = 1$, la integral

$$\iint_D 1 dA$$

es numéricamente igual al área de la región D .

Un procedimiento para evaluar una integral doble

El procedimiento que se sugiere para evaluar una integral doble mediante integrales dobles iteradas es el siguiente:

[Paso 1] Dibuje la región de integración. En este paso, adicionalmente, se identifican las ecuaciones de las curvas que limitan la región de integración así como los posibles puntos de intersección entre ellas o de cada curva con los ejes coordenados.

[Paso 2] Analizar las integrales iteradas en ambos órdenes de integración. Como sabemos, los dos posibles órdenes de integración son:

$dx dy$ que significa integrar primero la variable x acotada por límites variables, manteniendo a la variable y como constante, y luego resolver la integral para y usando el segundo teorema fundamental del cálculo.

$dy dx$ que implica primero resolver la integral para la variable y delimitada por límites variables, manteniendo a la variable x como constante, y luego resolver la integral para x usando el segundo teorema fundamental del cálculo.

[Paso 3] Elegir el orden de integración que resulte más eficiente.

Ejemplo 1.6

Calcule la integral doble

$$\iint_D (3 - x + 2y) dA.$$

donde D es la región limitada por los ejes coordenados y las recta $x = 2$ y $x + y = 3$.

Solución.

La región de integración se muestra en la figura 1.11 y encaja como una **región del tipo I**, según (1.14). Por consiguiente, su expresión analítica es

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 3 - x\}$$

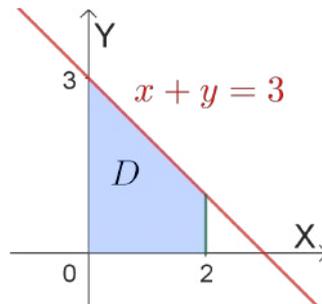


Figura 1.11: Dominio de integración del ejemplo 1.6

y por esta razón, la integral doble iterada a resolver es

$$\int_0^2 \int_0^{3-x} (3 - x + 2y) dy dx.$$

Para resolver la integral interior se procede como sigue,

$$\begin{aligned} \int_0^{3-x} (3-x+2y) dy &= (3-x)y + y^2 \Big|_0^{3-x} = (3-x)(3-x) + (3-x)^2 \\ &= 2x^2 - 12x + 18. \end{aligned}$$

A continuación, resolvemos la integral respecto de y :

$$\int_0^2 (2x^2 - 12x + 18) dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 6x^2 + 18x \right]_0^2 = \frac{52}{3}.$$

□

Ejemplo 1.7

Determine el valor de la integral doble

$$\iint_D (1 + 3yx^2) dA,$$

donde D es la región limitada por las curvas $x + y = 3$ y $x = 4 - (y - 1)^2$.

Solución.

Los puntos de intersección de ambas curvas se obtienen de

$$4 - (y - 1)^2 = 3 - y \Leftrightarrow y = 0; y = 3.$$

La región se ajusta a una del **tipo II** y en concordancia con (1.15), analíticamente, se expresa como

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 3 \wedge 3 - y \leq x \leq 4 - (y - 1)^2\}.$$

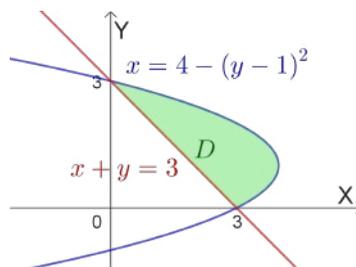


Figura 1.12: Dominio de integración del ejemplo 1.7

La integral doble iterada es

$$\int_0^3 \int_{3-y}^{4-(y-1)^2} (1 + 3y^2x) \, dx \, dy.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{3-y}^{4-(y-1)^2} (1 + 3y^2x) \, dx &= \left. \frac{3}{2}x^2y^2 + x \right|_{3-y}^{4-(y-1)^2} \\ &= \frac{3}{2}y^2(4 - (y-1)^2)^2 + 4 - (y-1)^2 \\ &\quad - \left(\frac{3}{2}y^2(3-y)^2 + 3-y \right). \end{aligned}$$

Al simplificar con cuidado se obtiene

$$\int_{3-y}^{4-(y-1)^2} (1 + 3y^2x) \, dx = \frac{3}{2}y^6 - 6y^5 - \frac{9}{2}y^4 + 27y^3 - y^2 + 3y.$$

En seguida, resolvemos la integral respecto de y :

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left(\frac{3}{2}y^6 - 6y^5 - \frac{9}{2}y^4 + 27y^3 - y^2 + 3y \right) dy &= \left. \frac{3}{14}y^7 - y^6 - \frac{9}{10}y^5 + \frac{27}{4}y^4 \right|_0^3 \\ &\quad - \left. \frac{1}{3}y^3 + \frac{3}{2}y^2 \right|_0^3 \\ &= \frac{10107}{140}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.8

Calcule la integral doble

$$\iint_D (x^2 + y^2) \, dA,$$

donde D es la región limitada por el eje Y las gráficas de las funciones $y = 4 - x^2$ y $y + 1 = 0$.

Solución.

La región de integración se puede ver en la figura 1.13 a continuación.

Es fácil ver que la región D se puede clasificar tanto como de tipo I y tipo II. Por tanto, la integral dada se puede calcular de dos formas. Para ejemplificar y confirmar la

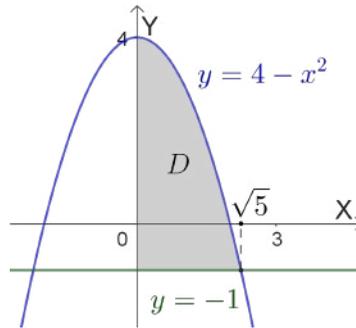


Figura 1.13: Dominio de integración del ejemplo 1.8

equivalencia de los cálculos, desarrollaremos utilizando ambas maneras, pero hay que tener claro que no es necesario resolver la integral dos veces.

Considerando a D como una **región del tipo I**, según (1.14), su expresión analítica es

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{5} \wedge -1 \leq y \leq 4 - x^2 \right\}$$

y por tanto, la integral doble iterada a resolver es

$$\int_0^{\sqrt{5}} \int_{-1}^{4-x^2} (x^2 + y^2) dy dx.$$

Al calcular $\int_{-1}^{4-x^2} (x^2 + y^2) dy$ se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{4-x^2} (x^2 + y^2) dy &= \left. x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right|_{-1}^{4-x^2} \\ &= x^2 (4 - x^2) + \frac{1}{3} (4 - x^2)^3 - \left(x^2 (-1) + \frac{1}{3} (-1)^3 \right) \\ &= x^2 (4 - x^2) + \frac{1}{3} (4 - x^2)^3 + x^2 + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\int_0^{\sqrt{5}} \left(x^2 (4 - x^2) + \frac{1}{3} (4 - x^2)^3 + x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \frac{260}{21} \sqrt{5} \approx 27.685$$

En otro orden de las cosas, si visualizamos a D como una **región del tipo II**, en virtud de (1.15), ella queda descrita por

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 4 \wedge 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y} \right\},$$

$$\int_{-1}^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Se procede a resolver la integral $\int_0^{\sqrt{4-y}} (x^2 + y^2) dx$ tal como sigue

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{4-y}} \int (x^2 + y^2) dx &= \left. \frac{1}{3}x^3 + xy^2 \right|_0^{\sqrt{4-y}} \\ &= \frac{1}{3} \left(\sqrt{4-y} \right)^3 + y^2 \sqrt{4-y}. \end{aligned}$$

Para cerrar, resolvemos

$$\int_{-1}^4 \left(\frac{1}{3} \left(\sqrt{4-y} \right)^3 + y^2 \sqrt{4-y} \right) dy,$$

con el cambio de variable $u = 4 - y$ para el cual $du = -dy$. Además, si $y = -1$ entonces $u = 5$ y para $y = 4$ se tiene $u = 0$. Al poner en marcha la sutitución se consigue

$$- \int_5^0 \left(\frac{1}{3} (\sqrt{u})^3 + (4-u)^2 \sqrt{u} \right) du = \int_0^5 \frac{1}{3} u^{3/2} du + \int_0^5 (4-u)^2 \sqrt{u} du.$$

De la primera integral se obtiene

$$\int_0^5 \frac{1}{3} u^{3/2} du = \left. \frac{2}{15} u^{5/2} \right|_0^5 = \frac{10}{3} \sqrt{5}. \quad (1.21)$$

Por el contrario, para resolver la segunda integral se procede tal como sigue

$$\begin{aligned} \int_0^5 (4-u)^2 \sqrt{u} du &= \int_0^5 (u^2 - 8u + 16) \sqrt{u} du \\ &= \int_0^5 \left(16\sqrt{u} - 8u^{3/2} + u^{5/2} \right) du \\ &= \left. \frac{32}{3} u^{3/2} - \frac{16}{5} u^{5/2} + \frac{2}{7} u^{7/2} \right|_0^5 \\ &= \frac{190}{21} \sqrt{5}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Por último, el valor de la integral se obtiene de la suma de (1.21) con (1.22), es decir

$$\int_{-1}^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{10}{3} \sqrt{5} + \frac{190}{21} \sqrt{5} = \frac{260}{21} \sqrt{5} \approx 27.685.$$

□

Tenga en cuenta que, en el ejemplo anterior, ambas formas implican prácticamente la mismos cálculos. En algunos casos, una buena elección del orden de integración puede simplificar enormemente el proceso de integración.

En numerosas ocasiones suele ocurrir que existe $x = k_3 \in]a, b[$ tal que en una región del tipo I, ver (1.14), una de la funciones $y = \varphi_1(x)$ o $y = \varphi_2(x)$ está dada por

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} h_1(x) & , \quad a \leq x \leq k_3 \\ h_2(x) & , \quad k_3 \leq x \leq b \end{cases} \quad \text{o} \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} h_1(x) & , \quad a \leq x \leq k_3 \\ h_2(x) & , \quad k_3 \leq x \leq b \end{cases}$$

como se aprecia en la figura adjunta.

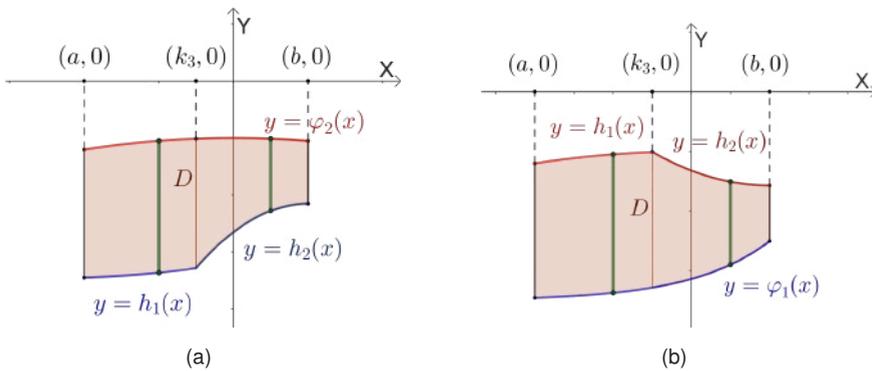


Figura 1.14: División de una región del tipo I

En este caso, la integral doble iterada (1.16) viene dada por

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^{k_3} \int_{h_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx + \int_{k_3}^b \int_{h_2(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx. \quad (1.23)$$

Ejemplo 1.9

Calcular la integral doble $\iint_D x dA$ si D es la región limitada por las gráficas de

$$x = \sqrt{y}; \quad y = x + 2 \quad \text{y} \quad 3x + y = 18.$$

Solución.

Los punto de intersección de las curvas en cuestión resultan de la solución de, en primer lugar

$$x + 2 = -3x + 18 \Leftrightarrow x = 4.$$

En segundo termino se tiene

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

y, finalmente, $x^2 = -3x + 18 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -6$.

La región de integración se aprecia en la figura 1.15.

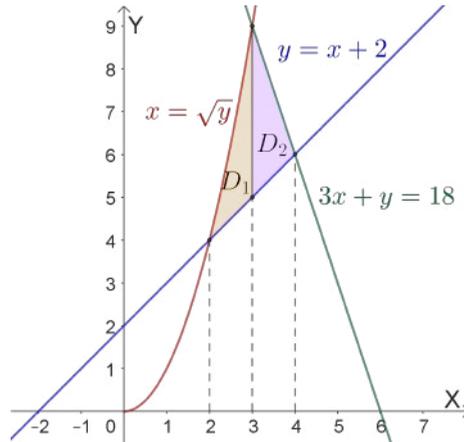


Figura 1.15: Región de integración del ejemplo 1.9

Queda claro que para calcular la integral doble, la región D debe ser dividida en dos subregiones, D_1 y D_2 , de modo que

$$D_1 = \{(x,y) : 2 \leq x \leq 3 \wedge x + 2 \leq y \leq x^2\}$$

y

$$D_2 = \{(x,y) : 3 \leq x \leq 4 \wedge x + 2 \leq y \leq -3x + 18\}.$$

Con lo anterior, y en virtud de (1.23), escribimos

$$\begin{aligned} \iint_D x dA &= \int_2^3 \int_{x+2}^{x^2} x dy dx + \int_3^4 \int_{x+2}^{-3x+18} x dy dx \\ &= \int_2^3 x (x^2 - (x + 2)) dx + \int_3^4 x (-3x + 18 - (x + 2)) dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \Big|_2^3 + 8x^2 - \frac{4}{3}x^3 \Big|_3^4 = \frac{59}{12} + \frac{20}{3} = \frac{139}{12}. \end{aligned}$$

□

Una situación análoga es posible que acontezca con una región del tipo II en la que una de las funciones $x = \psi_1(y)$ o $x = \psi_2(y)$ se represente por

$$\psi_1(y) = \begin{cases} g_1(y) & , \quad c \leq y \leq k_4 \\ g_2(y) & , \quad k_4 \leq y \leq d \end{cases} \quad \text{o} \quad \psi_2(y) = \begin{cases} g_1(y) & , \quad c \leq y \leq k_4 \\ g_2(y) & , \quad k_4 \leq y \leq d \end{cases}$$

en virtud de que $y = k_4 \in]c, d[$.

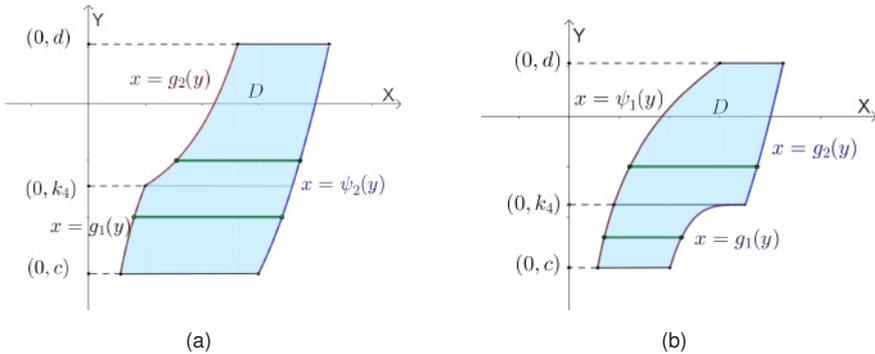


Figura 1.16: Una región del tipo II

Bajo estas consideraciones, la integral doble iterada (1.17) viene dada por

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^{k_4} \int_{g_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy + \int_{k_4}^d \int_{g_2(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy. \quad (1.24)$$

Ejemplo 1.10

Calcular la integral doble $\iint_D y dA$ si D es la región limitada por las gráficas de las curvas

$$y = 2 ; y = \sqrt{8 - 2x} ; x = 3y(y - 2) ; 7y + x = 4.$$

Solución.

Los puntos de intersección de las curvas resultan de resolver las ecuaciones

$$4 - 7y = 3y(y - 2) \Leftrightarrow y = 1 \vee y = -\frac{4}{3}$$

y

$$\sqrt{8 - 2x} = \frac{1}{7} (4 - x) \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -94.$$

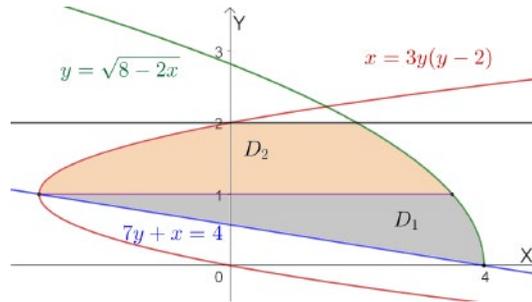


Figura 1.17: Una región del tipo II dividida para el ejemplo 1.10

En concordancia con (1.24) se plantea la integral doble iterada cuya solución sigue a continuación.

$$\begin{aligned}
 \iint_D y dA &= \int_0^1 \int_{4-7y}^{4-0.5y^2} y dx dy + \int_1^2 \int_{3y(y-2)}^{4-0.5y^2} y dx dy \\
 &= \int_0^1 y \left(4 - \frac{1}{2}y^2 - (4 - 7y) \right) dy + \int_1^2 y \left(4 - \frac{1}{2}y^2 - 3y(y-2) \right) dy \\
 &= \left. \frac{7}{3}y^3 - \frac{1}{8}y^4 \right|_0^1 + \left. -\frac{7}{8}y^4 + 2y^3 + 2y^2 \right|_1^2 \\
 &= \frac{53}{24} + \frac{55}{8} = \frac{109}{12}.
 \end{aligned}$$

□

1.3.1. Propiedad de simetría

Proposición 1.3

Sea D una región del plano tal que $D = D_1 \cup D_2$, además D_1 es la región simétrica de D_2 con respecto a uno de los ejes coordenados, o bien el eje X o bien el eje Y , y la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en D y simétrica con respecto al mismo eje coordenado, entonces

$$\iint_D f(x, y) dA = 2 \iint_{D_1} f(x, y) dA = 2 \iint_{D_2} f(x, y) dA. \quad (1.25)$$

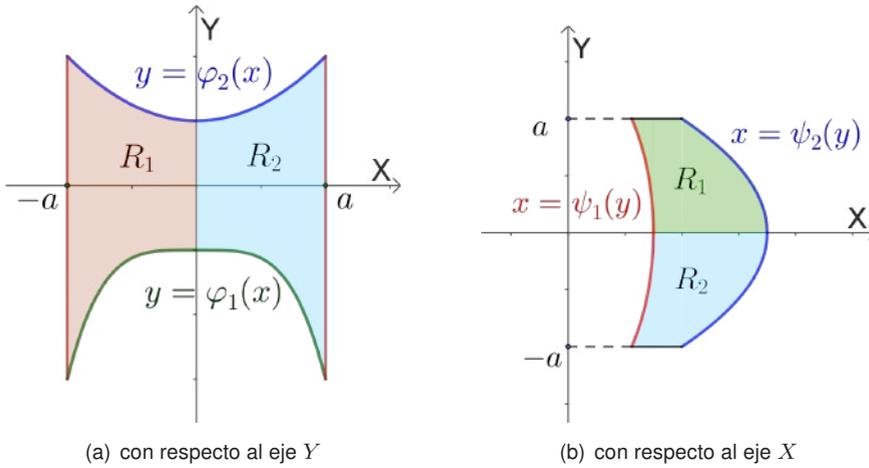


Figura 1.18: Regiones simétricas

Prueba 1.3 Consideremos la región

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a \wedge \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}, \tag{1.26}$$

tal que $\varphi_1(-x) = \varphi_1(x)$ y $\varphi_2(-x) = \varphi_2(x)$ tal como se aprecia en la figura 1.19.

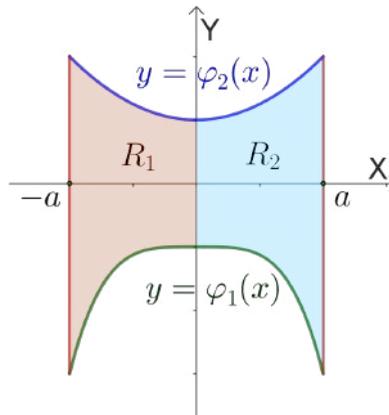


Figura 1.19: Región simétrica con respecto al eje Y

Es evidente que el eje Y divide a D en dos subregiones D_1 y D_2 de modo que $D = D_1 \cup D_2$. Por otro lado, las funciones $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ son pares cuya gráfica es simétrica con respecto al eje Y así como el intervalo $[-a, a]$. El argumento anterior nos permite afirmar que D_2 es la región simétrica de D_1 con respecto al eje coordenado Y .

Así mismo, la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en D y simétrica con respecto al eje Y , es decir $f(x, y) = f(-x, y)$. De acuerdo con la propiedad de aditividad de la

integral doble se tiene que

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dx dy.$$

Si en la integral doble iterada

$$\iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy = \int_0^a \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dx dy$$

introducimos el cambio de variable $x = -x$ se obtiene $dx = -dx$ y

$$\iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy = \int_0^{-a} \int_{\varphi_1(-x)}^{\varphi_2(-x)} f(-x, y) (-dx) dy = \int_{-a}^0 \int_{\varphi_1(-x)}^{\varphi_2(-x)} f(-x, y) \, dx dy.$$

Al sustituir $\varphi_1(-x) = \varphi_1(x)$, $\varphi_2(-x) = \varphi_2(x)$ y $f(x, y) = f(-x, y)$ en la integral doble anterior se obtiene

$$\iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy = \int_{-a}^0 \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dx dy,$$

es decir

$$\iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy = \iint_{D_2} f(x, y) \, dx dy.$$

De este modo

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy = 2 \iint_{D_2} f(x, y) \, dx dy.$$

Siguiendo un procedimiento análogo se demuestra la propiedad de simetría con respecto al eje X . ■

Observación 3 Tenga en cuenta que:

- 1 La propiedad anterior es también válida cuando la simetría se establece en relación al origen de coordenadas.
- 2 Para aplicar correctamente esta propiedad, tanto la función integrando como la región de integración deben tener simetría respecto al mismo eje coordenado.

Ejemplo 1.11

Calcule la integral doble

$$\iint_D (1 + y^2) \, dA,$$

donde $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \leq 0\}$.

Solución.

En primer lugar observemos que la región D corresponde al semicírculo con centro en el origen y radio igual a 2, para $-2 \leq x \leq 0$. Además, D es simétrica respecto al eje X .

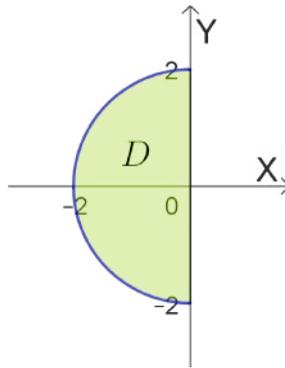


Figura 1.20: Región de integración del ejemplo 1.11

En segundo lugar, el integrando $f(x, y) = 1 + y^2$ también es simétrica respecto al eje X pues

$$f(x, -y) = 1 + (-y)^2 = 1 + y^2 = f(x, y).$$

Luego, en razón de (1.25) se tiene

$$\iint_D (1 + y^2) dA = 2 \int_{-2}^0 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (1 + y^2) dy dx.$$

En tercer termino, la resolución de la integral interior sigue el siguiente proceso

$$\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (1 + y^2) dy = \left[\frac{1}{3}y^3 + y \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{3} \left(\sqrt{4-x^2} \right)^3 + \sqrt{4-x^2}.$$

Como penúltimo paso, el valor numérico de la integral con respecto de x se consigue con la ayuda de una calculadora científica o con algún software de cálculo de su elección. En cualquier caso, el resultado es

$$\int_{-2}^0 \left(\frac{1}{3} \left(\sqrt{4-x^2} \right)^3 + \sqrt{4-x^2} \right) dx = 6.283$$

Finalmente, la integral solicitada es igual a

$$\iint_D (1 + y^2) dA = 2(6.283) = 12.566.$$



Ejemplo 1.12

Calcule la integral doble

$$\iint_D yx^2 dA,$$

donde D es la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt{4+x^2}$, $y = |x|$ y las rectas verticales $x = 2$ y $x = -2$.

Solución.

La representación gráfica de región D se muestra en la figura 1.21 y notamos que es simétrica respecto al eje Y . Además, el integrando $f(x, y) = yx^2$ es simétrica

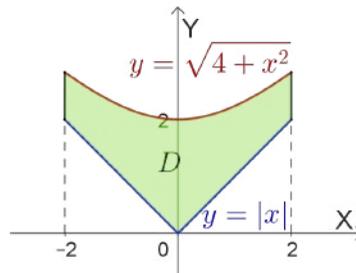


Figura 1.21: Región de integración del ejemplo 1.12

respecto al eje Y pues

$$f(-x, y) = y(-x)^2 = yx^2 = f(x, y).$$

Bajo lo establecido en (1.25), procedemos a plantear la integral doble iterada. En efecto

$$\iint_D yx^2 dA = 2 \int_{-2}^0 \int_{-x}^{\sqrt{4+x^2}} yx^2 dy dx.$$

A continuación, calculamos la integral con respecto a y . En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{-x}^{\sqrt{4+x^2}} yx^2 dy &= \left. \frac{1}{2}x^2 y^2 \right|_{-x}^{\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{2}x^2 \left((\sqrt{4+x^2})^2 - (-x)^2 \right) \\ &= 2x^2 \end{aligned}$$

Es momento de resolver la integral definida con respecto de x con el segundo teorema fundamental del cálculo,

$$\int_{-2}^0 2x^2 dx = \left. \frac{2}{3}x^3 \right|_{-2}^0 = \frac{16}{3}.$$

En consecuencia, el valor de la integral doble iterada es

$$\iint_D yx^2 dA = 2 \left(\frac{16}{3} \right) = \frac{32}{3}.$$

□

Ejemplo 1.13

Calcule la integral doble

$$\iint_D y^2 x^2 dA,$$

donde $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9 \wedge |y| \leq 2\}$.

Solución.

El dibujo de la región D se muestra en la figura y, es claro, que es simétrica respecto al eje Y , al eje X y al origen de coordenadas. Por otro lado, el integrando $f(x, y) = xy$ también es simétrica respecto a los tres, pues

$$f(-x, -y) = (-y)(-x) = yx = f(x, y).$$

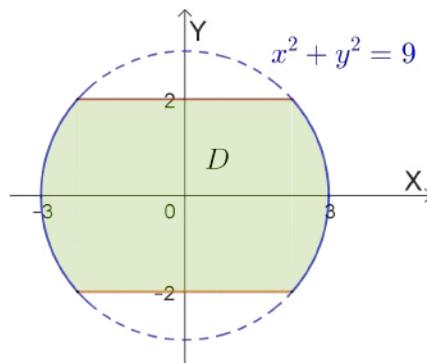


Figura 1.22: Región de integración del ejemplo 1.13

A causa de (1.25), la integral doble que modelada como

$$\iint_D yx^2 dA = 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} yx^2 dx dy.$$

Resolvemos la integral respecto de x :

$$\int_0^{\sqrt{9-y^2}} yx^2 dx = \left. \frac{1}{2} x^2 y \right]_0^{\sqrt{9-y^2}} = \frac{1}{2} y \left(\sqrt{9-y^2} \right)^2 = \frac{9}{2} y - \frac{1}{2} y^3.$$

Acto seguido, solventamos la integral definida para y :

$$\int_0^2 \left(\frac{9}{2}y - \frac{1}{2}y^3 \right) dy = \left[\frac{9}{4}y^2 - \frac{1}{8}y^4 \right]_0^2 = 7.$$

Para cerrar se tiene

$$\iint_D yx dA = 4(7) = 28.$$

□

1.3.1.1. Cambio de orden de integración

Cuando se evalúa una integral doble iterada con sus cuatro límites de integración constantes, cambiar el orden de integración, es consecuencia natural del teorema de Fubini dado en (1.8), siempre que los límites de la integración cambien correctamente.

El caso de una integral doble con límites variables que provienen o bien de una región del **tipo I** o del **tipo II**, el teorema de Fubini garantiza que plantear y resolver una integral doble iterada en cualquiera de los dos ordenes, $dx dy$ o $dy dx$, producirá el mismo resultado. Sin embargo, puede suceder que uno de los ordenes de integración genere una integral doble iterada más fácil de evaluar que el otro, es decir, en un determinado orden de integración, el integrando puede no tener una primitiva elemental.

En tales situaciones, invertir el orden de integración resultará útil y, con el fin de cristalizar nuestro propósito, se sugiere el siguiente algoritmo.

- 1 Dibuje la región de integración usando su representación analítica que se extraen de la integral doble iterada dada.
- 2 Si la región de integración es del **tipo I**, es decir, la integral doble iterada es de la forma (1.16), entonces trace la franja horizontal y encuentre los nuevos límites de integración para el orden $dx dy$.
- 3 Si la región de integración es del **tipo II**, es decir, la integral doble iterada es de la forma (1.17), entonces trace la franja vertical y encuentre los nuevos límites de integración para el orden $dy dx$.
- 4 Después de encontrar los nuevos límites, evalúe primero la integral interna y luego la integral externa.

Es nuestro deber advertir que, al poner en práctica la estrategia descrita, puede que se requiera dividir la región en varias partes lo cual dependerá de las curvas que limitan la región. En consecuencia, los límites de la integración cambiarán con el cambio en el orden de la integración y la integral doble iterada dada se expresará como la suma del número de integrales dobles con los límites modificados.

Por otro lado, a veces una región es tanto de tipo I como de tipo II. Sin embargo, esto no significa que

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_a^b f(x, y) dx dy$$

porque el lado derecho no tiene ningún sentido ya que no satisface el teorema de Fubini.

Más bien, la forma correcta de proceder es describir la región D de dos maneras diferentes, a saber

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \wedge \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, al aplicar el teorema de Fubini a esta situación se obtiene

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy. \quad (1.27)$$

Ejemplo 1.14

Calcule la siguiente integral dobles iterada

$$J = \int_1^e \int_{\ln y}^1 ye^{\cos x} dx dy.$$

Solución.

Para calcular esta integral doble se requiere cambiar el orden de integración, tal como se muestra a continuación: la región de integración queda expresada como

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq e \wedge \ln y \leq x \leq 1\}$$

y su representación gráfica se muestra en la figura adjunta. A continuación, modelamos la integral doble iterada con los nuevos límites de integración

$$J = \int_0^1 \int_1^{e^x} ye^{\cos x} dy dx.$$

Al resolver se tiene

$$\int_1^{e^x} ye^{\cos x} dy = e^{\cos x} \int_1^{e^x} y dy = e^{\cos x} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_1^{e^x} = \frac{1}{2} e^{\cos x} (e^{2x} - 1)$$

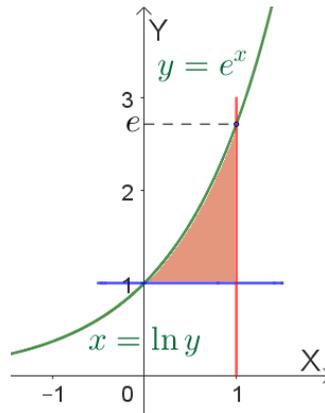


Figura 1.23: Región de integración del ejemplo 1.14

Finalmente

$$J = \int_0^1 \frac{1}{2} e^{\cos x} (e^{2x} - 1) dx = 2.292$$

□

Ejemplo 1.15

Un estudiante de Análisis Matemático III afirma que

$$\int_0^1 \int_{y^2}^1 x^2 y e^{x^2} dx dy = \int_a^b \int_{h(x)}^{q(x)} x^2 y e^{x^2} dy dx.$$

Según lo anterior, calcule el valor de $ah(b) - bq(a)$.

Solución.

En primer lugar, debemos graficar la región de integración de la integral doble iterada del lado izquierdo. Es decir, de $\int_0^1 \int_{y^2}^1 x^2 y e^{x^2} dx dy$ se tiene la representación analítica

$$D_1 = \{(x, y) / y^2 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$$

cuya gráfica se muestra en la figura 1.24. Al cambiar el orden de integración se tiene

$$D_2 = \{(x, y) / 0 \leq y \leq 1; 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

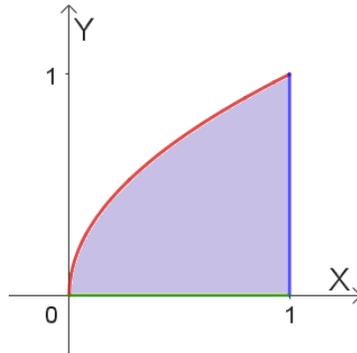


Figura 1.24: Región de integración del ejemplo 1.15

De

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} x^2 y e^{x^2} dy dx$$

se desprende que $a = 0$; $b = 1$; $h(x) = 0$; $q(x) = \sqrt{x}$.

Finalmente,

$$ah(b) - bq(a) = 0h(1) - 1q(0) = 0.$$

□

1.4 Cambio de variables en una integral doble

El objetivo del cambio de variables en una integral doble es allanar el camino para el cálculo de la integral $\iint_D f(x, y) dA$ cuando el integrando f o la región D son tales que resolver la integral no es una tarea sencilla.

Par el caso de una integral doble de una función de dos variables, el cambio de variables permite transformar la integral doble $\iint_D f(x, y) dA$, donde D es una región del plano XY , en otra integral doble $\iint_{D^*} F(u, v) dA^*$ con región de integración en el plano uv o UV y denotada por D^* .

Recordemos el teorema de cambio de variable en una integral definida de una función de una variable real.

Teorema 1.4 [Cambio de variable]

Sean la funciones $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con derivada integrable y $g([a, b]) \subset [c, d]$. Entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(t)) g'(t) dt.$$

Recuerde que en la integral definida de una función de una variable, el cambio de variable que se introduzca provoca un cambio en la función integrando y en los límites de integración.

En el caso materia de esta sección, el cambio de variables en una integral doble se torna más laborioso, ya que si se requiere remodelar la integral doble

$$\iint_D f(x, y) dA$$

debemos exhibir dos sustituciones, una para x y otra para y , a la que llamaremos transformación $T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(D^*) = D$.

Antes de plantear la fórmula que permite establecer una correspondencia⁴ entre una integral doble expresada en coordenadas cartesianas x e y sobre la región D del plano XY , es decir $\iint_D f(x, y) dA$, y otra integral doble $\iint_{D^*} F(u, v) dA^*$ definida

⁴Formalmente esta correspondencia es una transformación o función diferenciable que se define entre los conjuntos D y D^* de \mathbb{R}^2 .

sobre la región de integración D^* en el plano UV , gracias a las sustituciones correspondientes, es preciso examinar primero las relaciones que existen entre las regiones D del plano XY y D^* en el plano UV , del mismo modo que los integrandos $f(x, y)$ y $F(u, v)$.

Para que proceda la transformación T descrita anteriormente, consideremos las funciones

$$x = h_1(u, v) \text{ y } y = h_2(u, v), \tag{1.28}$$

donde las funciones continuas h_1 y h_2 que tienen derivadas continuas en la región D^* del plano UV tales que a cada par ordenado (u, v) de la región D^* del plano UV le corresponde un único par de valores (x, y) la región D del plano XY . Además, a partir de las ecuaciones dadas en (1.28) es plausible despejar u y v obteniendo las ecuaciones

$$u = g_1(x, y) \text{ y } v = g_2(x, y)$$

que favorecen transformar cada punto $P(x, y)$ de la región D del plano XY en un punto $P^*(u, v)$ de la región D^* en el plano UV .

A las coordenadas u y v se las denomina coordenadas curvilíneas del punto $P(x, y)$.

En resumen, el argumento anterior nos da a entender que las ecuaciones (1.28), llamadas ecuaciones de transformación, establecen una correspondencia biunívoca entre los puntos del conjunto D del plano XY y los puntos del conjunto D^* del plano UV que se representan gráficamente en la figura 1.25.

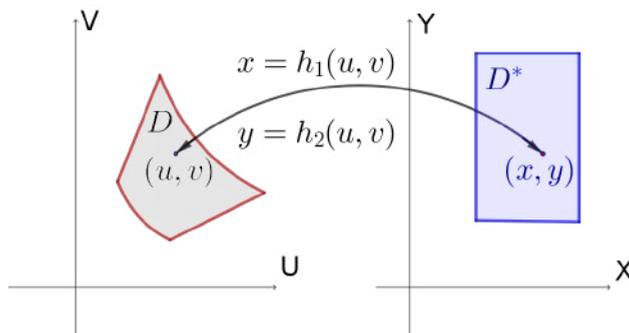


Figura 1.25: La transformación T

Debemos percatarnos que para el caso de las integrales dobles, la transformación de coordenadas o el cambio de variables no solo afectará al integrando sino que puede simplificar la geometría de la región de integración por consiguiente se necesita una medida de cómo la transformación distorsiona el área de la región. Esta medida está dada por el *determinante jacobiano*, que se define como sigue.

Definición 1.4 [Determinante jacobiano]

Sea $T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación de clase C^1 dada por^a

$$x = h_1(u, v) \text{ y } y = h_2(u, v).$$

El determinante jacobiano de T ,^b que se denota por $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, se define como

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (1.29)$$

^aDe clase C^1 significa que T derivadas continuas en una región D^* del plano UV

^bEs el determinante de la matriz derivada de T , es decir la matriz $DT(x, y)$.

A continuación enunciaremos el teorema de cambio de variables para integrales dobles, omitiendo la demostración del mismo que puede ser visualizada en Rudin, W. 1976, p.252-253.

Teorema 1.5

Sean D y D^* dos regiones de \mathbb{R}^2 y $T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación de clase C^1 . Si T es inyectiva y $T(D^*) = D$, entonces para cualquier $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ función integrable en $D \subset \mathbb{R}^2$ se tiene

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D^*} F(u, v) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA, \quad (1.30)$$

donde $F = f \circ T$ está dada por

$$F(u, v) = f(T(u, v)) = f(h_1(u, v), h_2(u, v)). \quad (1.31)$$

Es importante destacar que el determinante jacobiano debe satisfacer la condición de que $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ excepto, quizá, para un conjunto de medida nula.

En relación directa a la declaración emitida al inicio de esta sección, este teorema nos señala el camino que debemos seguir para establecer un procedimiento con el fin de ejecutar la transformación de coordenadas o el cambio de variables en una integral doble. En efecto, dada la interal doble $\iint_D f(x, y) dA$, donde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable en una región $D \subset \mathbb{R}^2$ del plano XY , se debe elegir con cuidado las

funciones continuas

$$h_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad y \quad h_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto x = h_1(u, v) \quad (u, v) \mapsto y = h_2(u, v)$$

que tengan derivadas parciales de primer orden continuas en D^* en el plano UV tales que la integral doble $\iint_{D^*} F(u, v) dA^*$ sea fácil de evaluar con el nuevo integrando $F(u, v) = f(h_1(u, v), h_2(u, v))$ y con la nueva región D^* .

Ejemplo 1.16

Calcule la integral doble $\iint_D x^2 y^2 dA$ si D es la región limitada por las gráficas de las curvas

$$y = 2x^2 ; y = x^2 ; xy = 4 \text{ y } xy = 1$$

Solución.

La región de integración D se aprecia en la figura 1.26.

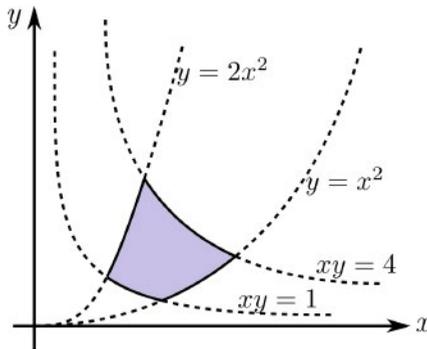


Figura 1.26: Región de integración del ejemplo 1.16

Al implementar el cambio de variable

$$u = xy \wedge v = \frac{y}{x^2}$$

la región queda transformada en la nueva región que, analíticamente se expresa como

$$D^* = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 4 \wedge 1 \leq v \leq 2\}$$

Luego, de

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{3}{x^2}y = 3v$$

y, en razón de (1.29), se obtiene el jacobiano que es igual a

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{3v}.$$

Luego, en concordancia con (1.30), se tiene

$$\iint_D x^2 y^2 dA = \int_1^2 \int_1^4 \frac{1}{3v} u^2 du dv.$$

Cuya resolución se muestra a a continuación:

$$\int_1^4 \frac{1}{3v} u^2 du = \frac{1}{3v} \int_1^4 u^2 du = \frac{1}{3v} \left[\frac{1}{3} u^3 \right]_1^4 = \frac{1}{3v} (21) = \frac{7}{v}.$$

Finalmente

$$\int_1^2 \frac{7}{v} dv = 7 \ln 2 \approx 4.852$$

□

Ejemplo 1.17

Dada la integral doble

$$\iint_D (y^2 - x^2)^{xy} (y^2 + x^2) dA,$$

donde D es la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $xy = 1$, $xy = 4$, $y^2 - x^2 = 1$ y la recta $y = x$.

- (a) Mediante el cambio de variables $u = xy$ y $v = y^2 - x^2$, represente gráficamente la región D en el plano dado UV .
- (b) Calcule el valor de la integral doble iterada.

Solución.

Tanto la región de integración D como la región D^* del plano UV que se obtiene gracias a la transformación $u = xy$ y $v = y^2 - x^2$, se aprecian en la figura 1.27.

Es claro que la representación analítica de la región D^* queda expresada como

$$D^* = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 4 \wedge 0 \leq v \leq 1\}.$$

Por otro lado, el jacobiano de la transformación resulta de

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -2x & 2y \end{vmatrix} = 2(y^2 + x^2),$$

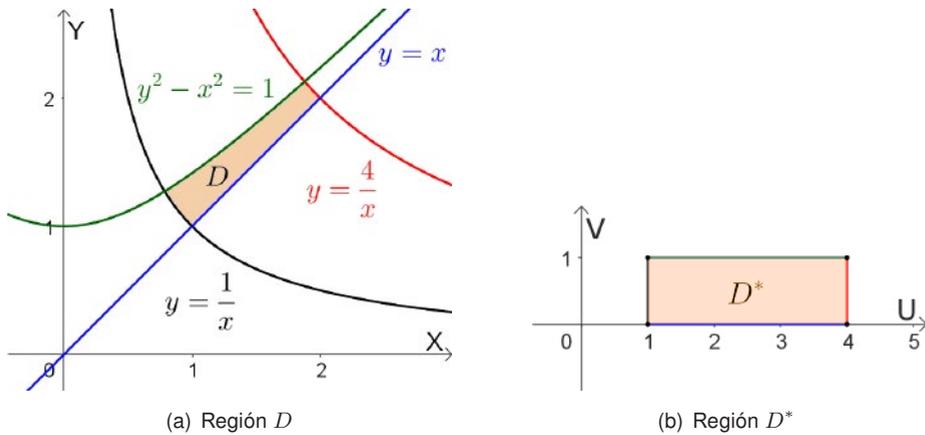


Figura 1.27: Región de integración del ejemplo 1.17

es decir, en virtud de (1.29) se tiene que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{2(y^2 + x^2)}.$$

Al sustituir este resultado, según (1.30), se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_D (y^2 - x^2)^{xy} (y^2 + x^2) dA &= \int_1^4 \int_0^1 v^u (y^2 + x^2) \frac{1}{2(y^2 + x^2)} dv du \\ &= \frac{1}{2} \int_1^4 \int_0^1 v^u dv du. \end{aligned}$$

El proceso de resolución de las integrales iteradas es como sigue:

$$\int_0^1 v^u dv = \left. \frac{v^{u+1}}{u+1} \right|_0^1 = \frac{1}{u+1}.$$

Para cerrar

$$\frac{1}{2} \int_1^4 \frac{1}{u+1} du = \left. \frac{1}{2} \ln(u+1) \right|_1^4 = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} \approx 0,458.$$

□

1.4.1. Integral doble en coordenadas polares

Uno de los cambio de variables más usados es la transformación a coordenadas polares, que pasamos a explicar.

Teorema 1.6

Considere la aplicación $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, donde $x(r, \theta) = r \cos \theta$ e $y(r, \theta) = r \sin \theta$ son funciones de clase C^1 en un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Sea D^* un subconjunto limitado y cerrado contenido en U tal que

- (i) la función T es inyectiva en D^* y
- (ii) el determinante jacobiano de la plicación T , definido por

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \quad (1.32)$$

siempre es no nulo en D^* . Si f es integrble en $T(D^*)$, entonces

$$\iint_{T(D^*)} f(x, y) dA = \iint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dA^*, \quad (1.33)$$

donde $dA^* = drd\theta$ o $dA^* = d\theta dr$ indica los dos órdenes de interacción posibles.

La gráfica 1.28 nos proporciona el procedimiento para determinar los límites de integración en el sistema de coordenadas polares.

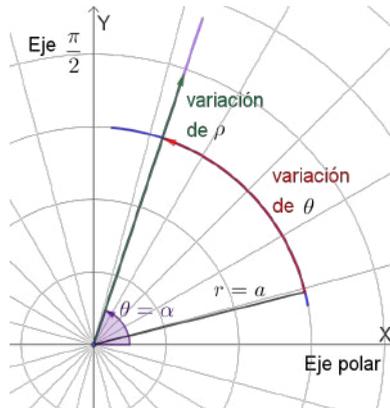


Figura 1.28: Límites de integración en coordenadas polares

La versión análoga, en el sistema de coordenadas polares, de una integral doble iterada sobre un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados queda estable-

cida cuando se considera la región cuya representación analítica es

$$D = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b \wedge \alpha \leq \theta \leq \beta\}. \tag{1.34}$$

Para esta región, la integral dada en (1.33) se vería como

$$\iint_{g(D^*)} f(x, y) dA = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr. \tag{1.35}$$

o

$$\iint_{g(D^*)} f(x, y) dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \tag{1.36}$$

La igualdad de los resultados que se obtengan de resolver (1.35) y (1.36) está garantizada por el teorema de Fubini.

La descripción gráfica de D , dada por (1.34), es la de una región limitada por las circunferencias $r = a$ y $r = b$, así como por los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ tal como se aprecia en la figura 1.29

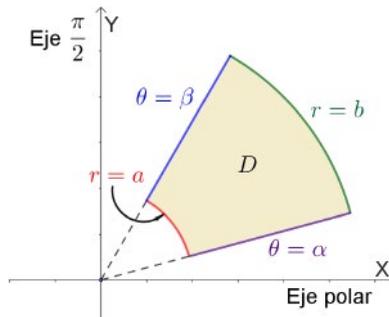


Figura 1.29: Región polar básica

Ejemplo 1.18

Dada la integral doble iterada

$$I = \int_0^2 \int_y^{\sqrt{8-y^2}} yx dx dy.$$

- a) Expresar I como una integral doble iterada en coordenadas polares.
- b) Calcular la integral doble modelada en el inciso anterior.

Solución.

La región de integración la ponemos a la vista en la figura 1.30 y su representación analítica en coordenadas polares es

$$D^* = \left\{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq \sqrt{8}; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

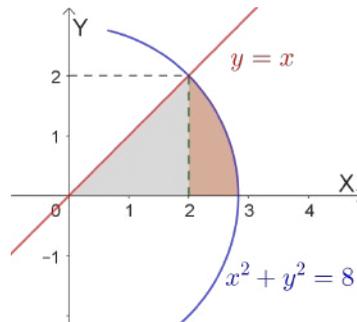


Figura 1.30: Región polar del ejemplo 1.18

En tanto que la integral doble se modela como

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_y^{\sqrt{8-y^2}} yx dx dy = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{8}} (r \operatorname{sen} \theta) (r \operatorname{cos} \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{8}} r^3 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta dr d\theta. \end{aligned}$$

Al calcular la integral con respecto de r se tiene

$$\int_0^{\sqrt{8}} r^3 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta dr = \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta \int_0^{\sqrt{8}} r^3 dr = \left. \frac{1}{4} r^4 \right|_0^{\sqrt{8}} = 16 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta$$

Al evaluar la integral con respecto de θ se obtiene

$$\int_0^{\pi/4} 16 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta d\theta = 4.$$

□

De la misma forma que se establecieron dos tipos de regiones de integración para las integrales dobles definidas en el sistema de coordenadas cartesianas, en el sistema de coordenadas polares también podemos distinguir dos categorías de regiones para el cálculo de integrales dobles iteradas.

Región del tipo I

Una **región del tipo I** o **región en la dirección de r** tiene la característica de que es un subconjunto D del plano polar en el que la variable r varía en función de θ y, esta última, varía entre valores constantes de θ , es decir

$$D = \{(r, \theta) : h(\theta) \leq r \leq \kappa(\theta) \wedge \alpha \leq \theta \leq \beta\}, \quad (1.37)$$

donde α y β son constantes reales y las funciones $h(\theta)$ y $\kappa(\theta)$ son continuas en el intervalo $[\alpha, \beta]$.

La representación gráfica de este tipo de regiones se aprecia en la figura

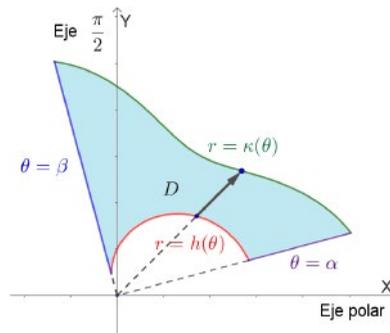


Figura 1.31: Región polar del tipo I

De acuerdo con lo anterior, para calcular la integral doble (1.33) se procede como sigue

$$\iint_{g(D^*)} f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h(\theta)}^{\kappa(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \quad (1.38)$$

Ejemplo 1.19

Considere la región D del plano XY que es interior a la curva $x^2 + y^2 = 4y$ y exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Calcule la integral

$$\iint_D x^2 dA.$$

Solución.

Expresamos las circunferencias en coordenadas polares. En efecto, $x^2 + y^2 = 4y$ equivale a $r = 4 \sin \theta$ y $x^2 + y^2 = 4$ equivale a $r = 2$. Para determinar los límites de integración, procedemos a interseccionar ambas curvas.

$$4 \operatorname{sen} \theta = 2 \leftrightarrow \theta = \frac{1}{6}\pi \vee \theta = \frac{5}{6}\pi.$$

Así, la representación analítica de la región es

$$D^* = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{6}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi \wedge 2 \leq r \leq 4 \operatorname{sen} \theta \right\}.$$

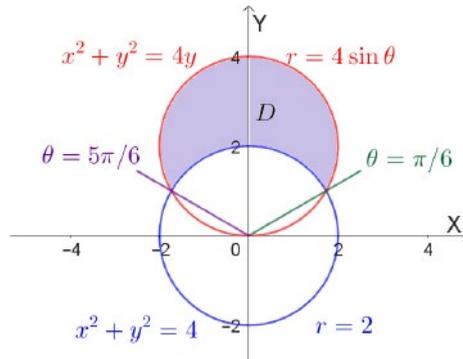


Figura 1.32: Región polar del ejemplo 1.19

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dA &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_2^{4 \operatorname{sen} \theta} r (r \cos \theta)^2 dr d\theta \\ &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_2^{4 \operatorname{sen} \theta} r^3 \cos^2 \theta dr d\theta. \end{aligned}$$

Primero calculamos

$$\begin{aligned} \int_2^{4 \operatorname{sen} \theta} r^3 \cos^2 \theta dr &= \cos^2 \theta \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_2^{4 \operatorname{sen} \theta} = \cos^2 \theta \left[\frac{1}{4} \left((4 \operatorname{sen} \theta)^4 - 2^4 \right) \right] \\ &= \cos^2 \theta (64 \operatorname{sen}^4 \theta - 4). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\iint_D x^2 dA = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos^2 \theta (64 \operatorname{sen}^4 \theta - 4) d\theta = 9.385.$$

□

Región del tipo II

Una **región del tipo II** o **región en la dirección de θ** tiene el atributo de que queda expresado como sigue

$$D = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b \wedge \zeta(r) \leq \theta \leq \gamma(r)\}, \tag{1.39}$$

donde a y b son constantes reales y las funciones $\zeta(r)$ y $\gamma(r)$ son continuas en $[a, b]$.

Queda claro que, en este caso θ varía en función de r y la variable r encaja entre las constantes a y b , justo como se percibe en el gráfico

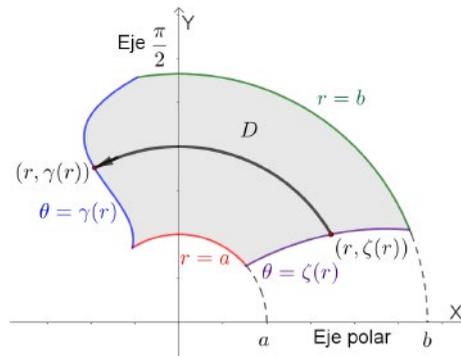


Figura 1.33: Región del tipo II

Por lo tanto, la integral doble (1.33) queda expresada como sigue

$$\iint_{g(D^*)} f(x, y) dA = \int_a^b \int_{\zeta(r)}^{\gamma(r)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr. \tag{1.40}$$

Ejemplo 1.20

La región D , ubicada en el primer cuadrante, está limitada por las gráficas de

$$x^2 + y^2 = 4; \quad r = 4 \sin \theta \text{ y } r = 2 + 2 \sin \theta.$$

- a) Esboce la gráfica de la región D .
- b) Modele la integral doble

$$\iint_D x dA$$

como una integral doble iterada en coordenadas polares en el orden $d\theta dr$.

- c) Calcule el valor de la integral doble obtenida en el inciso anterior.

Solución.

El dibujo de la región D lo visualizamos en la figura 1.34.

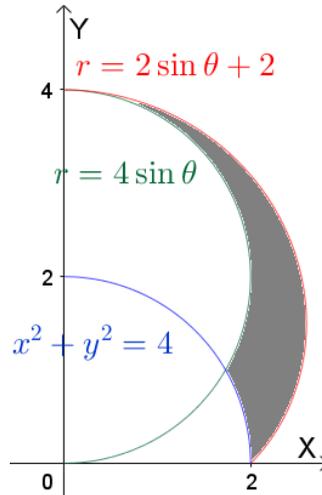


Figura 1.34: Región polar del ejemplo 1.20

Para determinar los límites de r , observe que la región puede acortarse por las circunferencias $r = 2$ y $r = 4$, por tal motivo $2 \leq r \leq 4$. Por otro lado, en relación a la variable θ , nos percatamos que los segmentos de circunferencias trazados en sentido antihorario inician su recorrido en $r = 2 \sin \theta + 2$ y lo finalizan en $r = 4 \sin \theta$, por ello es que

$$\arcsen\left(\frac{r-2}{2}\right) \leq \theta \leq \arcsen\left(\frac{r}{4}\right).$$

Con ello, la integral doble se modela como la siguiente integral doble iterada

$$\iint_D x dA = \int_2^4 \int_{\arcsen\left(\frac{r-2}{2}\right)}^{\arcsen\left(\frac{r}{4}\right)} (r \cos \theta) r d\theta dr = \int_2^4 \int_{\arcsen\left(\frac{r-2}{2}\right)}^{\arcsen\left(\frac{r}{4}\right)} r^2 \cos \theta d\theta dr.$$

Evaluamos la integral definida respecto de θ :

$$\begin{aligned} \int_{\arcsen\left(\frac{r-2}{2}\right)}^{\arcsen\left(\frac{r}{4}\right)} r^2 \cos \theta d\theta &= r^2 \left[\sen \theta \right]_{\arcsen\left(\frac{r-2}{2}\right)}^{\arcsen\left(\frac{r}{4}\right)} \\ &= r^2 \left(\frac{r}{4} - \frac{r-2}{2} \right) = r^2 - \frac{1}{4} r^3. \end{aligned}$$

Por último

$$\int_2^4 \left(r^2 - \frac{1}{4} r^3 \right) dr = \left[\frac{1}{3} r^3 - \frac{1}{16} r^4 \right]_2^4 = \frac{11}{3}.$$

□

En ciertas circunstancias la región de integración no es del tipo I ni II, por lo que no es plausible expresar la integral doble iterada en coordenadas polares en las formas dadas por (1.38) y (1.40). Para sortear este obstáculo, se procede a dividir dicha región en subregiones que encajen en los tipos descritos previamente con el auxilio de las curvas coordenadas del sistema polar, y en virtud de la propiedad de **Aditividad** dada en [IntDob3] podrá calcularse la integral doble dada.

La primera de estas situaciones ocurre cuando en una región en la dirección de r , dada por (1.37), una de las funciones $r = h(\theta)$ o $r = \kappa(\theta)$ no puede ser denotada por una expresión analítica para todo los valores de $\theta \in [\alpha, \beta]$; es decir, si $\theta_1 \in [\alpha, \beta]$ y

$$h(\theta) = \begin{cases} h_1(\theta) & , \alpha \leq \theta \leq \theta_1 \\ h_2(\theta) & , \theta_1 \leq \theta \leq \beta \end{cases} \quad \text{o} \quad \kappa(\theta) = \begin{cases} \kappa_1(\theta) & , \alpha \leq \theta \leq \theta_1 \\ \kappa_2(\theta) & , \theta_1 \leq \theta \leq \beta \end{cases}$$

entonces la integral doble (1.38) viene dada por

$$\iint_{g(D^*)} f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\theta_1} \int_{h_1(\theta)}^{\kappa(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta + \int_{\theta_1}^{\beta} \int_{h_2(\theta)}^{\kappa(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \tag{1.41}$$

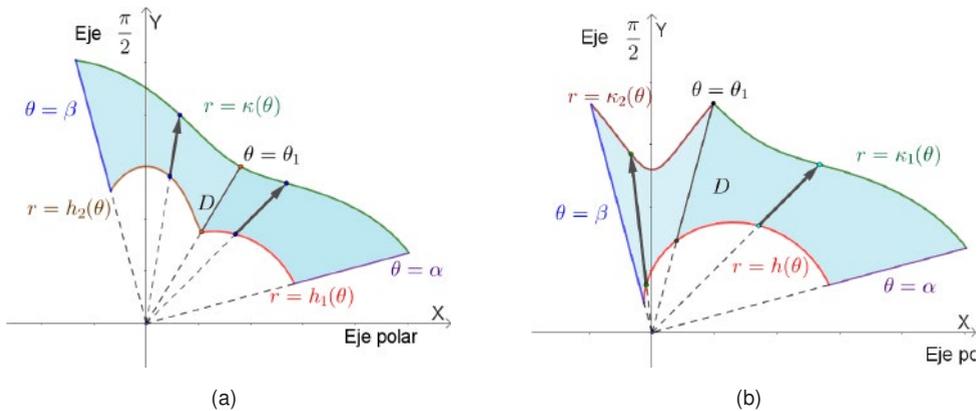


Figura 1.35: Partición de la región polar tipo I

Ejemplo 1.21

Una región D del plano está limitada por las curvas de ecuaciones

$$r = 4 - 8 \sin \theta ; \quad x^2 + y^2 = -4x ; \quad x^2 + y^2 = 16.$$

Si se usa el orden de integración $drd\theta$, determine y exhiba la cantidad mínima de integrales dobles iteradas que se necesitan para modelar la integral doble

$$\iint_D f(x, y) dA.$$

Solución.

El dibujo de la región D la observamos en la figura adjunta.

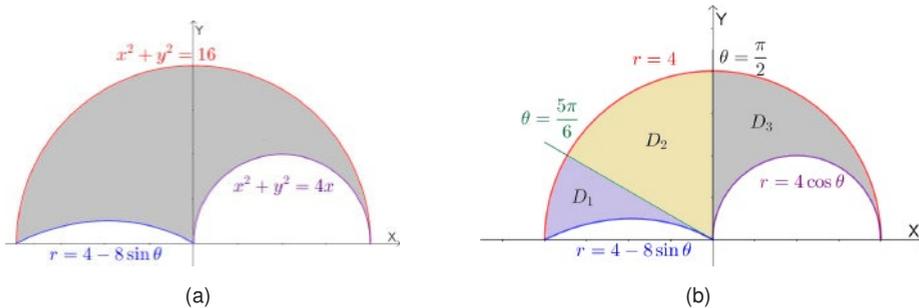


Figura 1.36: Región polar del ejemplo 1.21

Observe que la tangente en el polo de $r = 4 - 8 \sin \theta$ se obtienen de

$$r = 4 - 8 \sin \theta = 0 \leftrightarrow \theta = \frac{1}{6}\pi; \frac{5}{6}\pi; \dots$$

Esto implica que si tabulamos $r = 4 - 8 \sin \theta$, para $\theta \in \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ se obtiene la región

$$D_1 = \left\{ \frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \pi \wedge 4 - 8 \sin \theta \leq r \leq 4 \right\}$$

Esto lleva a que D_2 está delimitada para $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$, es decir

$$D_2 = \left\{ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} \wedge 0 \leq r \leq 4 \right\}$$

Finalmente, D_3 resulta de tabular $x^2 + y^2 = 4x \leftrightarrow r = 4 \cos \theta$ para $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, esto es

$$D_3 = \left\{ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \wedge 4 \cos \theta \leq r \leq 4 \right\}$$

En consecuencia se requieren como mínimo tres (3) integrales doble iteradas en el orden de integración $drd\theta$.

□

Una segunda eventualidad acontece cuando en una región del tipo (1.39), una de las funciones $\theta = \zeta(r)$ o $\theta = \gamma(r)$ no es factible de ser formulada por una expresión analítica para todo los valores de $r \in [a, b]$. Esto significa que, si $k_5 \in [a, b]$ y

$$\zeta(r) = \begin{cases} \zeta_1(r) & , a \leq r \leq k_5 \\ \zeta_2(r) & , k_5 \leq r \leq b \end{cases} \quad \text{o} \quad \gamma(r) = \begin{cases} \gamma_1(r) & , a \leq r \leq k_5 \\ \gamma_2(r) & , k_5 \leq r \leq b \end{cases}$$

entonces la interal doble (1.40) viene dada por

$$\iint_{g(D^*)} f(x, y) dA = \int_a^{k_5} \int_{\zeta_1(r)}^{\gamma(r)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr + \int_{k_5}^b \int_{\zeta_2(r)}^{\gamma(r)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr. \tag{1.42}$$

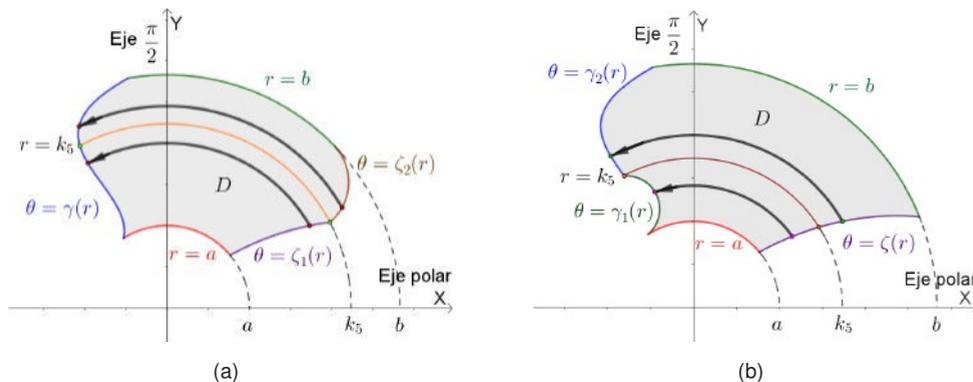


Figura 1.37: Partición de la región polar tipo II

1.4.2. Problemas propuestos

1.1 Calcule las siguientes integrales dobles

a) $\iint_D (5x + 2y) dA$, donde $D = [0, 2] \times [0, 1]$.

b) $\int_{-1}^4 \int_1^4 \frac{y|x^2 - 9x|}{y + \sqrt{y}} dy dx$.

c) $\int_0^{\pi/2} \int_{1/e}^e |\operatorname{sen} y - 1| \operatorname{sen}(\ln x) dx dy$.

d) $\int_{-1}^0 \int_0^1 (1 - x^2) dy dx$.

e) $\int_0^1 \int_2^4 \frac{y^2 - 2x + 1}{(y - 1)^2} dy dx$

1.2 Calcule las siguientes integrales iteradas.

a) $\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} (y \operatorname{sen} x + x \cos y) dx dy$.

d) $\int_{-2}^2 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{y+1}e^x}{y+3} dy dx$

b) $\int_0^2 \int_{-1}^1 (16 - x^2 - 2y^2) dy dx$.

e) $\int_0^1 \int_{-e}^e \left[y \arctan\left(\frac{1}{1+y^2}\right) \right] dx dy$.

c) $\int_0^2 \int_1^{17/5} (4 - y^2)x \ln^2 x dx dy$.

f) $\int_0^{\pi/3} \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sec^2 y \tan^2 x e^{\tan y} dy dx$.

1.3 Calcule las siguientes integrales dobles

a) $\int_0^4 \int_{x/2}^x (x + y) dy dx$.

b) $\int_1^4 \int_{1/y}^{0,25(5-y)} (x^2 + y^2) dx dy$.

c) $\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \int_{4y^2}^{\sqrt{12-4y^2}} 5x dx dy$.

d) $\int_{0,25}^{0,75} \int_{\sqrt{4-x}}^{1+4x} \frac{1+4x+y}{3} dy dx$.

e) $\iint_D (x^3 + 3y) dA$, donde $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2 \wedge x^2 \leq y \leq 2x\}$.

f) $\iint_D xy dA$, donde $D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 8 \wedge \frac{x^2}{8} \leq y \leq 2\sqrt{2x} \right\}$.

1.4 Calcule las siguientes integrales iteradas.

a) $\int_0^{\pi/2} \int_y^{\pi/2} (x^3 y + x \cos x) dx dy$.

d) $\int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - xy - 2yx^2) dy dx$.

b) $\int_{-2}^1 \int_x^{2-x^2} y^2 (2x^2 + y) dy dx$.

e) $\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} xy e^{x+y} dy dx$.

c) $\int_0^2 \int_{y/2}^y \frac{x^2 y}{\sqrt{x^3 + y^3}} dx dy$.

f) $\int_0^1 \int_{\frac{2}{\pi} \arcsen y}^{\sqrt{y}} x^3 y^2 dx dy$.

1.5 Cambie el orden de integración y calcule las siguientes integrales iteradas

a) $\int_0^4 \int_y^4 \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$.

b) $\int_0^{\pi/2} \int_x^{\pi/2} \frac{\sen y}{y} dy dx$.

c) $\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x + y) dx dy$.

d) $\int_0^4 \int_{x^2/4}^{8-x} xy dx dy$.

e) $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}} dy dx$.

f) $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dx dy$.

g) $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sen(y^2 + x^2) dx dy$.

h) $\int_0^4 \int_{2\sqrt{x}}^4 \frac{y^2}{\sqrt{y^4 - 16x^2}} dy dx$.

1.6 Cambie el orden de integración y calcule las siguientes integrales

$$a) \int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^3} dx dy.$$

$$d) \int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \tan(y^3) dy dx.$$

$$b) \int_1^e \int_{\ln y}^1 \operatorname{sen}(e^x) dx dy.$$

$$e) \int_0^2 \int_{x^4-2}^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4+y^2} dy dx.$$

$$c) \int_{1/2}^6 \int_{-4}^{2y-5} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy.$$

$$f) \int_0^3 \int_{4x/3}^{\sqrt{25-x^2}} x^3 \tan(y^3) dy dx.$$

1.7 Si al expresar la integral doble iterada

$$\int_0^1 \int_y^4 \frac{x}{x^2+y^2} dx dy$$

en coordenadas polares se obtiene

$$\int_0^\alpha \int_0^{g(\theta)} f(\theta) r dr d\theta = m\pi,$$

calcule el valor de $g(\alpha) + mf(\alpha)$.

1.8 Sea la integral doble iterada

$$\int_{-4}^4 \int_0^{\sqrt{16-y^2}} (x^2+y^2)^{3/2} dx dy$$

expresela como una integral doble iterada en coordenadas polares y luego calcule su valor.

1.9 Si $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}\}$, $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}}$ y

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_\alpha^\beta \int_0^{g(\theta)} r^m h(\theta) r dr d\theta,$$

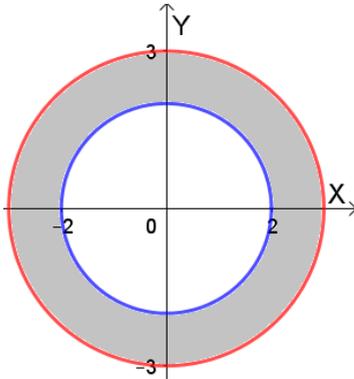
entonces, calcule el valor de

$$\int_\alpha^\beta mh(\theta)g(\theta)d\theta.$$

1.10 Para cada una de las siguientes regiones sombreada D , exprese la integral doble correspondiente como una integral doble iterada en coordenadas polares y luego

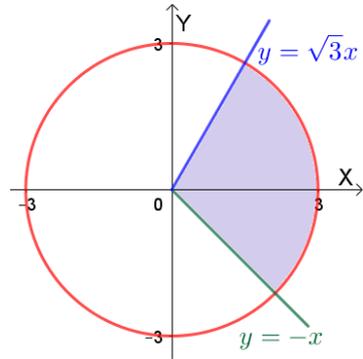
calcule su valor.

a)



$$\iint_D (1 + 2x^2y^2) dA$$

b)



$$\iint_D (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dA$$

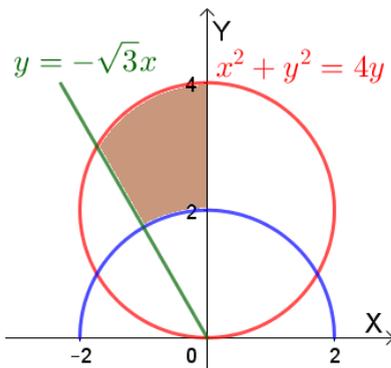
1.11 Si se cumple que

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx = \int_{k\pi}^{p\pi} \int_0^b r^n dr d\theta = k\pi,$$

entonces el valor de $E = \frac{k+p}{n}$ es

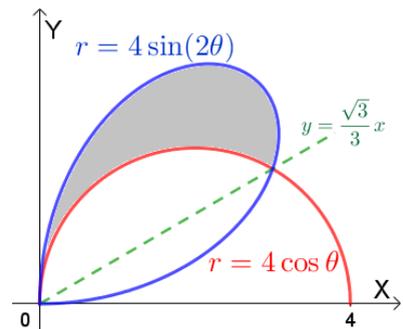
1.12 Para cada región sombreada R , escriba la integral doble correspondiente como una integral doble iterada en coordenadas polares en el orden $drd\theta$ y luego calcule su valor.

a)



$$\iint_R \ln(x^2 + y^2) dA$$

b)



$$\iint_R (x^2 + y^2) dA$$

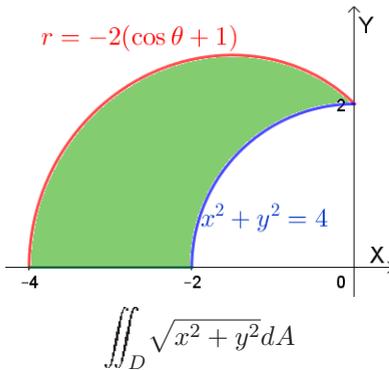
1.13 Si $a > 0$ y se cumple que

$$\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} x^2 dy dx = \int_0^{k\pi} \int_0^{f(\theta)} r^n \cos^m \theta dr d\theta = p\pi a^4,$$

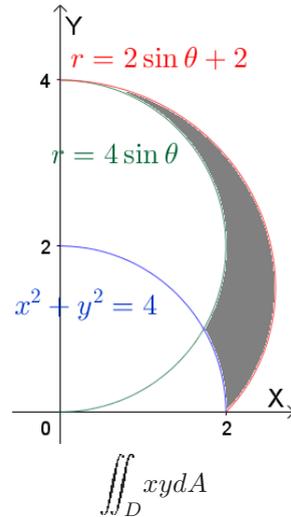
calcule el valor de $F = f(k\pi) - pf(m\pi)$.

1.14 Para cada región sombreada D , escriba la integral doble correspondiente como una integral doble iterada en coordenadas polares en el orden $d\theta dr$ y luego calcule su valor.

a)



b)



1.15 Calcule la integral doble

$$\iint_D 2\pi (x^2 - y^2) \operatorname{sen}(\pi(x - y)^2) dA,$$

donde $D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$.

1.16 Calcule la siguiente integral doble

$$\iint_D xy dA.$$

donde D es la región limitada por $x = 2y$, $x = 2y - 4$, $x + y = 4$ y $x + y = 1$.

1.17 La región D del plano está limitada por las rectas $x = 2y$, $x = 2y - 4$, $x + y = 4$ y $x + y = 1$. Calcule la integral doble

$$\iint_D 3xy dA.$$

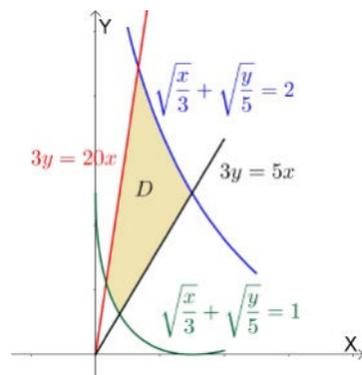
1.18 Sea D la porción acotada del primer cuadrante situada entre las dos hipérbolas $xy = 1$ y $xy = 2$ y las rectas $y = x$ e $y = 4x$. Calcule el valor de la integral

$$\iint_D x^2 y^2 dA.$$

1.19 Calcule la integral doble

$$\iint_D \frac{e^{xy}}{y^2} dA,$$

donde la región D , del primer cuadrante, se muestra la figura adjunta.



1.20 Calcule la integral doble

$$\iint_D (2x + y)^{-3} e^{\frac{x-2y}{2x+y}} dA.$$

donde D es la región acotada por $2x + y = 1$, $2x + y = 4$, $x - 2y = -1$ y $x - 2y = 1$.

1.21 La región D está limitada por $y = x$, $y = x - 4$, $y = 3$ y el eje X . Calcule la integral doble

$$\iint_D (x - y - 1) y dA.$$

1.22 Calcule la integral doble

$$\iint_D (2x + y)^2 dA.$$

donde D es el paralelogramo de vértices $(1, 1)$, $(0, 2)$, $(3, 2)$ y $(2, 3)$.

1.5 Aplicaciones de la integral doble

En esta sección mostraremos algunas aplicaciones de la integral doble, ya sea para calcular la áreas y volúmenes de innumerables regiones limitadas en el plano, o incluso para calcular masa, Centro de masa y momento de inercia en el área de física.

1.5.1. La integral doble como el área de la región de integración

Un caso particular que merece nuestra atención discutir resulta si en la definición de la integral doble

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta A,$$

se considera $f(x, y) = 1$.

De este supuesto discurre que $f(c_{jk}) = 1$ en cada uno de los puntos arbitrarios c_{jk} elegidos en cada subrectángulo $[x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ y la expresión $\sum_{j,k=0}^{n-1} \Delta A$ representa la suma de las áreas de cada una de las subregiones que resultaron de la partición $P_1 \times P_2$. De lo anterior se obtiene una aproximación del área de la región D , luego el valor exacto del área de dicha región se calcula como

$$A(D) = \iint_D dA = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta A. \quad (1.43)$$

Así, si se desea calcular el área de una región D en el plano, basta con tomar como integrando $f(x, y) = 1$ y como región de integración la región cuya área se desea calcular.

Ejemplo 1.22

Calcule el área de la región limitada por las gráficas de $x = y^3 - y$ y $x = 1 - y^4$.

Solución.

Para determinar las coordenadas de los punto de intersección se obtienen al resolver la ecuación

$$y^3 - y = 1 - y^4 \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 1.$$

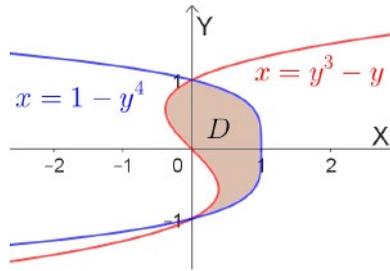


Figura 1.38: Región del ejemplo 1.22

Con esto, la expresión analítica de la región es

$$D = \{(x, y) : -1 \leq y \leq 1 \wedge y^3 - y \leq x \leq 1 - y^4\}.$$

A continuación, modelamos la integral doble iterada y calculamos el área de la región

$$\begin{aligned} A(D) &= \int_{-1}^1 \int_{y^3 - y}^{1 - y^4} dx dy = \int_{-1}^1 [(1 - y^4) - (y^3 - y)] dy \\ &= \int_{-1}^1 (-y^4 - y^3 + y + 1) dy \\ &= \left[-\frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2 + y \right]_{-1}^1 = \frac{8}{5} u^2. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.23

El diseño y las dimensiones de una placa plana de metal se ubican en el primer cuadrante del plano XY , donde las unidades en los ejes se miden en pulgadas. Si dicha placa adopta la forma de la región limitada por las curvas de ecuaciones

$$y = 4 - (x - 2)^2; \quad x = 2y \text{ y } x = 3$$

y el costo del recubrimiento anticorrosivo se cotiza en 6,15 soles por pulgada cuadrada, determine el monto total a pagar por pintar ambas caras de 50 placas metálicas.

Solución.

La gráfica de la placa en el plano XY se observa en la figura 1.39, cuya representación analítica es

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3 \wedge \frac{x}{2} \leq y \leq 4 - (x - 2)^2\}.$$

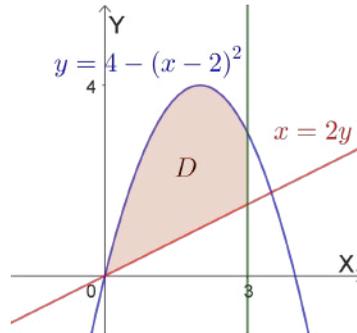


Figura 1.39: Región del ejemplo 1.23

Con esto se calcula el área de una de las placas metálicas.

$$\begin{aligned}
 A(D) &= \int_0^3 \int_{x/2}^{4-(x-2)^2} dy dx = \int_0^3 \left(4 - (x-2)^2 - \frac{x}{2} \right) dx \\
 &= \int_0^3 \left(\frac{7}{2}x - x^2 \right) dx = \left[\frac{7}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 \\
 &= \frac{27}{4}.
 \end{aligned}$$

Esto significa que una placa metálica ocupa un área de $\frac{27}{4}$ plg², por consiguiente el costo total que debe pagar por pintar ambas caras de 50 placas es

$$C = 50 \times 2 \times \frac{27}{4} \times 6,15 = 4151.3 \text{ soles.}$$

□

1.5.1.1. Cálculo de áreas en coordenadas polares

En el apartado anterior quedó establecido que el área de una región plana en coordenadas cartesianas se calcula con la integral doble dada en (1.43). Al transformar esta integral doble al sistema de coordenadas polares, en razón de (1.33) se obtiene

$$A(R) = \iint_{D^*} \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} dA^*.$$

Por otro lado, usando (1.32) se consigue que

$$A(R) = \iint_{D^*} r dA^*, \quad (1.44)$$

donde $dA^* = drd\theta$ o $dA^* = d\theta dr$ indica los dos órdenes de interacción posibles y D^* representa la expresión analítica de la región D en coordenadas polares, según el orden de integración elegido.

Ejemplo 1.24

En la figura 1.40 se muestra la región D del plano que está limitada por las curvas de ecuaciones

$$y = -\sqrt{3}x ; x^2 + y^2 = 4y ; x^2 + y^2 = 4.$$

Calcule el área de la región D .

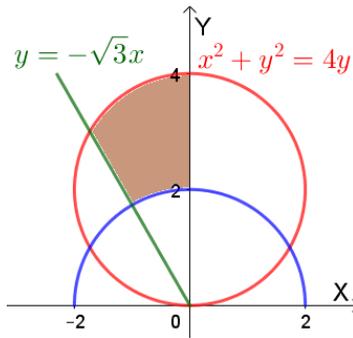


Figura 1.40: Región D del ejemplo 1.24

Solución.

En vista de que la región está delimitada por circunferencias, es plausible efectuar el planteamiento en coordenadas polares. Para ello, en primer lugar, observemos que la pendiente de la recta $y = -\sqrt{3}x$ es $\tan \theta = -\sqrt{3}$, por tanto $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

En segundo lugar, la versión polar de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4y$ es

$$x^2 + y^2 = 4y \leftrightarrow r^2 = 4rk\theta \leftrightarrow r = 4 \text{ sen } \theta,$$

en tanto que $x^2 + y^2 = 4$ equivale a $r = 2$.

Con estos datos, mostramos la representación analítica de la región D ,

$$D = \left\{ (r, \theta) : \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \wedge 2 \leq r \leq 4 \text{ sen } \theta \right\}$$

y el área resulta de resolver la integral doble

$$A(D) = \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \int_2^{4 \text{ sen } \theta} r dr d\theta.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \int_2^{4 \operatorname{sen} \theta} r dr &= \left. \frac{1}{2} r^2 \right|_2^{4 \operatorname{sen} \theta} = \frac{1}{2} \left((4 \operatorname{sen} \theta)^2 - 2^2 \right) \\ &= 8 \operatorname{sen}^2 \theta - 2. \end{aligned}$$

Luego

$$A(D) = \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (8 \operatorname{sen}^2 \theta - 2) d\theta = 2.779u^2$$

□

Ejemplo 1.25

En la figura 1.41 se muestra la región D del plano que está limitada por las curvas de ecuaciones

$$r = 1 + \cos \theta; \quad x^2 + y^2 = 1; \quad r = 2 \cos(2\theta).$$

Utilizando **una sola** integral doble iterada, calcule el área de la región D .

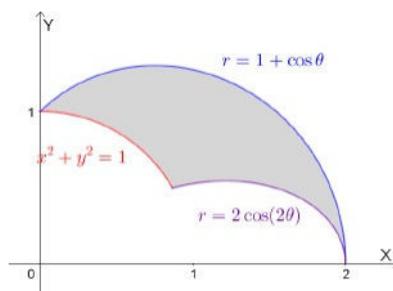


Figura 1.41: Región D del ejemplo 1.25

Solución.

Para cumplir con la indicación “**una sola** integral doble iterada” se integra con el orden de integración $d\theta dr$ y para ello observe la figura 1.42. En ella, puede percatarse que la región se puede acotar por las circunferencias $r = 1$ y $r = 2$; en tanto que el ángulo θ , trazado en sentido anti horario, varía desde $r = 2 \cos(2\theta)$ la curva hasta $r = 1 + \cos \theta$.

Por lo tanto, la representación analítica de D es

$$D = \left\{ (r, \theta) / 1 \leq r \leq 2 \wedge \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{r}{2}\right) \leq \theta \leq \arccos(r-1) \right\}$$

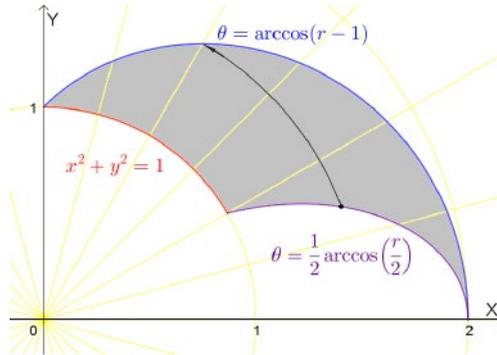


Figura 1.42: Región D con los límites para el orden $d\theta dr$

En consecuencia, el área de la región D se obtiene de resolver la integral doble iterada

$$\begin{aligned}
 A(D) &= \int_1^2 \int_{\frac{1}{2} \arccos\left(\frac{r}{2}\right)}^{\arccos(r-1)} r d\theta dr \\
 &= \int_1^2 r \left(\arccos(r-1) - \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{r}{2}\right) \right) dr \\
 &= \int_1^2 r \arccos(r-1) dr - \int_1^2 \frac{r}{2} \arccos\left(\frac{r}{2}\right) dr \\
 &= 1.392 - 0.478 = 0.914 \text{ u}^2.
 \end{aligned}$$

□

1.5.2. Valor promedio de una función

Es conocido por todos que, si x_1, x_2, \dots, x_n son n números, su promedio aritmético o simplemente promedio está definido por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Este concepto puede definirse de manera más geeral como veremos a continuación.

Definición 1.5 [Valor promedio]

El valor promedio de una función integrable $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sobre la región D se define como el cociente de la integral doble y el área de la región D , es decir

$$f_{prom} = \frac{\iint_D f(x, y) dA}{\iint_D dA} = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x, y) dA. \quad (1.45)$$

Cuando la función continua f está definida sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, la fórmula anterior se convierte en

$$f_{prom} = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \iint_R f(x, y) dA. \quad (1.46)$$

En términos físicos, si consideramos la función $f(x, y)$ como la superficie de un líquido contenido dentro de un recipiente cilíndrico con base D y $z \geq 0$, entonces, después de un tiempo, el líquido contenido en ese recipiente alcanzará una altura igual al valor promedio de la función sobre D .

Ejemplo 1.26

Determine el valor promedio de la función $f(x, y) = xy$ que está definida sobre la región D , del primer cuadrante, limitada por las gráficas de $2y = x^2$, $x = 0$ y $x + 2y = 6$.

Solución.

El dibujo de la región se pone a la vista en la figura 1.43

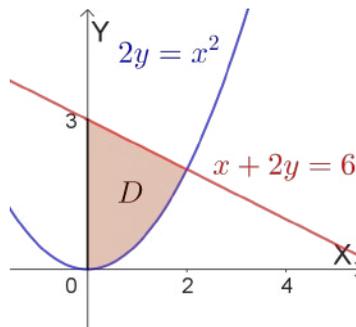


Figura 1.43: Región D del ejemplo 1.26

de donde se obtiene

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 2 \wedge \frac{x^2}{2} \leq y \leq \frac{6-x}{2} \right\}.$$

Como paso inicial, calculamos el área de la región D .

$$\begin{aligned} A(D) &= \int_0^2 \int_{x^2/2}^{\frac{6-x}{2}} dy dx = \int_0^2 \left(\frac{6-x}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3x \right]_0^2 = \frac{11}{3} \text{ u}^2. \end{aligned}$$

En la segunda del cálculo, evaluamos la integral doble de f sobre la región D , es decir

$$\iint_D f(x, y) = \int_0^2 \int_{x^2/2}^{\frac{6-x}{2}} xy dy dx.$$

En tercer lugar, calculamos la integral respecto de y .

$$\begin{aligned} \int_{x^2/2}^{\frac{6-x}{2}} xy dy &= \left. \frac{x}{2} y^2 \right]_{x^2/2}^{\frac{6-x}{2}} = \frac{x}{2} \left(\left(\frac{6-x}{2} \right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 \right) \\ &= -\frac{1}{8}x^5 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x. \end{aligned}$$

A continuación calculamos la integral respecto de x . En efecto,

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(-\frac{1}{8}x^5 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x \right) dx &= \left[-\frac{1}{48}x^6 + \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{25}{6} \end{aligned}$$

Finalmente, el valor promedio de f es

$$f_{prom} = \frac{\frac{25}{6}}{\frac{11}{3}} = \frac{25}{22}.$$

□

1.5.3. Masa de una lámina plana

Conviene destacar que una serie de problemas de la física e ingeniería encuentran su solución mediante el uso de las integrales dobles, como por ejemplo la masa, centro de masa y los momentos de inercia. En particular, abordaremos estos conceptos relacionados a una lámina delgada plana, de espesor despreciable, que ocupa una región D del plano XY . En principio asumiremos que la masa está distribuida sobre esta

lámina con densidad superficial conocida que se mide en unidades de masa por unidades de área, o sea, existe una función positiva definida en D tal que $\rho(x, y)$ representa la masa por unidad de área en cada punto (x, y) .

Si la función la densidad superficial ρ varía de punto a punto y ρ es integrable sobre D , vía las sumas de Riemann, se concluye que la masa de la lámina se calcula mediante la fórmula

$$m = \iint_D \rho(x, y) dA. \quad (1.47)$$

Si se diera el caso que la lámina está fabricada de un material homogéneo, es decir de densidad constante, la masa total de la lámina es numéricamene igual al producto de la densidad por el área de la lámina.

1.5.3.1. Momentos de masa una lámina delgada con respecto a los ejes coordenados

Consideremos nuevamente una lámina delgada plana, de espesor despreciable, que ocupa una región D del plano XY y cuya densidad superficial de masa está dada por la función positiva $\rho(x, y)$.

Si suponemos que la lámina es un sistema de partículas, definimos el momento de primer orden de cada partícula con respecto a un eje coordenado, como el producto de su masa por su distancia a dicho eje. Luego, el momento de primer orden de la lámina con respecto al eje X se obtiene mediante la integral doble

$$M_x = \iint_D y\rho(x, y) dA. \quad (1.48)$$

De la misma manera, el momento de primer orden de la lámina con respecto al eje Y se define a través la integral doble

$$M_y = \iint_D x\rho(x, y) dA. \quad (1.49)$$

1.5.3.2. Centro de masa y centroide

El centro de masa o de gravedad de un cuerpo es un punto cuya propiedad radica en que, si toda la masa del cuerpo estuviera concentrada en él, los momentos de primer orden no varían.

Por consiguiente, si el cuerpo es una lámina delgada plana, de espesor despreciable, que ocupa una región D del plano XY y cuya masa es m , las coordenadas del centro de gravedad (\bar{x}, \bar{y}) quedan determinadas mediante las integrales dobles iteradas

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x, y) dA \quad (1.50)$$

y

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x, y) dA. \quad (1.51)$$

Por otro lado, si se considera que la densidad superficial de masa es constante en todos los puntos de la lámina que ocupa una región D del plano XY , entonces el centroide (x_C, y_C) o centro geométrico de la lámina se calcula con las fórmulas

$$x_C = \frac{1}{A(D)} \iint_D x dA \text{ y } y_C = \frac{1}{A(D)} \iint_D y dA, \quad (1.52)$$

donde $A(D)$ representa el área de la región D .

Observación 4 En relación al calculo del centro de masa y centroide, debemos tener en cuenta los siguientes escenarios que se pueden presentar.

- ❶ Es crucial considerar la situación en la que la región D tiene un eje de simetría, pues bajo este supuesto el centroide, que es a su vez el centro geométrico de D , estaría ubicado sobre dicho eje de simetría.
- ❷ Si hay dos ejes de simetría, en una placa homogénea, el centro estará en el punto de intersección.
- ❸ La masa y el centro de masa de la placa son propiedades del cuerpo y son independientes de la ubicación del origen y de las direcciones de los ejes de coordenadas.
- ❹ El momento polar de inercia depende de la ubicación del origen, pero no de las direcciones elegidas para los ejes de coordenadas.
- ❺ Los momentos de inercia con respecto a los ejes OX y OY dependen de la Ubicación del origen y orientación de los ejes.

1.5.3.3. Momentos de inercia

Suponga que \mathcal{L} es una recta localizada en el mismo plano donde está la lámina D que gira en torno a una eje \mathcal{L} con velocidad angular constante ω y sea $d(x, y)$ la distancia de la masa elemental o puntual dm al eje \mathcal{L} , tal como se aprecia en la figura 1.44.

Si dE representa la energía cinética de la masa dm , entonces

$$dE = \frac{1}{2} (md)^2 dm = \frac{1}{2} (md)^2 \rho(x, y) dA,$$

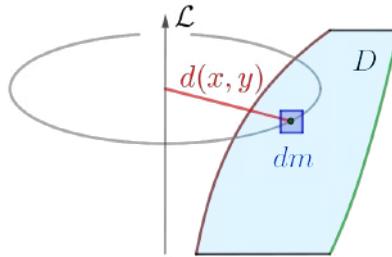


Figura 1.44: Momento de inercia

donde ωd es la velocidad escalar del cuerpo. Por consiguiente, la energía cinética total está dada por

$$E = \iint_D dE = \frac{1}{2} \omega^2 \iint_D d^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \iint_D d^2 \rho(x, y) dA. \quad (1.53)$$

A la integral que figura en el lado derecho de (1.53) se le llama el momento de inercia de la placa D en relación a una recta \mathcal{L} .

Es decir, el momento de segundo orden o momento de inercia de una lámina delgada respecto a una recta \mathcal{L} , considerando la lámina D como un sistema de partículas, se define mediante la ecuación

$$I_{\mathcal{L}} = \iint_D d^2(x, y) \rho(x, y) dA, \quad (1.54)$$

donde $\rho(x, y)$ representa la masa por unidad de área en cada punto (x, y) de D .

En particular, el momento de inercia de una partícula de la lámina con respecto de un eje coordenado se define como el producto de la masa de la partícula por el cuadrado de su distancia a dicho eje. En consecuencia, los momentos de inercias de la lámina con respecto a los ejes coordenado X e Y vienen dados por

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dA. \quad (1.55)$$

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dA. \quad (1.56)$$

La suma de (1.55) y (1.56) proporcionan el momento polar de inercia de la masa de la lámina en relación al origen de coordenadas, es decir

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA. \quad (1.57)$$

El término $x^2 + y^2$ que aparece en (1.57) es justamente el cuadrado de la distancia de un punto $P(x, y)$ de la placa D al origen de coordenadas. Podemos interpretar el momento de inercia como una resistencia al movimiento; es decir, cuanto mayor es el momento de inercia, mayor debe ser la energía para colocar un cuerpo en movimiento o para detenerlo.

Ejemplo 1.27

Una lámina delgada plana ocupa la región D acotada por la gráfica de $y = \ln x$, el eje X , las rectas $y = 1$ y $x = y$. Suponga que $\rho(x, y) = x^2$ representa la densidad, medida en gramos por centímetro cuadrado, de la placa en cada punto de ella. Calcule la masa de dicha lámina y las coordenadas del centro de gravedad.

Solución.

La representación gráfica de la lámina se muestra en la figura 1.45.

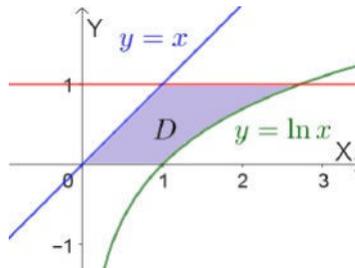


Figura 1.45: Región D del ejemplo 1.27

La masa de la lámina resulta de resolver la integral doble iterada

$$\text{masa} = \int_0^1 \int_y^{e^y} x^2 dx dy.$$

En primer término

$$\int_y^{e^y} x^2 dx = \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_y^{e^y} = \frac{1}{3} (e^{3y} - y^3).$$

Finalmente

$$\text{masa} = \int_0^1 \frac{1}{3} (e^{3y} - y^3) dy = 2.037g.$$

El momento de primer orden de la lámina con respecto al eje X se obtiene mediante la integral doble

$$M_x = \int_0^1 \int_y^{e^y} yx^2 dx dy.$$

Al evaluar la integral respecto de x se obtiene

$$\int_y^{e^y} yx^2 dx = \left. \frac{y}{3}x^3 \right|_y^{e^y} = \frac{y}{3}(e^{3y} - y^3) = \frac{1}{3}ye^{3y} - \frac{1}{3}y^4.$$

Integrando, respecto de y ,

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}ye^{3y} - \frac{1}{3}y^4 \right) dy = \frac{1}{9}ye^{3y} - \frac{1}{27}e^{3y} - \frac{1}{15}y^5 \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{27}e^3 - \frac{4}{135} \approx 1.458. \end{aligned}$$

El momento de primer orden de la lámina con respecto al eje Y se obtiene mediante la integral doble

$$M_y = \int_0^1 \int_y^{e^y} x(x^2) dx dy = \int_0^1 \int_y^{e^y} x^3 dx dy.$$

La integral respecto de x sigue de

$$\int_y^{e^y} x^3 dx = \left. \frac{1}{4}x^4 \right|_y^{e^y} = \frac{1}{4}(e^{4y} - y^4),$$

mientras que, el valor de la integral respecto de y discurre de

$$M_y = \int_0^1 \frac{1}{4}(e^{4y} - y^4) dy = \left. \frac{1}{16}e^{4y} - \frac{1}{20}y^5 \right|_0^1 = \frac{1}{16}e^4 - \frac{9}{80} \approx 3.299.$$

Por consiguiente, las coordenadas del centro de gravedad son

$$\bar{x} = \frac{3.299}{2.037} = 1.619 \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{1.458}{2.037} = 0,715.$$

□

Ejemplo 1.28

Una placa metálica delgada, que se muestra en la figura 1.46, adopta la forma de la región sombreada D del plano cartesiano XY que se muestra en la figura adjunta y que está limitada por las curvas de ecuaciones

$$y^2 = 2x + 8; \quad x = 1; \quad r = 1 - 2 \cos \theta$$

y una porción del eje X , para $x \in [-3, -1]$. Si la densidad en cada punto (x, y) de la placa, dada en gramos por centímetro cuadrado, está dada por la expresión $\rho(x, y) = x^2 + y^2 + 1$, calcule la masa de la placa.

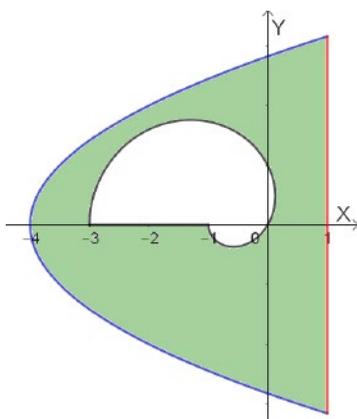


Figura 1.46: Placa metálica del ejemplo 1.28

Solución.

La masa de la placa se calculará como la diferencia de las integrales

$$m = \iint_{D_1} \rho(x, y) dA - \iint_{D_2} \rho(x, y) dA,$$

donde D_1 es la región limitada por la parábola $y^2 = 2x + 8$ y la recta $x = 1$; en tanto que D_2 es la región limitada por $r = 1 - 2 \cos \theta$ y por la porción del eje X , para $x \in [-3, -1]$.

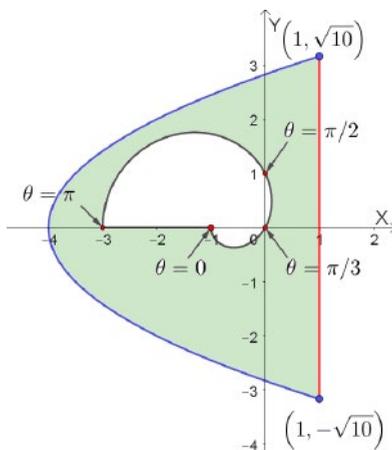


Figura 1.47: Placa metálica del ejemplo 1.28

Observe que

$$D_1 = \left\{ (x, y) / -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}; \frac{y^2 - 8}{2} \leq x \leq 1 \right\}$$

Así

$$\iint_{D_1} \rho(x, y) dA = \int_{-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}} \int_{0,5(y^2-8)}^1 (x^2 + y^2 + 1) dx dy.$$

Al evaluar la integral con respecto de x se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \int_{0,5(y^2-8)}^1 (x^2 + y^2 + 1) dx = \left. \frac{1}{3}x^3 + x(y^2 + 1) \right|_{0,5(y^2-8)}^1 \\ &= \frac{1}{3} + y^2 + 1 - \left(\frac{1}{3} (0,5(y^2 - 8))^3 + (0,5(y^2 - 8))(y^2 + 1) \right) \end{aligned}$$

Finalmente, integrando respecto de y :

$$\int_{-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}} \left(\frac{1}{3} + y^2 + 1 - \left(\frac{1}{3} (0,5(y^2 - 8))^3 + (0,5(y^2 - 8))(y^2 + 1) \right) \right) dy = 120.47 \quad (1.58)$$

Por otro lado,

$$D_2 = \{(r, \theta) / 0 \leq \theta \leq \pi ; 0 \leq r \leq 1 - 2 \cos \theta\}$$

Con lo que

$$\iint_{D_2} \rho(x, y) dA = \int_0^\pi \int_0^{1-2\cos\theta} (r^2 + 1) r dr d\theta.$$

Al evaluar la integral con respecto de r se obtiene

$$J = \int_0^{1-2\cos\theta} (r^2 + 1) r dr = \left. \frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}r^2 \right|_0^{1-2\cos\theta} = \frac{1}{4} (1 - 2 \cos \theta)^4 + \frac{1}{2} (1 - 2 \cos \theta)^2$$

Finalmente, integrando respecto de θ :

$$\int_0^\pi \left(\frac{1}{4} (1 - 2 \cos \theta)^4 + \frac{1}{2} (1 - 2 \cos \theta)^2 \right) d\theta = 19.635 \quad (1.59)$$

La masa de la placa resulta de la diferencia de (1.58) con (1.59), es decir

$$m = 120.47 - 19.635 = 100.84 \text{ gramos.}$$

□

Ejemplo 1.29

Una lámina adopta la forma de la región encerrada por las gráficas de $y = e^x$; $y = -ex$; $x = 0$ y $x = 1$. Determine los momentos de inercia de la lámina con respecto a los ejes coordenado si la densidad en cada punto de ella es igual a $\rho(x, y) = x$.

Solución.

La región que modela la forma de la lámina se aprecia en la figura 1.48 y su representación analítica es

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \wedge -ex \leq y \leq e^x\}.$$

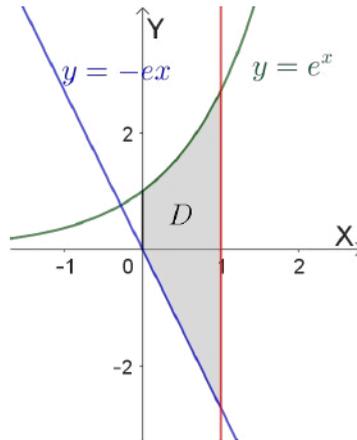


Figura 1.48: Lámina del ejemplo 1.29

Así

$$I_x = \int_0^1 \int_{-ex}^{e^x} y^2 x dy dx.$$

Integrando respecto de y :

$$\begin{aligned} \int_{-ex}^{e^x} y^2 x dy &= \left. \frac{1}{3} x y^3 \right|_{-ex}^{e^x} = \frac{1}{3} x (e^{3x} - (-ex)^3) \\ &= \frac{1}{3} e^3 x^4 + \frac{1}{3} x e^{3x}. \end{aligned}$$

Luego, el resultado se obtiene integrando respecto de x , es decir

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} e^3 x^4 + \frac{1}{3} x e^{3x} \right) dx = \left. \frac{1}{9} x e^{3x} - \frac{1}{27} e^{3x} + \frac{1}{15} x^5 e^3 \right|_0^1 \\ &= \frac{19}{135} e^3 + \frac{1}{27} \approx 2.863. \end{aligned}$$

El momentos de inercia de la lámina con respecto al eje Y sigue de evaluar la integral doble

$$I_y = \int_0^1 \int_{-ex}^{e^x} x^2(x) dy dx = \int_0^1 \int_{-ex}^{e^x} x^3 dy dx.$$

En efecto

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int_0^1 x^3 (e^x + ex) dx = \int_0^1 (x^4 e + x^3 e^x) dx \\
 &= \left. \frac{1}{5} x^5 e - 6e^x - 3x^2 e^x + x^3 e^x + 6x e^x \right|_0^1 \\
 &= 6 - \frac{9}{5} e \approx 1.107.
 \end{aligned}$$

□

1.5.4. Área de una porción de superficie

Considere la porción S de una superficie regular o suave dada por $z = f(x, y)$ definida sobre una región D en el plano XY . El área de S , que llamaremos área superficial S y denotaremos por $A(S)$, se puede obtener integrando los elementos de área de superficie dS sobre subrectángulos de la región D . El área de cada elemento dS se puede aproximar con el área del paralelogramo en el plano tangente tal como se aprecia en la figura.

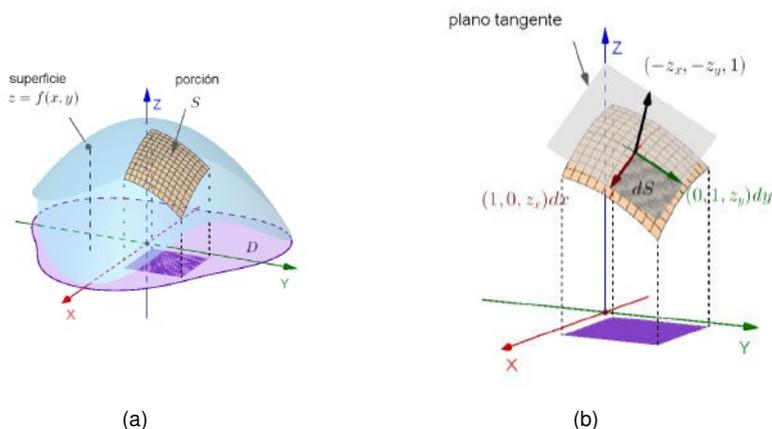


Figura 1.49: Área de una porción de superficie

Teniendo en mente que el área de un paralelogramo formado por dos vectores es numericamente igual a la longitud de su producto vectorial y que el paralelogramo en el plano tangente está formado por el vector $(1, 0, z_x)$ escalado por dx y por el vector $(0, 1, z_y)$ escalado por dy , calculamos el producto cruz

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & z_y \\ 1 & 0 & z_x \end{vmatrix} = z_x \hat{i} + z_y \hat{j} - \hat{k} = (z_x, z_y, -1).$$

De este modo

$$dS = \|(z_x, z_y, -1)\| \, dxdy = \sqrt{(z_x)^2 + (z_y)^2 + 1} \, dxdy$$

Definición 1.6 [nombre]

Sea S una superficie definida por un gráfico de la función $z = f(x, y)$, donde f es una función de dos variables definidas sobre una región D del tipo I o tipo II. Si f tiene derivadas parciales de primer orden continuas en cada punto de D , la fórmula para el área superficial S está dada por

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dA. \tag{1.60}$$

Ejemplo 1.30

Las dimensiones y diseño tridimensional de una pieza sólida de metal se ubican en el primer octante del espacio cartesiano XYZ , donde las unidades en los ejes se miden en pulgadas. Dicha pieza metálica se puede representar como el sólido limitado por las superficies de ecuaciones

$$y = 2 + (x - 1)^2; \quad x = 3; \quad z = 0; \quad y = 0; \quad x = 0 \quad \text{y} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

En el departamento de pintura, el costo del recubrimiento anticorrosivo se cotiza en 6, 15 soles por pulgada cuadrada. Si solo se requiere pintar la cara correspondiente a la porción del cono, determine el monto total a pagar por pintar 50 piezas metálicas.

Solución.

En la figura 1.50 se aprecia la pieza metálica sólida de la que se requiere pintar la cara de cada pieza correspondiente a la porción del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Entonces se proyecta dicha cara sobre el plano XY y se obtiene la región

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 2 + (x - 1)^2\}. \tag{1.61}$$

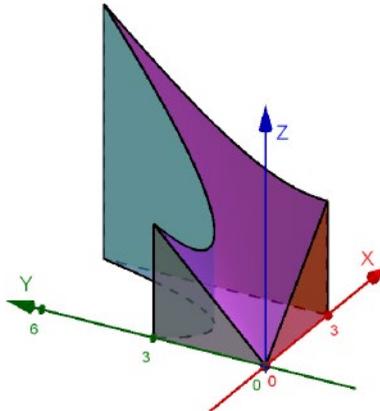


Figura 1.50: Sólido descrito en el ejemplo 1.30

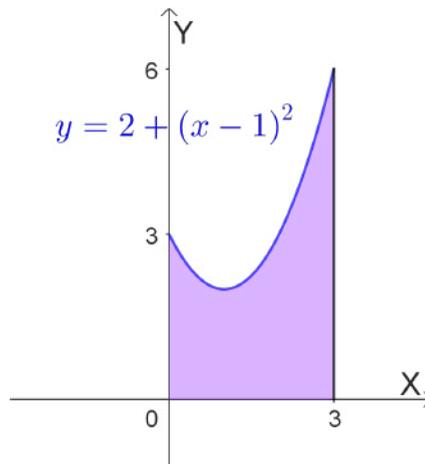


Figura 1.51: Dominio de integración dado por 1.61

Además si $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Con esto

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} = \sqrt{2}$$

El Área de la porción del cono es igual a

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^3 \int_0^{2+(x-1)^2} \sqrt{2} dy dx = \int_0^3 \sqrt{2} (2 + (x-1)^2) dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^3 (x^2 - 2x + 3) dx \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x \right]_0^3 = 12.728 \end{aligned}$$

Finalmente el monto total a pagar por pintar todas las 50 piezas metálicas asciende a

$$12.728 \times 50 \times 6,15 = 3913.86 \text{ soles}$$

□

Ejemplo 1.31

En la figura adjunta se muestra el sólido E limitado por las superficies

$$x^2 + z^2 + 4y = 16, \quad x + y = 0 \text{ y } x^2 + z^2 = 4x.$$

Dibuje la proyección sobre el plano XZ y calcule el área de la cara del sólido determinada por la superficie $x^2 + z^2 + 4y = 16$.

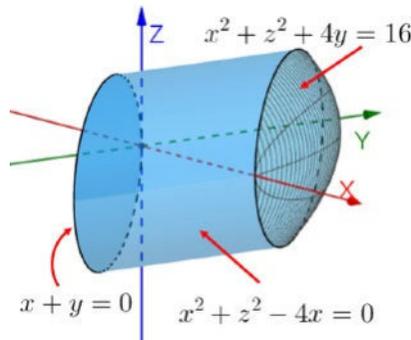


Figura 1.52: Sólido del ejemplo 1.31

Solución.

En vista de que la proyección sobre el plano XZ resulta la región que se muestra en la figura 1.53, resulta apropiado expresar y calcular la integral doble en coordenadas polares, tal como sigue. La región de integración se representa como

$$D = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi \wedge 0 \leq r \leq 4 \cos \theta\}.$$

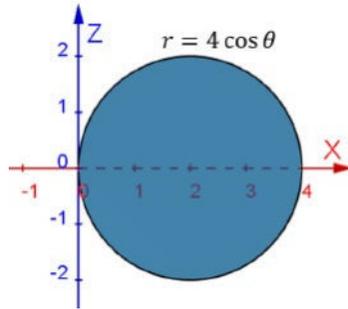


Figura 1.53: Proyección sobre el plano XZ

De la ecuación de la superficie $x^2 + z^2 + 4y = 16$ se desprende que

$$y = \frac{16 - x^2 - z^2}{4},$$

de donde $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{2}$ y $\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{z}{2}$.
Con ello,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \left(-\frac{z}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(x^2 + z^2) + 1}.$$

Así

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\frac{1}{4}(x^2 + z^2) + 1} dA = \int_0^\pi \int_0^{4 \cos \theta} \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + 1} r dr d\theta.$$

Al resolver la integral con respecto de r , introducimos el cambio de variable:

$u = \frac{1}{4}r^2 + 1 \rightarrow du = \frac{1}{2}r dr$. Al sustituir se tiene

$$\int \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + 1} r dr = \int 2\sqrt{u} du = \frac{4}{3}u^{3/2} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}r^2 + 1\right)^{3/2}.$$

Evaluando el segundo teorema fundamental del cálculo,

$$\int_0^{4 \cos \theta} \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + 1} r dr = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}r^2 + 1\right)^{3/2} \Big|_0^{4 \cos \theta} = \frac{4}{3} \left(\left(\frac{1}{4}(4 \cos \theta)^2 + 1\right)^{3/2} - 1 \right).$$

Finalmente

$$A(S) = \int_0^\pi \frac{4}{3} \left(\left(\frac{1}{4}(4 \cos \theta)^2 + 1\right)^{3/2} - 1 \right) d\theta = 19.433 \text{ u}^2.$$

□

1.5.5. Volumen de un sólido

Uno de los usos más elementales de la integral doble es el cálculo del volumen de un sólido o el volumen de una región del espacio limitada entre dos superficies. Sabemos que si $f(x, y)$ es una función real continua, con $f(x, y) \geq 0$, definida sobre la región D del plano XY se tiene que la ecuación de la superficie S , gráfica de f , está dada por $z = f(x, y)$. Es claro que D es la proyección ortogonal de S en el plano XY .

A continuación describiremos el proceso que se sigue para establecer la integral doble que permite determinar el volumen V de un sólido limitado superiormente por la superficie S , inferiormente por D y lateralmente por la superficie cilíndrica, cuya curva directriz es aquella que encierra a D .

Se inicia dividiendo D en rectángulos elementales de área $\Delta x \Delta y$ dibujando líneas paralelas al eje X e Y . Luego, sobre cada uno de estos rectángulos se erigen prismas rectos que tienen sus alturas paralelas al eje Z , cuyo volumen es igual $z \Delta x \Delta y$. Recalquemos que la división de D se realiza trazando las rectas $x = x_i$, con $i = 1, 2, \dots, m$ y las rectas $y = y_j$, donde $j = 1, 2, \dots, n$. En tercer lugar y a través de cada recta $x = x_i$, dibujamos un plano paralelo al plano YZ , y por cada recta $y = y_j$, pasa un plano paralelo al plano XZ . Del proceso anterior se obtiene el rectángulo ΔR_{ij} de área igual a $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ que será la base de un prisma rectangular de altura $f(x_{ij}, y_{ij})$, cuyo el volumen es aproximadamente igual al volumen de la región del espacio localizada entre la superficie S , el plano XY y los planos $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $y = y_{j-1}$ y $y = y_j$. Así,

$$\sum_{i,j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

proporciona un valor aproximado para el volumen del prisma. Finalmente, el volumen V del sólido es el límite de la suma de cada volumen elemental $z \Delta x \Delta y$, es decir

$$V = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \lim_{\Delta y_j \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D z dx dy. \tag{1.62}$$

Una primera situación dse presenta cuando tenemos una función real $z = f(x, y)$ definida y continua en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, tal que $f(x, y) \geq 0$ en R , es decir, el gráfico de f es una superficie ubicada por encima del rectángulo R . En este caso, se considera la región E del espacio limitada por el gráfico de f , el rectángulo R y los planos $x = a$, $x = b$, $y = c$ y $y = d$ tal como se muestra en la figura 1.54.

Si admitimos que la región E tiene un volumen V , llamamos a este volumen la integral doble de f sobre R y se denota por

$$V = \iint_R f(x, y) dA. \tag{1.63}$$

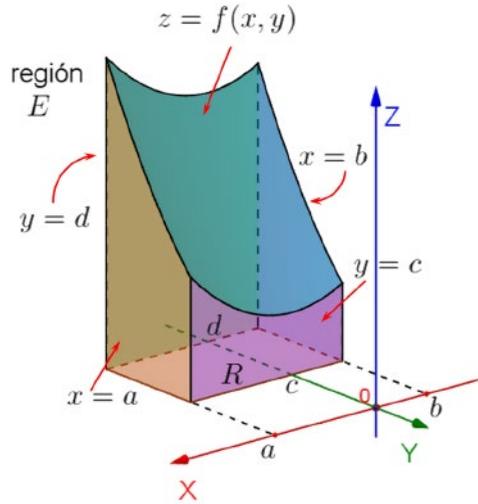


Figura 1.54: Sólido cuya base es el rectángulo R

Ejemplo 1.32

Determine el volumen de un sólido que está limitado superiormente por la superficie $3z = 12 - x$, lateralmente por los planos $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ y $y = 2$ y tiene como base el rectángulo $R = [1, 4] \times [0, 2]$.

Solución.

En virtud de (1.63) se tiene que el volumen del sólido se determina a partir de la integral doble

$$V = \int_0^2 \int_1^4 \left(4 - \frac{1}{3}x\right) dx dy.$$

Al resolver la integral respecto de x se tiene

$$\int_1^4 \left(4 - \frac{1}{3}x\right) dx = \left[4x - \frac{1}{6}x^2\right]_1^4 = \frac{19}{2}.$$

Finalmente

$$V = \int_0^2 \frac{19}{2} dy = 19 \text{ u}^3.$$

□

Un segundo escenario ocurre si $f(x, y)$ es una función real continua positiva para todo $(x, y) \in D$ cuya gráfica es la superficie S , entonces el volumen V de un sólido limitado superiormente por la superficie S , inferiormente por D y lateralmente por la

superficie cilíndrica, cuya curva directriz es aquella que encierra a D está dado por la integral doble

$$V = \iint_D f(x, y) dA. \tag{1.64}$$

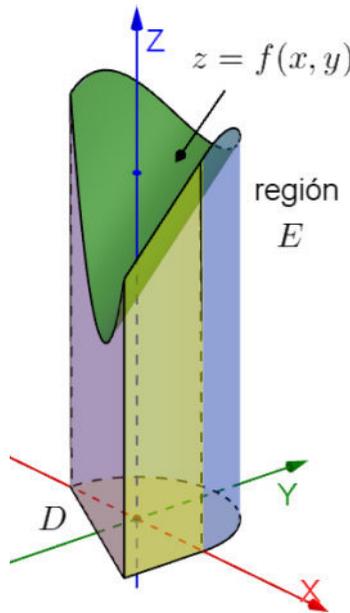


Figura 1.55: Sólido cuya base es una región D

En el caso que $f(x, y) < 0$, para todo $(x, y) \in D$, entonces definimos el volumen V como

$$V = - \iint_D f(x, y) dA. \tag{1.65}$$

Ejemplo 1.33

Determine el volumen de un sólido ubicado en el primer octante que está limitado superiormente por la superficie $z + y = 3$, inferiormente por el plano XY , y lateralmente por los planos $x = \sqrt{3}$, $y = 0$ y $y = x^2$.

Solución.

La gráfica del sólido se muestra en la figura 1.56 La proyección sobre el plano

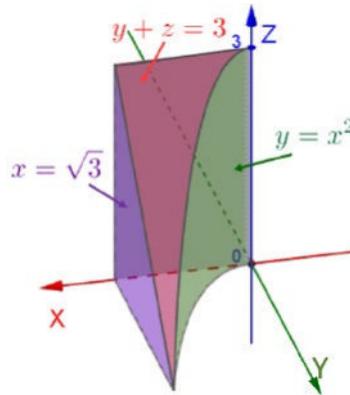


Figura 1.56: Sólido del ejemplo 1.33

XY genera la región

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \sqrt{3} \wedge 0 \leq y \leq x^2\}$$

que nos permite modelar la integral doble iterada para el volumen

$$V = \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{x^2} (3 - y) \, dy \, dx.$$

Evaluamos la integral respecto de y :

$$\int_0^{x^2} (3 - y) \, dy = \left[3y - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{x^2} = 3x^2 - \frac{1}{2}(x^2)^2 = 3x^2 - \frac{1}{2}x^4.$$

Finalmente, resolvemos la integral en x :

$$V = \int_0^{\sqrt{3}} \left(3x^2 - \frac{1}{2}x^4 \right) dx = \left[x^3 - \frac{1}{10}x^5 \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{21}{10}\sqrt{3} \, \text{u}^3.$$

□

Por último y de manera más general, si $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son funciones continuas tales que $f(x, y) > g(x, y)$ sobre una región plana D , entonces, el volumen del sólido E limitado por las gráficas de $f(x, y)$ y $g(x, y)$, y lateralmente por la superficie cilíndrica, cuya curva directriz es aquella que encierra a D está dado por

$$V(E) = \iint_D (f(x, y) - g(x, y)) \, dA. \quad (1.66)$$

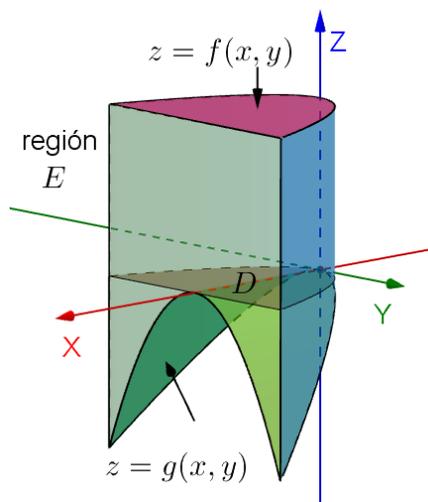


Figura 1.57: Sólido limitado por las gráficas de f y g

Ejemplo 1.34

En la figura 1.58 se muestra el sólido E limitado por las superficies

$$x^2 + z^2 + 4y = 16, \quad x + y = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + z^2 = 4x.$$

Calcule el volumen del sólido E .

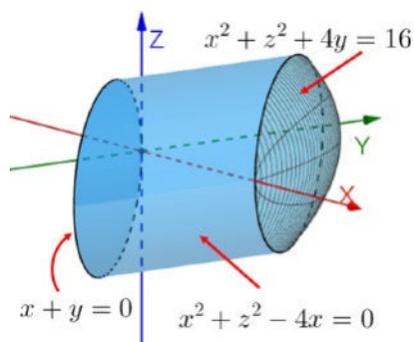


Figura 1.58: Sólido del ejemplo 1.34

Solución.

En vista de que la proyección sobre el plano XZ resulta la región que se muestra en la figura 1.59, resulta apropiado expresar y calcular la integral doble en coordenadas

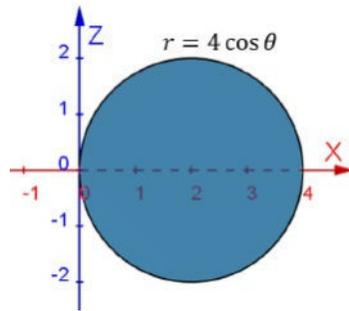


Figura 1.59: Proyección sobre el plano XZ

polares, tal como sigue. La región de integración se representa como

$$D = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi \wedge 0 \leq r \leq 4 \cos \theta\}.$$

Para calcular el volumen del sólido E usaremos la región proyección sobre XZ , es decir

$$D = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi \wedge 0 \leq r \leq 4 \cos \theta\}.$$

Así

$$\begin{aligned} V(E) &= \iint_D \left(\frac{16 - x^2 - z^2}{4} - (-x) \right) dA = \iint_D \left(-\frac{1}{4}(x^2 + z^2) + x + 4 \right) dA \\ V(E) &= \int_0^\pi \int_0^{4 \cos \theta} \left(-\frac{1}{4}r^2 + r \cos \theta + 4 \right) r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^{4 \cos \theta} \left(-\frac{1}{4}r^3 + r^2 \cos \theta + 4r \right) dr d\theta. \end{aligned}$$

Al resolver la integral con respecto de r , se obtiene

$$\int \left(-\frac{1}{4}r^3 + r^2 \cos \theta + 4r \right) dr = -\frac{1}{16}r^4 + \frac{1}{3}r^3 \cos \theta + 2r^2.$$

Evaluando con el segundo teorema fundamental del cálculo se tiene

$$-\frac{1}{16}r^4 + \frac{1}{3}r^3 \cos \theta + 2r^2 \Big|_0^{4 \cos \theta} = -\frac{1}{16} (4 \cos \theta)^4 + \frac{1}{3} (4 \cos \theta)^3 \cos \theta + 2 (4 \cos \theta)^2.$$

Finalmente

$$V(E) = \int_0^\pi \left(-\frac{1}{16} (4 \cos \theta)^4 + \frac{1}{3} (4 \cos \theta)^3 \cos \theta + 2 (4 \cos \theta)^2 \right) d\theta = 56.549 \text{ u}^3.$$

□

1.5.6. Problemas propuestos

1.23 Usando integrales dobles, resuelva los siguientes problemas:

- Calcule el área de la región limitada por la parábola $y = 4x - x^2$ y la recta $y = x$.
- Calcule el área de la región del primer cuadrante limitada por $x = 1$, $y = 0$ y $y = \sqrt{2 - x^2}$.
- Calcular el área de la región encerrada por las curvas $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$ y $x = 2$.
- Calcule el área de la región limitada por las curvas $x = -y^2 + 6y + 7$, $y = 7e^x$ y $y = -e^x$.
- Determine el área de la región limitada por las gráficas de las curvas $y = 2$, $y = \sqrt{8 - 2x}$, $x = 3y(y - 2)$ y $7y + x = 4$.
- Calcule el área de la región limitada por las curvas $r = 2 \sin \theta$ y $r = 4 \sin \theta$.
- Calcule el área interior a la circunferencia $r = \sin \theta$ y exterior a la cardioide $r = 1 - \sin \theta$.
- Determine el área encerrada por las tres hojas de la rosa $r = \sin(3\theta)$.
- Calcule el área de la región limitada por las curvas $r = 4 - 4 \cos \theta$, $r = 4$ y $r = -4 \cos \theta$.

1.24 Usando una integral doble, determine el área de la regiones limitadas por las curvas que se indican

- $y = 0$, $y = x$ y $x + y = 2$.
- $y = x$, $y = -x^2$ y $x = 2$.
- $y = 5 - 4x$ y $y = \frac{1}{x}$.
- $x = \sqrt{y}$; $y = x + 2$; $y = -3x + 18$.
- $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 2x$. (en el primer cuadrante).
- Exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = x$ e interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$.
- Interior a la circunferencia $r = 2 \sin \theta$ y exterior a $r^2 = 2 \cos(2\theta)$

1.25 Calcular el volumen de un sólido acotado por las superficies $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 2y$.

1.26 Calcule el volumen del tetraedro limitado por los planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ y $z = 0$

1.27 Calcule el volumen del sólido que está acotado arriba por $z = x^2 + y^2$ y por debajo por el plano XY .

1.28 Determine el volumen del sólido limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$ y $x = y^2$.

1.29 Determine el volumen del sólido que se encuentra debajo de la superficie $z = xy$ y por encima de la región D en el plano XY delimitado por la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$.

1.30 Determine el volumen del sólido acotado superiormente por el cilindro parabólico $z = x^2$ e inferiormente por la región del plano XY encerrada por la parábola $y = 2 - x^2$ y la recta $y = x$.

1.31 Calcule el volumen del sólido limitado superiormente por el plano $z = 3x + 4y$, cuya base es el rectángulo $R = [1, 2] \times [0, 3]$.

1.32 Calcule el volumen del sólido limitado por la superficie $z = 1 + (x - 1)^2 + 4y^2$, los planos $x = 3$, $y = 2$ y los planos coordenados.

1.33 Calcule el volumen del sólido, en el primer octante, acotado por $y = 0$, $z = 0$, $y = 3$, $z = x$ y $z + x = 4$.

1.34 Determine el volumen del sólido delimitado por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y la semi esfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

1.35 Calcule el volumen del sólido acotado por $z = 0$ y $4z + y^2 + 4x^2 = 4$.

1.36 Calcule el volumen del sólido que se encuentra limitado superiormente por el paraboloides $z = x^2 + y^2$, inferiormente por el plano XY y lateralmente por $x^2 + y^2 = 2x$.

1.37 Calcule el volumen del sólido, en el primer octante, acotado por $y = 0$, $z = 0$, $x = 0$, $z + x^2 = 64$ y $4y + 3x = 24$.

1.38 Determine el volumen del sólido E limitado, en el primer octante, por los cilindros $x^2 + z^2 = 4$, $x^2 + z^2 = 2z$ y los planos $y = 0$, $z = 0$ y $x + y = 4$.

1.39 Una placa en forma de triángulo rectángulo con catetos de longitud a y b cm se ubica en el primer cuadrante. Si la densidad en cada punto $P(x, y)$, medida en gramos por centímetro cuadrado, es numéricamente igual a la suma de las distancias de P hacia los catetos, calcule la masa de dicha placa.

1.40 Una placa delgada ocupa la menor región determinada por la curva $x^2 + 4y^2 = 12$ y la parábola $x = 4y^2$, en un sistema de coordenadas cartesiano cuyas unidades se miden en centímetros. Sabiendo que la densidad del material, en gramos por centímetro cuadrado, es igual a $\rho(x, y) = 5x$, determine la abscisa del centro de masa de la placa.

1.41 Si la densidad en cada punto $P(x, y)$ de una placa circular de radio a cm, medida en gramos por centímetro cuadrado, es numéricamente igual a la distancia de P al centro, calcule la masa de dicha placa.

1.42 Una placa delgada ocupa la región limitada por $y = 2 - x$ y $\frac{x^2}{4} - 1 - y = 0$, en un sistema de coordenadas cartesiano cuyas unidades se miden en centímetros. Sabiendo que la densidad del material, en gramos por centímetro cuadrado, es igual a $\rho(x, y) = x^2y^2e^{y^3}$, determine la masa total de la placa.

1.43 Encuentre el centro de masa (\bar{x}, \bar{y}) de una lámina delimitada por la parábola $y^2 = 8x$ y su lado recto $x = 2$ si su densidad, medida en gramos por centímetro cuadrado, en cada punto $P(x, y)$ es numéricamente igual a la distancia de P al lado recto.

1.44 Determine la ordenada del centro de masa de la placa plana, ubicada en un sistema de coordenadas cartesiano cuyas unidades se miden en metros, y que está limitada por las curvas $x = y$, $y = 8$ y $y = \sqrt[3]{x}$, sabiendo además, que su densidad está dada por $\rho(x, y) = \frac{y}{x^2} + \frac{2x}{y}$ kilogramos por metro cuadrado

1.45 Determine el centro de masa de una placa limitada por la mitad superior del cardiode $r = 2(1 + \cos \theta)$ y el eje X , si la densidad en cada punto $P(x, y)$, medida en gramos por centímetro cuadrado, es numéricamente igual a la distancia de P al polo.

1.46 Un colgante tiene la forma de la región interior a la cardiode $r = 1 + \cos \theta$ y exterior a la circunferencia $r = 1$. Se necesita enviar un pedido de 50 colgantes que tendrán un baño de plata por ambos lados, cuyo costo asciende a 6,75 soles el centímetro cuadrado.

- a) Calcule el costo total por el bañado de los 50 colgantes.
- b) Para una mayor estabilidad se desea realizar una perforación en el centro de masa de cada colgante, determine la ordenada de este centro de masa, si la densidad superficial del material en cada punto P es igual al cuadrado de la distancia de P al origen de coordenadas. (Considere las unidades en el sistema de coordenadas dadas en centímetros).

1.47 Una lámina adopta la forma de la cuarta parte, ubicada en el primer cuadrante, de un disco de radio a cm con centro en el origen. Si la densidad está dada por la función $\rho(x, y) = y$, determine el centro de masa.

1.48 Determine el momento de inercia polar respecto del origen de una placa delgada que adopta la forma de la región interior a la circunferencia $r = 4 \sin \theta$ y exterior a $r = 2$, cuya densidad está dada por $\rho(x, y) = 2$.

1.49 Determine el momento polar de inercia respecto del origen de una placa delgada, ubicada en el primer cuadrante, de densidad $\rho(x, y) = 1$ y delimitada por el cuarto de círculo $x^2 + y^2 \leq 1$.

1.50 Determine el momento de inercia polar respecto del origen de una placa delgada que adopta la forma de

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \right\}$$

cuya densidad está dada por $\rho(x, y) = 4$.

1.51 Encuentre el centroide de la región en el primer cuadrante delimitada por

$$y^2 = 6x, y = 0 \text{ y } x = 6.$$

1.52 Determine el centroide de la región ubicada en el primer cuadrante y limitada por $x = y^2$, $x = y + 2$ y $y = 0$.

1.53 Encuentre el centroide de la región exterior a la circunferencia $r = 1$ y dentro del cardioide $r = 1 + \cos \theta$.

1.54 Determine el momento de inercia con respecto del origen de una placa cuadrada que encaja en el conjunto

$$D = \left\{ (x, y) : -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \wedge -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}$$

si su densidad en cada punto $P(x, y)$, medida en gramos por centímetro cuadrado, es numéricamente igual a 1.

1.55 Encuentre el momento de inercia de una placa cuadrada de lado a cm con respecto a los ejes coordenados, si la densidad en cada punto $P(x, y)$, medida en gramos por centímetro cuadrado, es numéricamente igual a la distancia de P a un extremo de ese lado.

1.56 Encuentre el momento de inercia, con respecto de los ejes coordenados, de una placa que adopta la forma de

$$D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2 \wedge x \leq y \leq x^2\}$$

si la densidad en cada punto $P(x, y)$, medida en gramos por centímetro cuadrado, está dada por $\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$.

1.57 Encuentre los momentos de inercia de la placa triangular acotada por

$$3x + 4y = 24, \quad x = 0 \text{ e } y = 0,$$

si la densidad está dada por la función $\rho(x, y) = 1$.

1.58 Determine el área de la parte del cilindro $z = 1 - y^2$, ubicada en el primer octante y situada entre los planos $x + y = 1$ y $x + y = 3$.

1.59 Calcule el área de la superficie del plano $2x + 2y + z = 8$ acotado en el primer octante por los planos coordenados.

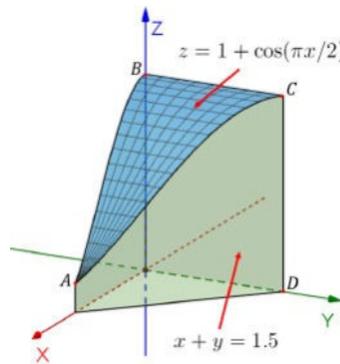
1.60 Determine el área de la porción, en el primer octante, del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ que es recortada por el plano $x + y = 4$.

1.61 En la figura adjunta se muestra el sólido E , ubicado en el primer octante, limitado por las gráficas de las superficies

$$z = 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right); \quad x + y = \frac{3}{2}$$

$$x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0.$$

Use una integral doble para calcular el área de la cara del sólido determinada por el plano $x + y = \frac{3}{2}$.



1.62 Calcule el área de la porción del plano $y + z = 2$ acotado por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$, para $z \geq 0$.

1.63 Determine el área de la superficie del plano $f(x, y) = 1 + 2x + y$ sobre la región rectangular

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 3\}.$$

1.64 Determine el área de la porción del cilindro $x = y^2$ que está limitado por los planos $y + z = 1$, $x = 1$ y $z = 0$.

1.65 Determine el área de la porción del paraboloides hiperbólico $f(x, y) = 5 + x^2 - y^2$ recortado por el cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$.

1.66 Determine el área de la porción, en el primer octante, del paraboloides $4z = x^2 + y^2$ que está limitado por los planos $y = 3$, $y = 1$, $z = 4$ y $x = 0$.

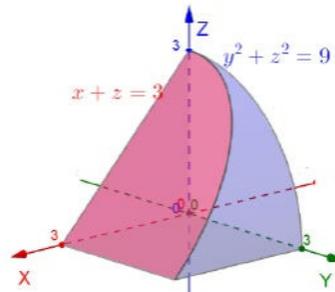
1.67 Determine el área de la parte del paraboloides $z = x^2 + y^2$ ubicada debajo del plano $z = 4$ y en el primer octante.

1.68 Calcule el área de la porción del cilindro $y = \sqrt{x}$ acotado por los planos $x = 0$, $z = 0$ y $z = 1 - y$.

1.69 Determine el área de la parte de la superficie $z = y^2 - x^2$ que se encuentra entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

1.70 En la figura adjunta se muestran el sólido, en el primer octante, limitado por las superficies $x + z = 3$, $y^2 + z^2 = 9$ y los tres planos coordenados.

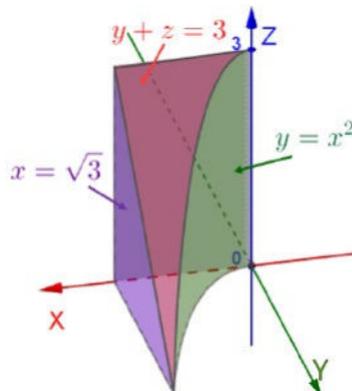
Calcule el área de la porción del cilindro y de la porción del plano $x + z = 3$.



1.71 Determine el área de la parte del cono $z = \sqrt{y^2 + x^2}$ que se encuentra en el interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

1.72 En la figura adjunta se muestran el sólido, en el primer octante, limitado por las superficies $y + z = 3$, $y = x^2$, $x = \sqrt{3}$, $z = 0$ y $y = 0$.

Calcule el área de la porción del cilindro y de la porción del plano $y + z = 3$.



2

Integrales triples

Cuando se definió la integral definida simple o las integrales dobles, la partición del dominio de integración implicaba la división del área bajo la curva o el volumen bajo la gráfica de una superficie, respectivamente. Sin embargo, como ya sabemos no podemos visualizar la gráfica de una función de 3 variables ya que requeriría graficarla el espacio de 4 dimensiones, lo que es un impedimento para visualizar el efecto de la partición del dominio de integración.

Ante esto, procederemos con las sumas de Riemann, sin el respaldo gráfico de lo que le sucede a la función $f(x, y, z)$.

Empecemos considerando $w = f(x, y, z)$ una función real definida y limitada en un paralelepípedo o caja rectangular

$$R = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]. \quad (2.1)$$

A continuación cortaremos R en muchas cajas pequeñas con lados paralelos a los ejes coordenados. Para ello, primero dividimos a R trazando planos paralelo al plano XY , luego dibujamos planos paralelos al plano YZ y finalmente insertamos planos paralelos al plano XZ .

Para conseguir lo descrito anteriormente, consideramos las particiones regulares de orden n , denotadas por, P_1 , P_2 y P_3 de $[a, b]$, $[c, d]$ y $[p, q]$, respectivamente. El producto cartesiano $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ es llamado una partición regular de orden n de R que subdivide a la caja R en n^3 cajas denotadas por R_{ijk} .

Con estas consideraciones previas, formulamos la suma de Riemann S_n de la función $w = f(x, y, z)$ como sigue,

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{ijk}) \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (2.2)$$

donde c_{ijk} es un punto cualquiera de R_{ijk} y

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta y = \frac{d-c}{n} \quad \text{y} \quad \Delta z = \frac{q-p}{n}.$$

La representación gráfica de las ideas descritas anteriormente quedan ilustradas en la figura 2.1, no obstante y en línea con los objetivos de este libro, presentamos la definición formal de integral triple como suma de Riemann.

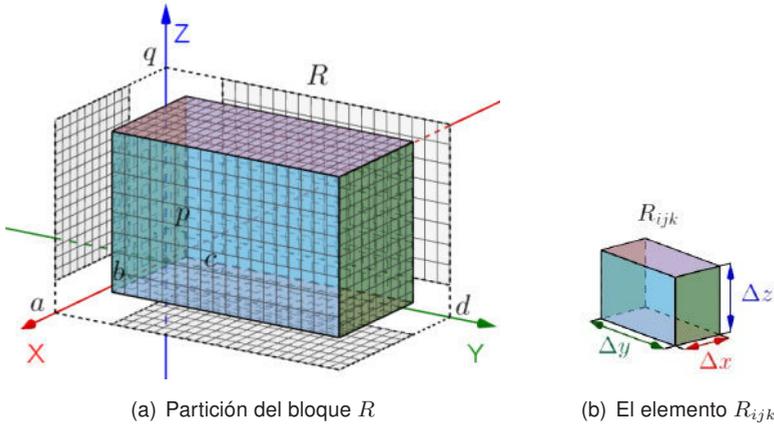


Figura 2.1: Caja rectangular R

Definición 2.1 [Integral triple]

Sea $w = f(x, y, z)$ una función real definida e limitada en un paralelepípedo o caja rectangular R . Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ es un número real s que es independiente del $c_{ijk} \in R_{ijk}$ elegido, entonces llamaremos a este límite la integral triple de f sobre R y se denotará por

$$\iiint_R f(x, y, z) dV. \quad (2.3)$$

Teorema 2.1

Toda función $w = f(x, y, z)$ real definida y continua en una caja rectangular R es integrable sobre R .

Además de lo anterior, las funciones limitadas cuyos conjuntos de discontinuidades pueden ser descritos como la unión finita de gráficos de funciones continuas, digamos $z = z(x, y)$ o $y = y(x, z)$ o $x = x(y, z)$, son integrables.

Para rematar la analogía con las integrales dobles, trabajemos en torno al problema de calcular las integrales triples sobre regiones cerradas y limitadas $B \subset \mathbb{R}^3$, que podemos imaginarlas como regiones contenidas en alguna caja rectangular R . En efecto, dada una función $\tilde{f} : R \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que coincide con f en los puntos de B y se anula en la región $R - B$. Si la frontera de B consta de una unión finita de gráficos de funciones continuas, entonces \tilde{f} es integrable en R y definimos

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \iiint_R \tilde{f}(x, y, z) dV.$$

Debe quedar claro que esta integral triple es independiente de la elección de R .

Para las integrales triples de funciones de tres variables, es posible encontrar seis órdenes de integración y, como en el caso de las integrales dobles, el teorema de Fubini es válido.

Teorema 2.2 [Teorema de Fubini]

Sea $f : R \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función real definida y continua en una caja rectangular $R = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$, entonces

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) dV &= \int_a^b \int_c^d \int_p^q f(x, y, z) dz dy dx \\ &= \int_c^d \int_a^b \int_p^q f(x, y, z) dz dx dy \\ &= \int_p^q \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) dy dx dz \\ &= \int_a^b \int_p^q \int_c^d f(x, y, z) dy dz dx \\ &= \int_c^d \int_p^q \int_a^b f(x, y, z) dx dz dy \\ &= \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

La demostración del teorema de Fubini para integrales triples es completamente análoga a la de integrales dobles.

Las integrales triples se pueden calcular de forma similar a las integrales dobles, es decir, a través de integrales triples iteradas. En efecto, en primer lugar podemos reducir la integral triple a una integral doble y luego resolverla según lo aprendido en la sección anterior. En definitiva, la estrategia para resolver una integral triple iterada reside exactamente en la transformarla o reducirla a una integral doble.

Propiedades de la integral triple

De manera análoga a la integral doble, tenemos las siguientes propiedades para las integrales triples.

Proposición 2.1

Sean f y g dos funciones integrables en una región del espacio B y k_1, k_2 dos constantes reales.

[IntTrip1] Linealidad. La función $k_1f + k_2g$ es integrable sobre B y

$$\iiint_B (k_1f(x, y, z) + k_2g(x, y, z)) dV = k_1 \iiint_B f(x, y, z) dV + k_2 \iiint_B g(x, y, z) dV.$$

Esta propiedad puede ser extendida a cualquier número finito de funciones interables.

[IntTrip2] Monotonidad. Si $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$, para todo $(x, y, z) \in B$, entonces

$$\iiint_B f(x, y, z) dV \geq \iiint_B g(x, y, z) dV.$$

[IntTrip3] Aditividad. Si la región B es subdividido en n sub regiones B_1, B_2, \dots, B_n y si f es integrable sobre cada $B_i, i = 1, \dots, n$, entonces es integrable sobre B y

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \sum_{i=1}^n \iiint_{B_i} f(x, y, z) dV.$$

[IntTrip4] Positividad. Si $f(x, y, z) \geq 0$ para todo $(x, y, z) \in B$, entonces

$$\iiint_B f(x, y, z) dV \geq 0.$$

[IntTrip5] Módulo de la integral.

$$\left| \iiint_B f(x, y, z) dV \right| \leq \iiint_B |f(x, y, z)| dV.$$

Ejemplo 2.1

Calcule

$$\int_1^2 \int_0^1 \int_0^3 (xy + 2z) \, dz \, dy \, dx.$$

Solución.

Resolvemos la integral respecto de z :

$$\int_0^3 (xy + 2z) \, dz = \int_0^3 xy \, dz + 2 \int_0^3 z \, dz = 3xy + z^2 \Big|_0^3 = 3xy + 9.$$

A continuación, integramos respecto de y :

$$\int_0^1 (3xy + 9) \, dy = 3x \int_0^1 y \, dy + 9 \int_0^1 dy = \frac{3x}{2} y^2 \Big|_0^1 + 9 = \frac{3x}{2} + 9.$$

Finalmente, evaluamos la integral definida respecto de x :

$$\int_1^2 \left(\frac{3x}{2} + 9 \right) \, dx = \left[\frac{3}{4} x^2 + 9x \right]_1^2 = \frac{45}{4}.$$

□

Ejemplo 2.2

Calcule

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x + y + z) \, dy \, dx \, dz.$$

Solución.

En primer lugar, resolvemos la integral con respecto de y :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(x + y + z) \, dy &= \left[\text{sen}(x + y + z) \right]_0^\pi \\ &= \text{sen}(x + \pi + z) - \text{sen}(x + z) \\ &= -2 \text{sen}(x + z). \end{aligned}$$

En segundo lugar, evaluamos la integral definida respecto de x :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi -2 \text{sen}(x + z) \, dx &= \left[2 \cos(x + z) \right]_0^\pi \\ &= 2 \cos(\pi + z) - 2 \cos z \\ &= -4 \cos z. \end{aligned}$$

Finalmente, la integral respecto de z sigue de

$$\int_0^{\pi} -4 \cos z dz = -4 \operatorname{sen} z \Big|_0^{\pi} = 0.$$

□

Caso especial

Sea $f : R \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función real definida y continua en una caja rectangular $R = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$. Si $f(x, y, z) = g(x)h(y)\phi(z)$ entonces

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right) \left(\int_p^q \phi(z) dz \right). \quad (2.4)$$

Esto significa que, en el caso que todos los límites de integración son constantes y f tiene la forma descrita, entonces, podemos escribir la integral triple iterada como producto de tres integrales definidas simples.

Ejemplo 2.3

Evaluar la integral triple iterada

$$\int_{-1}^2 \int_0^4 \int_1^2 x\sqrt{y} \ln z dz dy dx.$$

Solución.

En virtud de (2.4) se tiene

$$\int_{-1}^2 \int_0^4 \int_1^2 x\sqrt{y} \ln z dz dy dx = \left(\int_{-1}^2 x dx \right) \left(\int_0^4 \sqrt{y} dy \right) \left(\int_1^2 \ln z dz \right)$$

En seguida resolvemos y evaluamos cada integral definida simple.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \int_0^4 \int_1^2 x\sqrt{y} \ln z dz dy dx &= \left(\left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^2 \right) \left(\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 \right) \left(\left[z(\ln z - 1) \right]_1^2 \right) \\ &= \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{16}{3} \right) (2 \ln 2 - 1) \approx 3.09. \end{aligned}$$

□

2.1 Integral triple sobre regiones más generales.

El teorema de Fubini sigue siendo válido si la región de integración B ya no es más un simple paralelepípedo, como se menciona en los tres casos a seguir:

En el proceso de plantear y resolver integrales triples iteradas, consideraremos tres tipos especiales de regiones de \mathbb{R}^3 .

Una región $B \subset \mathbb{R}^3$ es del **tipo I** si puede ser descrita analíticamente por

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \wedge z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}, \quad (2.5)$$

donde D es la región limitada y cerrada que resulta de proyectar B sobre el plano XY , z_1 y z_2 son funciones continuas en D que satisfacen $z_1 \leq z_2$.

Un ejemplo de este tipo de regiones son aquellas, que ponemos a la vista en la figura 2.2, y que están limitadas por dos superficies de ecuaciones $z = z_1(x, y)$ y $z = z_2(x, y)$ y por una porción de cilindro generado por una recta que se mueve de manera paralela al eje Z a lo largo de la frontera de la región D .

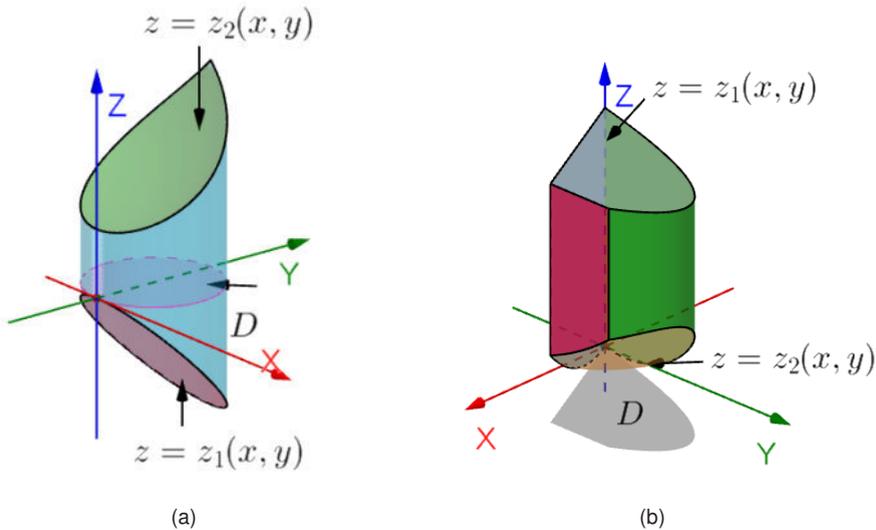


Figura 2.2: Una primera clase de región tipo I

Con frecuencia encontraremos regiones $B \subset \mathbb{R}^3$ del tipo I en la que la frontera de la región D está compuesta por la unión de arcos regulares continuos, lo que origina que B quede limitada lateralmente por porciones de planos y/o cilindros paralelos al eje Z , además de estar acotada superiormente por una superficie $z = z_2(x, y)$ e inferiormente por el plano XY , como apreciamos en la figura 2.3

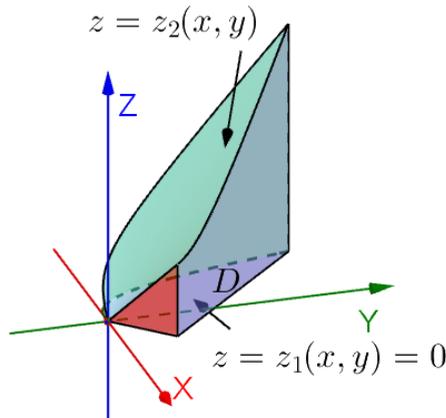


Figura 2.3: Una segunda clase de región tipo I

En cualquiera de los casos anteriores, la integral triple (2.3) se expresa como

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dA, \quad (2.6)$$

donde $dA = dx dy$ o $dA = dy dx$ que debe ser elegido convenientemente según las regiones estudiadas en las integrales dobles.

Una región $B \subset \mathbb{R}^3$ es del **tipo II** cuando queda descrita por

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D \wedge y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z)\}, \quad (2.7)$$

donde D es la región limitada y cerrada que resulta de proyectar B sobre el plano XZ , y_1 y y_2 son funciones continuas en D que satisfacen $y_1 \leq y_2$.

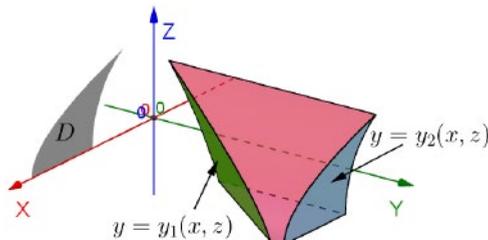


Figura 2.4: Una región tipo II

La integral triple (2.3) sobre una región de este tipo se expresa como

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dA, \quad (2.8)$$

donde $dA = dx dz$ o $dA = dz dx$ que debe ser elegido convenientemente según las regiones estudiadas en las integrales dobles.

Por último, Una región $B \subset \mathbb{R}^3$ es del **tipo III** cuando queda descrita por

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D \wedge x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z)\}, \quad (2.9)$$

donde D es la región limitada y cerrada que resulta de proyectar B sobre el plano YZ , x_1 y x_2 son funciones continuas en D que satisfacen $x_1 \leq x_2$ y que apreciamos en la figura 2.5.

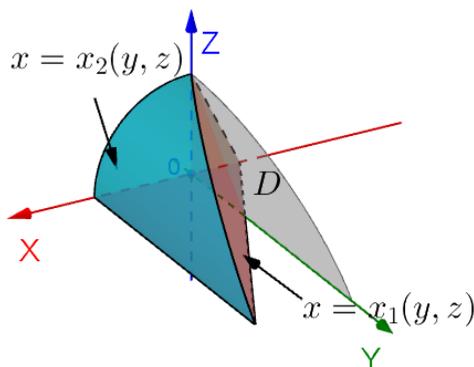


Figura 2.5: Una región tipo III

La integral triple (2.3) sobre una región de este tipo se expresa como

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z) dx \right) dA, \quad (2.10)$$

donde $dA = dy dz$ o $dA = dz dy$ que debe ser elegido convenientemente según las regiones estudiadas en las integrales dobles.

Ejemplo 2.4

El sólido B , adjunto en la figura 2.6 y ubicado en el primer octante del espacio cartesiano XYZ , está limitado por las superficies

$$y = 0; \quad x + z = 2; \quad y = 3; \quad z = \sqrt{x} \text{ y } x = 0.$$

Calcule $\iiint_B x dV$.

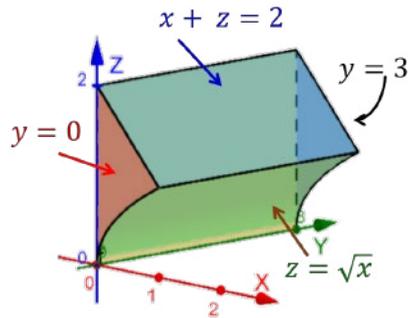


Figura 2.6: Sólido del ejemplo 2.4

Solución.

Al proyectar el sólido sobre el plano XZ se obtiene la región que se visualiza en la figura 2.7.

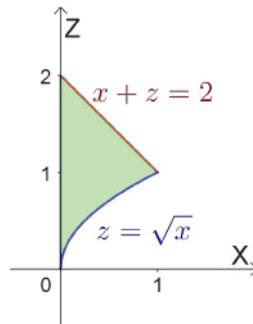


Figura 2.7: Proyección el sólido B sobre el plano XZ

Con esto, la representación analítica del sólido B es

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1 \wedge \sqrt{x} \leq z \leq 2 - x \wedge 0 \leq y \leq 3\}.$$

Con esto se procede como sigue

$$\iiint_B x dV = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{2-x} \int_0^3 x dy dz dx.$$

Integramos respecto de y :

$$\int_0^3 x dy = 3x.$$

A continuación, resolvemos la integral respecto de z :

$$\int_{\sqrt{x}}^{2-x} 3x dz = 3x (2 - x - \sqrt{x})$$

Finalmente, evaluamos la integral definida respecto de x :

$$\begin{aligned} \int_0^1 3x(2-x-\sqrt{x}) dx &= \int_0^1 (6x-3x^2-3x^{3/2}) dx \\ &= \left[3x^2 - x^3 - \frac{6}{5}x^{5/2} \right]_0^1 = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.5

El sólido B , adjunto en la figura 2.8 y ubicado en el primer octante del espacio cartesiano XYZ , está limitado por las superficies

$$y = 2 + (x - 1)^2; \quad x = 3; \quad z = 8; \quad y = 0; \quad x = 0 \quad \text{y} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Calcule $\iiint_B y dV$.

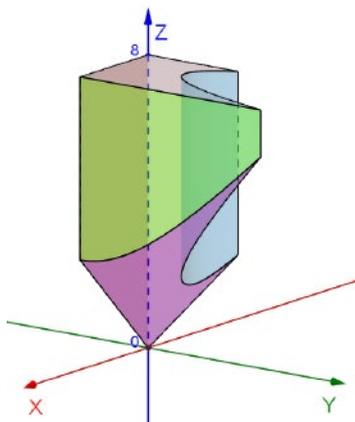


Figura 2.8: Sólido del ejemplo 2.5

Solución.

Al proyectar el sólido sobre el plano XY se obtiene la región que se visualiza en la figura 2.9.

Con esto, la representación analítica del sólido B es

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 2 + (x - 1)^2 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 8 \right\}.$$

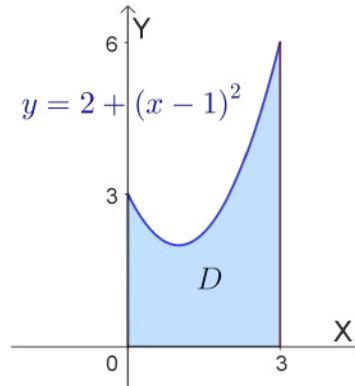


Figura 2.9: Proyección del sólido B sobre el plano XY

Con esto se procede como sigue

$$\iiint_B y dV = \int_0^3 \int_0^{2+(x-1)^2} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^8 y dz dy dx = \int_0^3 \int_0^{2+(x-1)^2} (8 - \sqrt{x^2+y^2}) y dy dx$$

$$\iiint_B y dV = \underbrace{\int_0^3 \int_0^{2+(x-1)^2} 8y dy dx}_K - \underbrace{\int_0^3 \int_0^{2+(x-1)^2} \sqrt{x^2+y^2} y dy dx}_L$$

Por un lado se tiene

$$\int_0^{2+(x-1)^2} 8y dy = 4y^2 \Big|_0^{2+(x-1)^2} = 4(2+(x-1)^2)^2.$$

Luego

$$K = \int_0^3 4(2+(x-1)^2)^2 dx = \frac{612}{5}.$$

Para resolver L , la integral $\int \sqrt{x^2+y^2} y dy$ respecto a y , se calcula con el cambio de variable siguiente: para $u = x^2 + y^2$ se tiene $du = 2y dy$.

Luego de las sustituciones respectivas se consigue

$$\int \sqrt{x^2+y^2} y dy = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{3} u^{3/2} = \frac{1}{3} (x^2+y^2)^{3/2},$$

así

$$\begin{aligned} \int_0^{2+(x-1)^2} \sqrt{x^2+y^2} y dy &= \frac{1}{3} (x^2+y^2)^{3/2} \Big|_0^{2+(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + (2+(x-1)^2)^2)^{3/2} - \frac{1}{3} (x^2)^{3/2} \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + (2+(x-1)^2)^2)^{3/2} - \frac{1}{3} x^3. \end{aligned}$$

Seguido, se integra la expresión de arriba con respecto de x tal como sigue

$$\begin{aligned} L &= \int_0^3 \left(\frac{1}{3} \left(x^2 + (2 + (x-1)^2)^2 \right)^{3/2} - \frac{1}{3} x^3 \right) dx \\ &= \int_0^3 \frac{1}{3} \left(x^2 + (2 + (x-1)^2)^2 \right)^{3/2} dx - \int_0^3 \frac{1}{3} x^3 dx \\ &= 58.296 - 6.75 = 51.546. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\iiint_B y dV = \frac{612}{5} - 51.546 \approx 70.854.$$

□

2.2 Cambio de variables en una integral triple

La fórmula de cambio de variables en una integral doble se extiende de manera natural a las integrales triples, tal como se muestra a continuación.

Sea $g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función definida por las ecuaciones

$$x = x(u, v, s), \quad y = y(u, v, s) \quad \text{y} \quad z = z(u, v, s),$$

donde x, y y z son funciones con derivadas parciales continuas en un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^3$. El determinante jacobiano de la aplicación g queda definido por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, s)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{vmatrix}. \quad (2.11)$$

Si g es inyectiva en un subconjunto cerrado y acotado Q que está contenido en U y el jacobiano dado en (2.11) nunca es cero en Q , entonces

$$\iiint_{g(Q)} f(x, y, z) dV = \iiint_Q f(x(u, v, s), y(u, v, s), z(u, v, s)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, s)} \right| dV^*, \quad (2.12)$$

donde dV^* representa uno de los seis órdenes de integración posibles para las nuevas variables u, v y s .

2.2.1. Cambio de variables cilíndricas

Un punto P expresado en coordenadas rectangulares (x, y, z) tiene coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , donde r y θ son las coordenadas polares de la proyección de P en el plano XY . Las coordenadas rectangulares y cilíndricas del punto P están relacionadas por las ecuaciones

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad \text{y} \quad z = z, \quad (2.13)$$

donde $r \geq 0$, el ángulo θ varía en un intervalo de la forma $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ y $z \in \mathbb{R}$.

Las ecuaciones dadas en (2.13) definen una aplicación $g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$g(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \quad (2.14)$$

que es inyectiva cuando se restringe al conjunto

$$\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : r > 0, \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi \wedge z \in \mathbb{R}\}.$$

A continuación presentamos las representaciones analíticas y gráficas de algunas superficies expresadas en coordenadas cilíndricas que serán de mucha utilidad cuando formulemos una integral triple en las coordenadas antes mencionadas.

La ecuación $r = a$ corresponde a un cilindro circular recto de radio a , centro de la curva directriz en el origen de coordenadas y eje coincidente con el eje Z .

A partir de la ecuación $\theta = \theta_c$, donde θ_c es una constante, se obtiene la gráfica de un semiplano que contiene al eje Z y es ortogonal al plano XY .

La superficie que se obtiene de la ecuación $z = k$, donde k es una constante, es un plano paralelo al plano XY .

En el mismo orden de las cosas, una caja rectangular con lados paralelos a los planos coordenados en el espacio XYZ es transformada, vía la función (2.14), en la región del espacio $r\theta z$ que podemos apreciar en la figura 2.10.

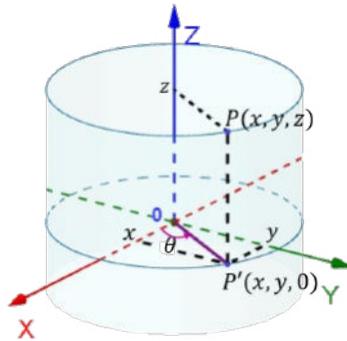


Figura 2.10: Las coordenadas cilíndricas

De acuerdo con (2.11), el determinante jacobiano de la aplicación dada en (2.14), está dado por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, s)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) = r. \quad (2.15)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, la fórmula dada en (2.12) queda expresada como

$$\iiint_{g(Q)} f(x, y, z) dV = \iiint_Q f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z) r dV^*, \quad (2.16)$$

donde dV^* representa uno de los seis órdenes de integración para las nuevas variables r, θ y z .

Cabe destacar que la fórmula (2.16) es válida si Q esta contenido en un conjunto de la forma

$$\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : r \geq 0, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi \wedge z \in \mathbb{R}\}.$$

Una preocupación natural queda plasmada en la pregunta ¿cuándo usar coordenadas cilíndricas para resolver una integral triple iterada?. Nuestra sugerencia es similar a la recomendamos en su momento para coordenadas polares, es decir, cuando la descripción de la región de integración se torna más sencilla y la integral se puede calcular fácilmente. Cuando nos referimos a más sencilla, nos referimos a aquellas regiones del espacio cuya proyección resulta en una región que está limitada por circunferencias y por rayos que parten del origen de coordenadas; o regiones de \mathbb{R}^3 cuya simetría está en relación con el eje Z lo mismo que la función integrando.

Los cilindros y los conos son ejemplos de algunas superficies que satisfacen el criterio de simetría. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.6

Describa al cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, con centro en $(0, 0, 0)$ y radio R , en coordenadas cilíndricas.

Solución.

De acuerdo con (2.13) escribimos

$$x^2 + y^2 = (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2,$$

es decir, se obtiene $r^2 = R^2$ si y solo si $r = R$.

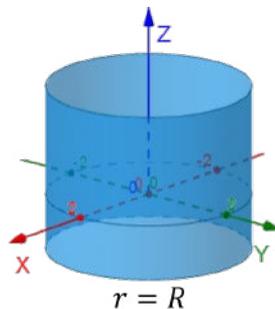


Figura 2.11: Superficie $x^2 + y^2 = R^2$ en coordenadas cilíndricas.

□

Ejemplo 2.7

Expresé en coordenadas cilíndricas la hoja superior del cono $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$, con $a > 0$.

Solución. Sustituimos las expresiones dadas en (2.13). En efecto,

$$z = a\sqrt{x^2 + y^2} = a\sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \operatorname{sen} \theta)^2} = a\sqrt{r^2},$$

así se obtiene la expresión $z = ar$.

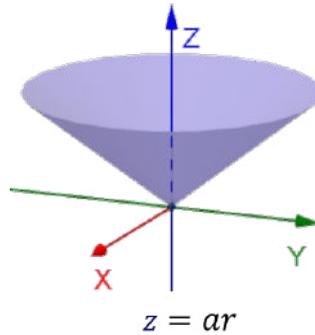


Figura 2.12: Superficie $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$ en coordenadas cilíndricas

□

Ejemplo 2.8

Describe el sólido B , limitado inferiormente por $4z = y^2 + x^2$ y superiormente por $y^2 + x^2 + z^2 = 5$, en coordenadas cilíndricas.

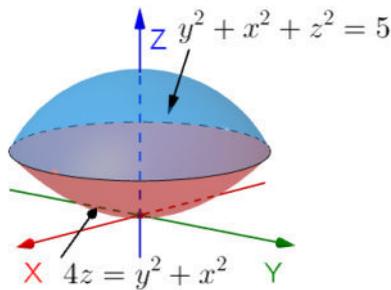


Figura 2.13: Sólido B del ejemplo 2.8

Solución.

Al intersectar las superficies obtenemos

$$4z + z^2 = 5 \leftrightarrow z = 1 \vee z = -5.$$

Esto significa que ambas superficies se cortan en el plano $z = 1$.
Proyectamos sobre el plano XY y obtenemos la región de la figura 2.14.

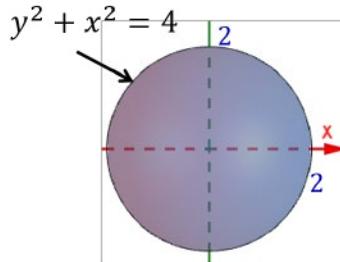


Figura 2.14: Proyección de B sobre el plano XY

El sólido descrito en coordenadas cilíndricas es

$$B = \left\{ (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 2 ; 0 \leq \theta \leq 2\pi ; \frac{1}{4}r^2 \leq z \leq \sqrt{5 - r^2} \right\}.$$

□

Ejemplo 2.9

En la figura adjunta se muestra el sólido E ubicado en el primer octante, donde las unidades en los ejes se miden en metros, y limitado por las superficies de ecuaciones $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 4$; $x^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + z^2 = 2z$.

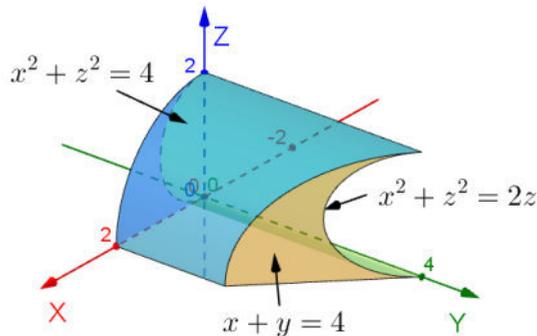


Figura 2.15: Sólido E del ejemplo 2.9

Solución.

La región D se expresa en coordenadas polares como sigue

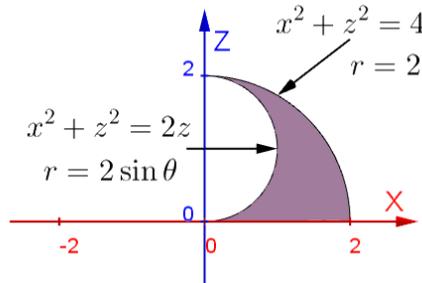


Figura 2.16: Proyección del sólido E sobre el plano XZ

$$D = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 2 \operatorname{sen} \theta \leq r \leq 2 \right\}$$

con esto

$$W = \int_0^{\pi/2} \int_{2 \operatorname{sen} \theta}^2 \ln(r^2) r dr d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \int_{2 \operatorname{sen} \theta}^2 r \ln r dr d\theta$$

Calculamos, integrando por partes, $\int r \ln r dr$.

En efecto: $u = \ln r \rightarrow du = \frac{1}{r} dr$ y $dv = r dr \rightarrow v = \frac{1}{2} r^2$.

De esta forma

$$\int r \ln r dr = \frac{1}{2} r^2 \ln r - \int \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{1}{r} dr \right) = \frac{1}{2} r^2 \ln r - \int \frac{1}{2} r dr = \frac{1}{2} r^2 \ln r - \frac{1}{4} r^2$$

$$\begin{aligned} \int_{2 \operatorname{sen} \theta}^2 r \ln r dr &= \left. \frac{1}{2} r^2 \ln r - \frac{1}{4} r^2 \right|_{2 \operatorname{sen} \theta}^2 \\ &= \frac{1}{4} 2^2 (2 \ln 2 - 1) - \frac{1}{4} (2 \operatorname{sen} \theta)^2 (2 \ln (2 \operatorname{sen} \theta) - 1) \\ &= \operatorname{sen}^2 \theta - 2 \operatorname{sen}^2 \theta \ln (2 \operatorname{sen} \theta) + 2 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

Finalmente

$$W = 2 \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2 \theta - 2 \operatorname{sen}^2 \theta \ln (2 \operatorname{sen} \theta) + 2 \ln 2 - 1) d\theta \approx 1.213 \text{ J}$$

□

2.2.2. Cambio de variables esféricas

Un punto P expresado en coordenadas rectangulares (x, y, z) tiene coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) , donde ρ es la distancia del punto P al origen, θ es el ángulo formado

por el eje positivo X y el segmento de recta que une $(0, 0)$ con (x, y) , y ϕ es el ángulo formado por el eje positivo Z y el segmento de recta que une P con el origen de coordenadas.

Las coordenadas rectangulares y esféricas del punto P quedan relacionadas por las ecuaciones

$$x = \rho \cos \theta \operatorname{sen} \phi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \quad \text{y} \quad z = \rho \cos \phi, \quad (2.17)$$

donde $\rho \geq 0$, el ángulo $\phi \in [0, \pi]$ y el ángulo θ varía en un intervalo de la forma $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$.

Las ecuaciones propuestas en (2.17) definen una aplicación $g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya regla de correspondencia es

$$g(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos \theta \operatorname{sen} \phi, \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \rho \cos \phi). \quad (2.18)$$

Esta aplicación es inyectiva cuando se restringe al conjunto

$$\{(\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 : \rho > 0, \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi \wedge 0 \leq \phi \leq \pi\}.$$

En la figura adjunta se muestra la imagen de una caja rectangular en el espacio $\rho\theta\phi$, vía la función definida en (2.18).

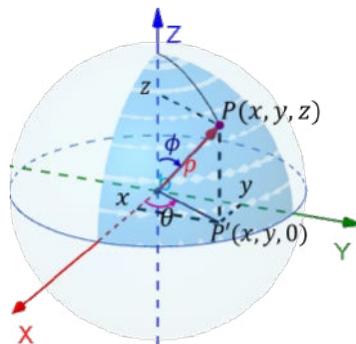


Figura 2.17: Las coordenadas esféricas

De manera análoga a lo hecho con las coordenadas cilíndricas, exhibiremos las ecuaciones y las gráficas de algunas superficies que resultarán de mucha utilidad cuando formulemos una integral triple en las coordenadas esféricas.

1. Así tenemos que la superficie representada por la ecuación $\rho = R$, donde R es una constante positiva, corresponde a una esfera con centro en el origen de coordenadas y radio igual a R .

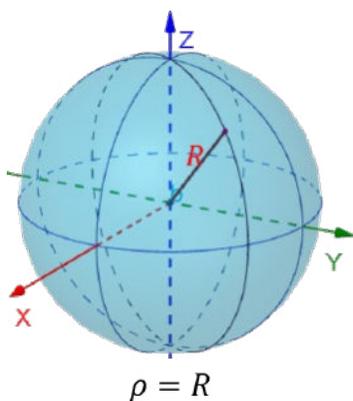


Figura 2.18: Superficie $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ en coordenadas esféricas

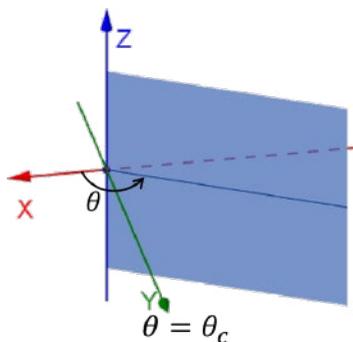


Figura 2.19: Semiplano que contiene al eje Z en coordenadas esféricas

- Por otro lado, la imagen en el espacio tridimensional XYZ de la ecuación $\theta = \theta_c$, donde θ_c es una constante, concuerda con un semiplano que contiene al eje Z y es ortogonal al plano XY .

Ejemplo 2.10

Verifique que la representación gráfica de la ecuación $\phi = \phi_0$ es la hoja superior de un cono circular cuya generatriz forma un ángulo de ϕ_0 con su eje.

Solución.

En la ecuación $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$, con $a > 0$, sustituimos las ecuaciones (2.17).

$$\begin{aligned} \rho \cos \phi &= a\sqrt{(\rho \cos \theta \sen \phi)^2 + (\rho \sen \theta \sen \phi)^2} \\ &= a\sqrt{\rho^2 (\cos^2 \theta \sen^2 \phi + \sen^2 \theta \sen^2 \phi)} \\ &= a\sqrt{\rho^2 \sen^2 \phi (\cos^2 \theta + \sen^2 \theta)} \\ &= a\rho \sen \phi \end{aligned}$$

de donde se deduce que $\rho \cos \phi = a\rho \sen \phi \leftrightarrow \cot \phi = a$ lo que implica que $\phi = \phi_0$. □

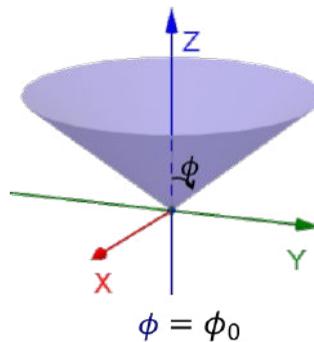


Figura 2.20: Superficie $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$ en coordenadas esféricas

Con el propósito de representar una integral triple en coordenadas esféricas, mostraremos el jacobiano de la aplicación (2.18). En efecto

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \sen \phi \cos \theta & -\rho \sen \theta \sen \phi & \rho \cos \theta \cos \phi \\ \sen \phi \sen \theta & \rho \cos \theta \sen \phi & \rho \sen \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sen \phi \end{vmatrix} = -\rho^2 \sen \phi. \quad (2.19)$$

Ya que el ángulo $\phi \in [0, \pi]$ discurre que $\sen \phi \geq 0$ lo que nos lleva a que $\rho^2 \sen \phi \geq 0$, por consiguiente,

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right| = |-\rho^2 \sen \phi| = \rho^2 \sen \phi.$$

Con la referencia previa, la fórmula dada en (2.12) queda expresada como

$$\iiint_{g(Q)} f(x, y, z) dV = \iiint_Q f(\rho \cos \theta \sen \phi, \rho \sen \theta \sen \phi, \rho \cos \phi) \rho^2 \sen \phi dV^*, \quad (2.20)$$

donde dV^* representa uno de los seis órdenes de integración para las nuevas variables ρ, θ y ϕ .

Cabe destacar que la fórmula (2.20) es válida si Q esta contenido en un conjunto de la forma

$$\{(\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 : \rho \geq 0, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi \wedge 0 \leq \phi \leq \pi\}.$$

Ejemplo 2.11

El sólido B está limitado inferiormente por el el plano $z = 2$ y superiormente por la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8. \text{ Describe el sólido en coordenadas esféricas.}$$

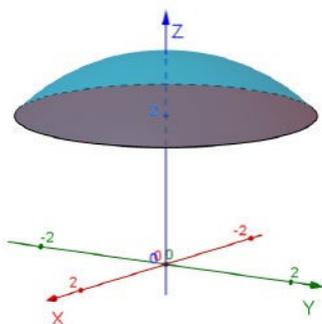


Figura 2.21: Sólido B del ejemplo 2.11

Solución.

La figura adjunta muestra la proyección sobre el plano XZ .

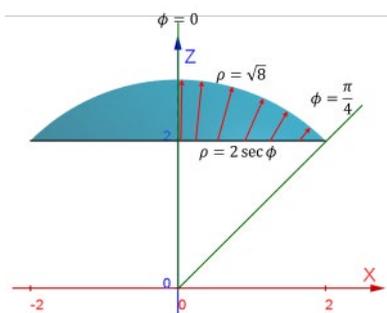


Figura 2.22: Proyección del sólido B sobre el plano XZ

Con esto, la representación del sólido en coordenadas esféricas es

$$B = \left\{ (\rho, \theta, \phi) / 0 \leq \theta \leq 2\pi; 2 \sec \phi \leq \rho \leq \sqrt{8}; 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

□

Ejemplo 2.12

En la figura adjunta se muestra el sólido E cuya base se sitúa sobre el plano XY , está limitado por las porciones de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Describa el sólido E en coordenadas esféricas y, luego, calcule la integral triple

$$\iiint_E (x^2 + y^2) dV.$$

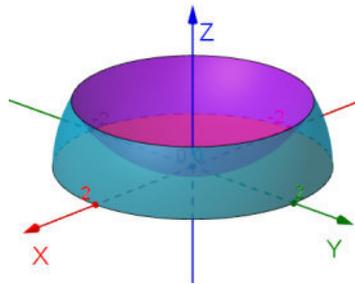


Figura 2.23: Sólido E del ejemplo 2.12

Solución.

Al proyectar sobre el plano XZ se obtiene la región adjunta

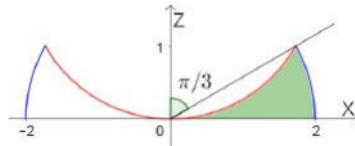


Figura 2.24: Proyección del sólido E sobre el plano XZ

Traducimos a coordenadas esféricas las superficies involucradas:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4z \leftrightarrow \rho^2 = 4\rho \cos \phi \leftrightarrow \rho = 4 \cos \phi$$

y

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \leftrightarrow \rho = 2.$$

Luego el sólido se modela como

$$E = \left\{ (\rho, \theta, \phi) / 4 \cos \phi \leq \rho \leq 2 ; 0 \leq \theta \leq 2\pi ; \frac{\pi}{3} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Para calcular la integral triple, usamos el resultado del ítem anterior

$$\iiint_E (x^2 + y^2 - 4z) dV = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_{4 \cos \phi}^2 (\rho^2 \sin^2 \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi.$$

Al evaluar la integral con respecto de ρ se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \int_{4 \cos \phi}^2 \rho^4 \sin^3 \phi d\rho = \sin^3 \phi \int_{4 \cos \phi}^2 \rho^4 d\rho = \left. \frac{\sin^3 \phi}{5} \rho^5 \right]_{4 \cos \phi}^2 \\ &= \frac{\sin^3 \phi}{5} (32 - (4 \cos \phi)^5) \end{aligned}$$

A continuación, resolvemos la integral con respecto de θ :

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^3 \phi}{5} (32 - (4 \cos \phi)^5) d\theta = \frac{2\pi \sin^3 \phi}{5} (32 - (4 \cos \phi)^5).$$

Finalmente, se evalúa la integral respecto de ϕ :

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{2 \sin^3 \phi}{5} (32 - (4 \cos \phi)^5) d\phi = 15.708 = 5\pi.$$

□

2.3 Aplicaciones de las integrales triples

Haremos dos aplicaciones de la integral triple. El primero se refiere calcular el centro de masa de un sólido generado por la intersección de superficies, utilizando el sistema de coordenadas cartesiano. El segundo implica determinar la masa sólida generada por el intersección de superficies, utilizando el sistema de coordenadas cilíndricas. Veamos nuestros ejemplos.

2.3.1. Volumen de un sólido

Si $f(x, y, z) = 1$ para todo $(x, y, z) \in B$, entonces el volumen del sólido B se calcula mediante la integral triple

$$\text{Vol}(B) = \iiint_B dV. \quad (2.21)$$

Caso especial: Si $R = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ entonces

$$\text{Vol}(R) = \iiint_R dx dy dz = (q - p)(d - c)(b - a).$$

representa el volumen del paralelepípedo o caja rectangular R .

Ejemplo 2.13

El sólido B está limitado por el paraboloide $2y = x^2 + z^2$, el cilindro parabólico $2y = z^2$ y los planos $x = 2$, $y = 3$ y $z = 0$.

Solución.

Al proyectar el sólido sobre el plano XZ obtenemos la región D y que dada la geometría de la misma, se precisa dividirla región en dos sub-regiones tal como que se ve en la figura 2.26.

De esta forma, el volumen se calculará como la suma de dos integrales triples.

En efecto, la primera parte del sólido, cuya proyección es la región

$$D_1 = \left\{ (x, z) : 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2} \right\}$$

se tiene

$$\text{Vol}(B_1) = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{6-x^2}} \int_{z^2/2}^{0,5(x^2+z^2)} dy dz dx.$$

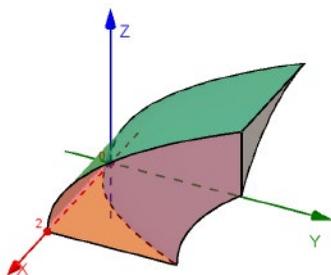


Figura 2.25: Sólido B del ejemplo 2.13

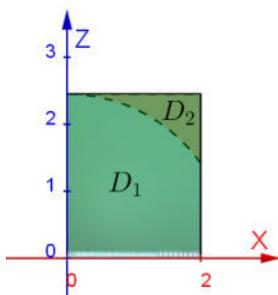


Figura 2.26: Proyección del sólido B sobre el plano XZ

Al evaluar se consigue

$$\begin{aligned} Vol(B_1) &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{6-x^2}} \left(0,5(x^2 + z^2) - \frac{z^2}{2} \right) dz dx = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{6-x^2}} \frac{x^2}{2} dz dx \\ &= \int_0^2 \frac{x^2}{2} \sqrt{6-x^2} dx = 2.503. \end{aligned}$$

Por otro lado, la proyección de la segunda porción del sólido general la región

$$D_2 = \left\{ (x, z) : 0 \leq x \leq 2 \wedge \sqrt{6-x^2} \leq z \leq \sqrt{6} \right\}.$$

Su volumen será el resultado de la integral

$$Vol(B_2) = \int_0^2 \int_{\sqrt{6-x^2}}^{\sqrt{6}} \int_{z^2/2}^{0,5(x^2+z^2)} dy dz dx.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B_2) &= \int_0^2 \int_{\sqrt{6-x^2}}^{\sqrt{6}} \left(0,5(x^2 + z^2) - \frac{z^2}{2} \right) dz dx = \int_0^2 \int_{\sqrt{6-x^2}}^{\sqrt{6}} \frac{x^2}{2} dz dx \\ &= \int_0^2 \frac{x^2}{2} (\sqrt{6} - \sqrt{6-x^2}) dx = 0,762. \end{aligned}$$

Finalmente el volumen del sólido requerido es

$$\text{Vol}(B) \approx 2.503 + 0,762 \approx 3.265.$$

□

Ejemplo 2.14

Considere el sólido E limitado inferiormente por el plano $z = 0$, superiormente por $z = 4 + 0,5xy$, lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$, el plano XZ (para $x \geq 0$) y el plano YZ (para $y \geq 0$). Calcule el volumen del sólido E .

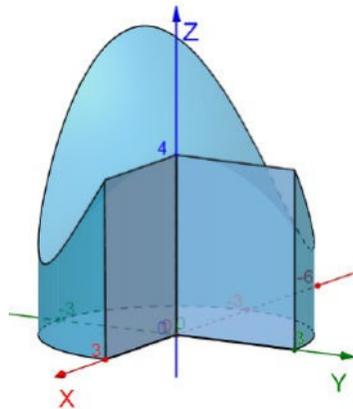


Figura 2.27: Sólido E del ejemplo 2.14

Solución.

Proyectando sobre el plano XY se obtiene la región adjunta. de donde

$$0 \leq r \leq 3; \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi; \quad 0 \leq z \leq 4 + 0,5r^2 \cos \theta \sin \theta$$

$$\text{Vol}(E) = \iiint_E dV = \int_{\pi/2}^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{4+0,5r^2 \cos \theta \sin \theta} r dz dr d\theta$$

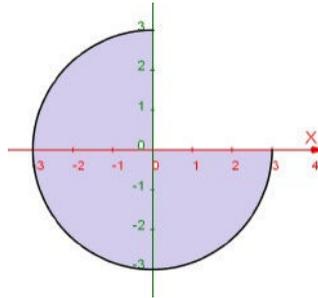


Figura 2.28: Proyección del sólido E sobre el plano XY

Resolvemos cada una de las integrales iteradas

$$\int_0^{4+0,5r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta} r dz = r (4 + 0,5r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta).$$

La integral se resuelve con un cambio de variable:

$$\text{si } u = 4 + 0,5r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \rightarrow du = r \cos \theta \operatorname{sen} \theta dr$$

$$\begin{aligned} \int r (4 + 0,5r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta) dr &= \frac{1}{\cos \theta \operatorname{sen} \theta} \int u du \\ &= \frac{1}{2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta} u^2 = \frac{(4 + 0,5r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta)^2}{2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta}, \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} \int_0^3 r (4 + 0,5r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta) dr &= \left. \frac{(4 + 0,5r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta)^2}{2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta} \right|_0^3 \\ &= \frac{(4 + 4,5 \cos \theta \operatorname{sen} \theta)^2}{2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta} - \frac{8}{\cos \theta \operatorname{sen} \theta}. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\int_{\pi/2}^{2\pi} \left(\frac{(4 + 4,5 \cos \theta \operatorname{sen} \theta)^2}{2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta} - \frac{8}{\cos \theta \operatorname{sen} \theta} \right) d\theta = 79.761u^3.$$

□

2.3.2. Masa de un sólido

Consideraremos una región finita $B \subset \mathbb{R}^3$, con una distribución de densidad dada en unidad de masa por unidad de volumen, $\rho(x, y, z)$, para todo $(x, y, z) \in B$. La masa

de la región B , denotada $m(B)$, será la integral triple de la función $\rho(x, y, z)$ sobre el dominio $B \subset \mathbb{R}^3$, dado por

$$m(B) = \iiint_B \rho(x, y, z) dV. \quad (2.22)$$

El momento de masa de la región $B \subset \mathbb{R}^3$ con respecto al plano YZ , denotado $M_{yz}(B)$, viene dado por la integral triple

$$M_{yz}(B) = \iiint_B x\rho(x, y, z) dV. \quad (2.23)$$

De manera similar llegamos al momento de masa de la región $B \subset \mathbb{R}^3$ relativo al plano XZ , denotado $M_{xz}(B)$ y definido por

$$M_{xz}(B) = \iiint_B y\rho(x, y, z) dV. \quad (2.24)$$

Y el momento de masa de la región $B \subset \mathbb{R}^3$ con respecto al plano XY , denotado $M_{xy}(B)$ se calcula mediante la integral triple

$$M_{xy}(B) = \iiint_B z\rho(x, y, z) dV. \quad (2.25)$$

Ejemplo 2.15

El sólido Q está limitado por las superficies de ecuaciones

$$2z = \sqrt{x^2 + y^2}; z = 1; x^2 + y^2 + z^2 = 6z + 27.$$

- Expresar el sólido Q en coordenadas esféricas.
- Calcular la masa del sólido Q si su densidad, en kg/cm^3 , está dada por $\rho(x, y, z) = y^2$.

Solución.

Expresamos cada superficie en coordenadas esféricas:

el cono $2z = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\begin{aligned} 2\rho \cos \phi &= \sqrt{(\rho \cos \theta \sin \phi)^2 + (\rho \sin \theta \sin \phi)^2} = \rho \sin \phi \\ 2 &= \tan \phi \leftrightarrow \phi = \arctan 2. \end{aligned}$$

el plano: $z = 1 \leftrightarrow \rho \cos \phi = 1 \leftrightarrow \rho = \sec \phi$.

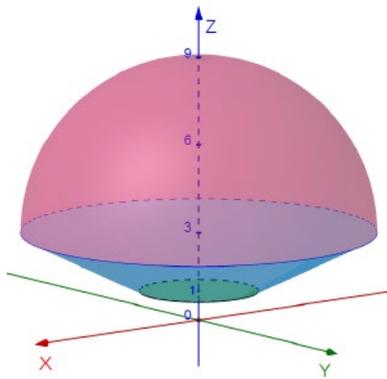


Figura 2.29: Sólido Q del ejemplo 2.15

la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 6z + 27$

$$\begin{aligned} \rho^2 &= 6\rho \cos \phi + 27 \Leftrightarrow \rho^2 - 6\rho \cos \phi = 27 \\ (\rho - 3 \cos \phi)^2 &= 9 \cos^2 \phi + 27 \Leftrightarrow \rho = 3 \cos \phi + \sqrt{9 \cos^2 \phi + 27} \end{aligned}$$

(se considera el signo + dado que se intersectará con la hoja superior del cono)

Proyectamos el sólido sobre el plano YZ :

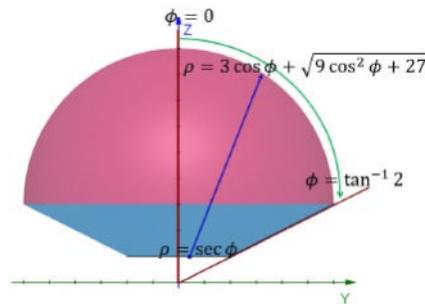


Figura 2.30: Proyección del sólido Q sobre el plano YZ

El sólido Q en coordenadas esféricas es

$$Q = \left\{ (\rho, \theta, \phi) / 0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq \phi \leq \arctan 2; \sec \phi \leq \rho \leq 3 \cos \phi + \sqrt{9 \cos^2 \phi + 27} \right\}$$

La masa del sólido Q como la integral triple

$$m = \int_0^{\arctan 2} \int_0^{2\pi} \int_{\sec \phi}^{3 \cos \phi + \sqrt{9 \cos^2 \phi + 27}} (\rho \sin \theta \sin \phi)^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

Primero:

$$I = \int \left. \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_{\sec \phi}^{3 \cos \phi + \sqrt{9 \cos^2 \phi + 27}} \right. \sin^2 \theta \sin^3 \phi \rho^4 d\rho = \sin^2 \theta \sin^3 \phi \left[\left(3 \cos \phi + \sqrt{9 \cos^2 \phi + 27} \right)^5 - \sec^5 \phi \right]$$

$$I = \frac{1}{5} \sin^2 \theta \sin^3 \phi \left(\left(3 \cos \phi + \sqrt{9 \cos^2 \phi + 27} \right)^5 - \sec^5 \phi \right)$$

Segundo:

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5} \sin^2 \theta \sin^3 \phi \left(\left(3 \cos \phi + \sqrt{9 \cos^2 \phi + 27} \right)^5 - \sec^5 \phi \right) d\theta$$

donde

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin(2\theta) \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$J = \frac{\pi}{5} \sin^3 \phi \left(\left(3 \cos \phi + \sqrt{9 \cos^2 \phi + 27} \right)^5 - \sec^5 \phi \right)$$

Tercero:

$$m = \int_0^{\arctan 2} \frac{\pi}{5} \sin^3 \phi \left(\left(3 \cos \phi + \sqrt{9 \cos^2 \phi + 27} \right)^5 - \sec^5 \phi \right) d\phi = 3865,42$$

La masa del sólido Q es aproximadamente 3865,42 kg.

□

2.3.3. Momentos de inercia

Utilizando las mismas consideraciones anteriores para el cálculo de masa de una región acotada $B \subset \mathbb{R}^3$ con distribución de densidad dada en unidad de masa por unidad de volumen, $\rho(x, y, z)$, para todo $(x, y, z) \in B$.

El momento de inercia de la región $B \subset \mathbb{R}^3$ con respecto al eje X , denotado I_x está dada por la integral triple

$$I_x(B) = \iiint_B (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV. \quad (2.26)$$

De manera similar llegamos al momento de inercia de la región $B \subset \mathbb{R}^3$ relativo al eje Y , denotado I_y está dada por la integral triple

$$I_y(B) = \iiint_B (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV. \quad (2.27)$$

El momento de inercia de la región $B \subset \mathbb{R}^3$ en relación con el eje Z , denotado I_z también se llega tomando la siguiente integral triple

$$I_z(B) = \iiint_B (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV. \quad (2.28)$$

El centro de gravedad de una región finita $B \subset \mathbb{R}^3$ con una distribución de densidad de masa $\rho(x, y, z)$, para todo $(x, y, z) \in B$, es el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ definido por

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}(B)}{m(B)} ; \bar{y} = \frac{M_{xz}(B)}{m(B)} \text{ y } \bar{z} = \frac{M_{xy}(B)}{m(B)}.$$

Ejemplo 2.16

El sólido B está acotado por las superficies

$$z = \sqrt{y}, y + z = 2, x = 0, z = 0, x = 2.$$

Si la densidad volumétrica en cada punto $P(x, y, z)$ está dada por $\rho(x, y, z) = z$, determine los momentos de inercia del sólido con respecto a los ejes coordenados.

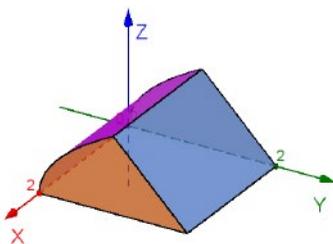


Figura 2.31: sólido B del ejemplo 2.16

Solución.

Al proyectar el sólido sobre el plano YZ obtenemos la región

$$D = \{(y, z) : 0 \leq z \leq 1 \wedge z^2 \leq y \leq 2 - z\},$$

que apreciamos en la figura 2.32 y, para cual, $0 \leq x \leq 2$.

Con esto se tiene que

$$I_x(B) = \int_0^1 \int_{z^2}^{2-z} \int_0^2 (y^2 + z^2) z dx dy dz.$$

Al evaluar las integrales iteradas se obtiene

$$I_x(B) = \int_0^1 \int_{z^2}^{2-z} 2z (y^2 + z^2) dy dz.$$

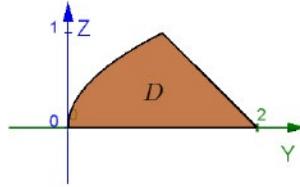


Figura 2.32: Proyección del sólido B sobre el plano YZ

La integral respecto de y se resuelve como sigue

$$\begin{aligned} \int_{z^2}^{2-z} 2z(y^2 + z^2) dy &= \left. \frac{2}{3}y^3z + 2yz^3 \right|_{z^2}^{2-z} \\ &= \frac{2}{3}z(2-z)^3 + 2z^3(2-z) - \left(\frac{2}{3}z(z^2)^3 + 2z^3(z^2) \right) \\ &= -\frac{2}{3}z^7 - 2z^5 - \frac{8}{3}z^4 + 8z^3 - 8z^2 + \frac{16}{3}z \end{aligned}$$

Finalmente

$$I_x(B) = \int_0^1 \left(-\frac{2}{3}z^7 - 2z^5 - \frac{8}{3}z^4 + 8z^3 - 8z^2 + \frac{16}{3}z \right) dz = \frac{21}{20}.$$

En segundo lugar,

$$I_y(B) = \int_0^1 \int_{z^2}^{2-z} \int_0^2 (x^2 + z^2) z dx dy dz.$$

De donde

$$\int_0^2 (x^2 + z^2) dx = z \left(\frac{1}{3}x^3 + xz^2 \right) \Big|_0^2 = z \left(\frac{1}{3}(2^3) + 2z^2 \right) = 2z^3 + \frac{8}{3}z.$$

Al integrar respecto de y se llega a

$$\int_{z^2}^{2-z} \left(2z^3 + \frac{8}{3}z \right) dy = \left(2z^3 + \frac{8}{3}z \right) (2 - z - z^2).$$

Finalmente, se resuelve la integral en la variable z :

$$\begin{aligned} I_y(B) &= \int_0^1 \left(2z^3 + \frac{8}{3}z \right) (2 - z - z^2) dz \\ &= \int_0^1 \left(-2z^5 - 2z^4 + \frac{4}{3}z^3 - \frac{8}{3}z^2 + \frac{16}{3}z \right) dz \\ &= \frac{62}{45}. \end{aligned}$$

En tercer lugar, calculamos el momento con respecto del eje Z .

$$I_z(B) = \int_0^1 \int_{z^2}^{2-z} \int_0^2 (x^2 + y^2) z dx dy dz.$$

Resolvemos la integral respecto de x :

$$\int_0^2 z (x^2 + y^2) dx = z \left(\frac{1}{3}x^3 + xy^2 \right) \Big|_0^2 = z \left(\frac{1}{3}(2^3) + 2y^2 \right) = \left(2y^2 + \frac{8}{3} \right) z.$$

Al integrar respecto de y se llega a

$$\begin{aligned} \int_{z^2}^{2-z} \left(2y^2 + \frac{8}{3} \right) z dy &= z \left(\frac{2}{3}y^3 + \frac{8}{3}y \right) \Big|_{z^2}^{2-z} \\ &= z \left(\left(\frac{2}{3}(2-z)^3 + \frac{8}{3}(2-z) \right) - \left(\frac{2}{3}(z^2)^3 + \frac{8}{3}(z^2) \right) \right) \\ &= -\frac{2}{3}z^7 - \frac{2}{3}z^4 + \frac{4}{3}z^3 - \frac{32}{3}z^2 + \frac{32}{3}z. \end{aligned}$$

Por último

$$I_z(B) = \int_0^1 \left(-\frac{2}{3}z^7 - \frac{2}{3}z^4 + \frac{4}{3}z^3 - \frac{32}{3}z^2 + \frac{32}{3}z \right) dz = \frac{341}{180}.$$

□

2.3.4. Problemas propuestos

2.1 Calcule la integral triple $\iiint_R xyz^2 dV$, donde R es la caja rectangular dada por $R = [0, 1] \times [-1, 2] \times [0, 3]$.

2.2 Calcule la integral triple $\iiint_R x^2 y z^3 dV$, donde R es la caja rectangular dada por $R = [-1, 1] \times [0, 3] \times [0, 1]$.

2.3 Calcule las siguientes integrales triples

a) $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (x + y + z) dx dy dz.$

b) $\int_1^e \int_e^{e^2} \int_1^e \frac{1}{xyz} dy dz dx.$

c) $\int_1^2 \int_0^1 \int_{-1}^1 (xe^{xy} - zx^2) dy dx dz.$

d) $\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \text{sen}(x + y + z) dz dx dy.$

e) $\int_1^2 \int_0^1 \int_2^3 (x^2 + \ln y + z) dx dz dy.$

f) $\int_1^2 \int_1^2 \int_1^2 (1 + x) e^z y dz dy dx.$

2.4 Calcule la integral triple iterada

$$\int_{3\pi/2}^{2\pi} \int_1^3 \int_0^\pi z \text{sen } x \cos y dx dz dy.$$

2.5 Calcule la integral triple $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2} dV$, usando el orden de integración $dx dz dy$, si B es el sólido limitado por el plano $z = 7$ y por el paraboloides $16z = x^2 + y^2$.

2.6 Calcule la integral triple $\iiint_B 2x dV$, donde

$$B = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq y + z ; 0 \leq y \leq z ; 1 \leq z \leq 2\}.$$

2.7 Calcule la integral triple $\iiint_B z dV$, donde B es la región del primer octante limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 1$.

2.8 Evalúe la integral triple $\iiint_B (\sin x + \sin y) dV$ sobre la región limitada

$$B = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; -\cos x \leq y \leq \cos x; -1 \leq z \leq 1 \right\}.$$

2.9 Evalúe la integral triple $\iiint_B y dV$ sobre la región limitada

$$B = \left\{ (x, y, z) : -1 \leq x \leq 1; -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}; 0 \leq z \leq 1-x^2-y^2 \right\}.$$

2.10 Calcule la integral triple $\iiint_B (y \ln x + z) dV$, donde

$$B = \{(x, y, z) : 1 \leq x \leq e; 0 \leq y \leq \ln x; 0 \leq z \leq 1\}.$$

2.11 Calcule las siguientes integrales triples

- a) $\int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x x dz dy dx.$
- b) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z dz dy dx.$
- c) $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-z}} \int_0^x \frac{\sin(2z)}{4-z} dy dx dz.$
- d) $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^2 \int_0^{\sqrt{z-x^2}} x dy dz dx.$
- e) $\int_0^3 \int_0^{3-z} \int_0^{\frac{3-x-z}{2}} \sin(x+z) dy dx dz.$
- f) $\int_0^3 \int_0^4 \int_{y/2}^{1+y/2} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3} \right) dx dy dz.$
- g) $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^{xy} xyz dz dy dx.$

2.12 Calcule las siguientes integrales triples

- a) $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy dx dz.$
- b) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} xyz dz dy dx.$

$$c) \int_0^1 \int_x^{x^2} \int_0^1 (x + y + z) dz dy dx.$$

$$d) \int_{-1}^1 \int_0^1 \int_0^{1-z^2} z dx dz dy.$$

$$e) \int_0^5 \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} (x + y + z) dy dx dz.$$

2.13 Dada la integral triple

$$\int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^{\sqrt{9-z^2}} xyz dy dz dx.$$

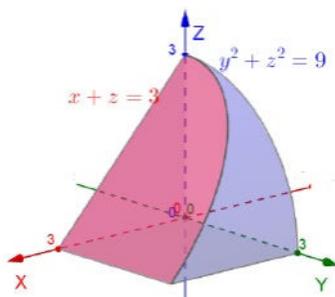
Modele las integrales triples iteradas en los órdenes $dx dy dz$ y $dx dz dy$.

2.14 Dada la integral triple

$$\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Modele las integrales triples iteradas en los órdenes $dy dx dz$, $dz dx dy$ y $dx dz dy$.

2.15 En la gráfica adjunta se muestra el sólido B .



Al modelar la integral triple $\iiint_B f(x, y, z) dV$ en el orden $dz dx dy$ se obtiene

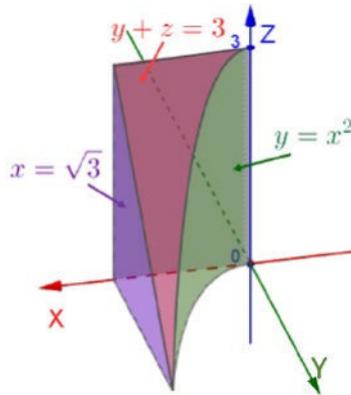
$$\int_0^3 \int_{g(y)}^a \int_0^{h(x,y)} f(x, y, z) dz dx dy + \int_0^a \int_0^{3-\sqrt{9-y^2}} \int_b^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y, z) dz dx dy.$$

Por consiguiente $a =$ _____, $b =$ _____, $g(y) =$ _____ y $h(x, y) =$ _____

2.16 Dada la integral triple

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} y dz dx dy.$$

Modele las integrales triples iteradas en los órdenes $dz dy dx$, $dy dx dz$ y $dx dz dy$.



2.17 En la gráfica adjunta se muestra el sólido B . Modele las integrales triples iteradas en los órdenes $dx dy dz$, $dz dx dy$ y $dy dz dx$ para la integral triple $\iiint_B 2x^2 y z^3 dV$.

2.18 Si B es el sólido limitado por los planos

$$x + y = 4, y - x = 4, y = 0, y + 2z = 8, y - 2z = 0,$$

modele dos integrales triples iteradas, en los órdenes $dz dx dy$ y $dx dz dy$, para la integral triple $\iiint_B (2x + yz) dV$.

2.19 Describa las siguientes regiones del espacio en coordenadas cilíndricas:

- a) La región B limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y por los planos $z = 0$ y $z = 5$.
- b) La región B limitada por $z = x^2 + y^2$ y por los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 4$.
- c) La región B limitada por $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1 - x^2 - y^2$ y por el plano $z = 4$.
- d) La región B limitada por las gráficas de $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$ y $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- e) La región B limitada por las gráficas de $z = 9 - x^2 - y^2$ y $z = 1 + x^2 + y^2$.

2.20 Supongamos que B es la región delimitada por debajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y por encima por el paraboloides $z = 2 - x^2 - y^2$. Modele una integral triple iterada en coordenadas cilíndricas para $\iiint_B xy dV$ en el orden $dr dz d\theta$.

2.21 Calcule las siguientes integrales triples usando el cambio de variables a coordenadas cilíndricas.

- a) $\iiint_B (x^2 + y^2) dV$, donde B es el sólido ubicado en el primer octante, limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 = 9$.

b) $\iiint_B (x^2 + y^2) dV$, donde B es el sólido limitado por la hoja superior del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y los planos $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

c) $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2} dV$, donde

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2 ; 0 \leq z \leq 1\}.$$

2.22 Calcule las siguientes integrales triples usando el cambio de variables a coordenadas cilíndricas.

a) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z dz dy dx.$

b) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^4 z \sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx.$

c) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx.$

2.23 Describa las siguientes regiones del espacio en coordenadas esféricas:

a) La región B limitada por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

b) La región B limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y los conos $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ y $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$.

c) La región B limitada por $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$.

2.24 Usando coordenadas esféricas, calcule la integral triple $\iiint_B \frac{1}{\rho} dV$, donde B es la región del primer octante acotada por los conos $\phi = \frac{\pi}{4}$ y $\phi = \arctan 2$ y la esfera $\rho = \sqrt{6}$.

2.25 Calcule las siguientes integrales triples usando el cambio de variables a coordenadas esféricas.

a) $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$, donde B es el sólido limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

b) $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \frac{1}{z} dz dy dx.$

2.26 Determine el volumen del sólido B limitado por las gráficas de las funciones $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$.

2.27 Determine el volumen del tetraedro B limitado por los planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ y $z = 0$.

2.28 Calcule el volumen del sólido limitado por las superficies $z^2 = x^2 + y^2$, $2z = x^2 + y^2$, $z = 1$ y $z = \frac{1}{2}$.

2.29 Determine el volumen del sólido B limitado por el cilindro $x = y^2$ y por los planos $x = z$, $x = 1$ y $z = 0$.

2.30 Calcule el volumen del sólido acotado por los planos $y = 0$, $y + z = 6$, $z = 0$ y por el cilindro $z = 4 - x^2$.

2.31 Calcule el volumen del sólido acotado por los cilindros $x^2 + z^2 = 9$ y $x^2 + y^2 = 9$, ubicado en el primer octante.

2.32 Determine el volumen del sólido B limitado por las gráficas de $z = 1 - y$, $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ y $z = 0$.

2.33 Calcule el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y por los planos $z = 1$ y $x + z = 5$.

2.34 Determine el volumen del sólido limitado por los planos $x + z = 1$; $x - z = 1$; $y = -1$; $y = 1$ y $z = 0$.

2.35 Calcule el volumen del sólido limitado por el cilindro parabólico $z = 4 - x^2$ y por los planos $x = 0$, $y = 0$, $y = 6$ y $z = 0$.

2.36 Determine el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie $z = e^{x-y} \cos(x+y)$, inferiormente por al plano XY y lateralmente por los planos $y = x + \frac{\pi}{2}$, $y = -x + \frac{\pi}{2}$, $y = x - \frac{\pi}{2}$ y $y = -x - \frac{\pi}{2}$.

2.37 Calcule el volumen del sólido limitado por el plano $z = 3$ y por los conos $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$.

2.38 Calcule la masa del sólido limitado por las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, si su densidad volumétrica está dada por $\rho(x, y, z) = z$.

2.39 Determine el centro de masa de la región del espacio representado por

$$B = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq 1 ; 0 \leq x \leq 1 - y ; 0 \leq z \leq x + y\}$$

cuya densidad está dada por $\rho(x, y, z) = y$.

2.40 Determine las coordenadas del centro de masa de la región

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 ; z \geq 0\}$$

si la densidad en cada punto de ella es constante.

2.41 La región del espacio, ubicada en el primer octante, está limitada por los planos $2x + y + z = 1$ y los tres planos coordenados. Si su densidad está dada por la función $\rho(x, y, z) = z$, determine el centro de masa.

2.42 Calcule el volumen que ocupa la región del espacio interior al cilindro $x^2 + y^2 = x$ pero limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2.43 Calcule los momentos respecto de los planos coordenados y el centro de gravedad del sólido limitado por el cilindro parabólico $z = 4 - x^2$ y por los planos $x = 0$, $y = 0$, $y = 6$ y $z = 0$.

2.44 Determine las coordenadas del centro de masa de un cubo cuya arista mide 2 unidades y tiene un vértice inferior localizado en el origen de coordenadas, si la densidad volumétrica en cada punto $P(x, y, z)$ del cubo es proporcional al cuadrado de su distancia al origen de coordenadas.

2.45 Determine la coordenada \bar{z} del centro de gravedad del sólido limitado por $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$.

2.46 Calcule la abscisa \bar{x} del centro de masa del tetraedro, ubicado en el primer octante, limitado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$, sabiendo que su densidad volumétrica en cada punto $P(x, y, z)$ es igual a la distancia de P al plano $z = 0$.

2.47 Calcule el momento de inercia con respecto al eje Z del sólido B ubicado en el primer octante, delimitado por el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

2.48 Sea B la región del espacio limitada por el cilindro $y^2 + z^2 = 9$ y los planos $x = 0$, $y = 3x$ y $z = 0$ en el primer octante. Si en cada punto (x, y, z) la función de densidad volumétrica dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, calcule su masa, su centro de masa y el momento de inercia con respecto del eje Z .

2.49 Calcule el momento inercia, respecto al eje de simetría, del sólido acotado por el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$, sabiendo que la densidad volumétrica en cada punto $P(x, y, z)$ es igual a la distancia de P al eje Z .

2.50 Sea B el sólido limitado por las superficies $2z = y^2 + x^2$ y $z = 2$. Si en cada punto (x, y, z) la función de densidad volumétrica dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, calcule su masa, su centro de masa y el momento de inercia con respecto del eje Z .

3

Curvas en el espacio euclidiano

\mathbb{R}^m

En la vida cotidiana, la geometría juega un papel crucial para entender el mundo que nos rodea, ya que todo lo que observamos o manipulamos tiene una forma geométrica determinada que van desde simples líneas rectas o curvas hasta superficies.

En este capítulo, estudiaremos las curvas conceptualizándolas, en un primer momento, como aplicaciones o funciones definidas sobre intervalos de números reales cuya imagen recaerá en el espacio euclidiano \mathbb{R}^m . Este tipo de función, llamada función vectorial de una sola variable admite como dominio un número real y nos devuelve un vector como imagen.

Este primer enfoque permite introducir conceptos del cálculo como límite, derivada e integral. Además, como veremos, estos conceptos, asociados a las curvas como funciones, acaban siendo intrínsecos a sus conjuntos de imágenes llamadas traza de la función lo que otorgará plena legitimidad a la teoría.

En un segundo momento, apreciaremos a las curvas como conjuntos de puntos en el espacio euclidiano \mathbb{R}^m , específicamente para $m = 2$ y $m = 3$.

Asimismo, nos sumergiremos brevemente en la teoría de curvas regulares en el plano \mathbb{R}^2 , así como en el espacio \mathbb{R}^3 . Vale destacar que estas curvas se caracterizan por admitir, en cada uno de sus puntos, una recta tangente.

Terminaremos el capítulo estudiando las curvas cuyo dominio consta de un intervalo cerrado $[a, b]$ a las que llamaremos *arcos* y que serán cruciales en el capítulo de integrales de línea.

3.1 Funciones vectoriales de variable real

En términos generales, una función con valores vectoriales, también conocida como función vectorial, es una función de una o más variables cuyo rango es un conjunto de vectores multidimensionales. Acotaremos nuestro ámbito de estudio a las funciones vectoriales que dependen de una variable, es decir aquellas cuya entrada es un escalar. Ese tipo de funciones proporcionan un método útil para estudiar las curvas tanto en el plano como en el espacio tridimensional y son útiles para representar los conceptos como la velocidad, la aceleración y la trayectoria de un objeto.

Definición 3.1 [Función vectorial]

Una **función vectorial** α , cuyo dominio es un conjunto de números reales I , asocia a cada número real $t \in I$ un único vector en \mathbb{R}^m , para $m \geq 2$.

En virtud de la definición anterior, a la función vectorial α se la denotará por

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\mapsto \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_m(t)) \end{aligned}$$

Las m funciones $\alpha_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, con $i = 1, \dots, m$, son llamadas funciones coordenadas de α y a la variable t se le denomina parámetro.

El dominio de una función vectorial $\alpha(t)$, que denotaremos por $I = \text{Dom}(\alpha)$, es el conjunto de valores de t para los cuales se define $\alpha(t)$. Si la función se define en términos de las funciones de las componentes y no se especifica explícitamente el dominio, entonces se sobreentiende que el dominio resulta de la intersección de los dominios de las funciones coordenadas, es decir,

$$I = \text{Dom}(\alpha) := \bigcap_{i=1}^m \text{Dom}(\alpha_i).$$

Debido a que la imagen de cada número real t , perteneciente al dominio de la función, es un vector, explicitar la imagen de α significa dar a conocer cada una de las componentes de dicho vector. A su vez, cada componente del vector imagen es una función real de la variable t , en consecuencia, la función vectorial es una m -tupla de funciones reales en t y, por consiguiente, todas las propiedades de α , como veremos más adelante, descansan en las propiedades de las funciones componentes.

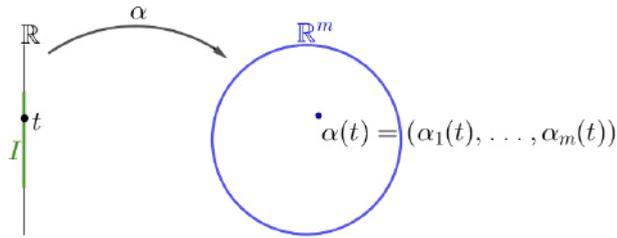


Figura 3.1: Función vectorial

Ejemplo 3.1

Determine el dominio de las siguientes funciones vectoriales

1. $\alpha(t) = (\sqrt{t^2 - 4}, \ln(t - 1))$.
2. $\beta(t) = \left(\frac{4}{2t - 1}, e^{\sqrt[4]{t}}, \arcsen t\right)$

Solución.

El proceso para determinar el dominio de α inicia escribiendo $\alpha_1(t) = \sqrt{t^2 - 4}$, cuyo dominio se obtiene como sigue

$$t^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow t \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[.$$

En el mismo orden de ideas, el dominio de $\alpha_2(t) = \ln(t - 1)$ resulta ser

$$t - 1 > 0 \Leftrightarrow t > 1.$$

Finalmente, al intersectar los conjuntos previamente obtenidos se llega al dominio de α , es decir

$$\begin{aligned} \text{Dom}(\alpha) &= \text{Dom}(\alpha_1) \cap \text{Dom}(\alpha_2) \\ &= (]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[) \cap]1, +\infty[\\ &= [2, +\infty[. \end{aligned}$$

Procedemos con la misma estrategia para la función β , sin embargo, en esta ocasión se determinan el dominio de tres funciones coordenadas.

En efecto, el dominio de $\beta_1(t) = \frac{4}{2t - 1}$ resulta $\text{Dom}(\beta_1) = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$; el de $\beta_2(t) = e^{\sqrt[4]{t}}$ será $\text{Dom}(\beta_2) = [0, +\infty[$ y la función $\beta_3(t) = \arcsen t$ está definida para $\text{Dom}(\beta_3) = [-1, 1]$.

Finalmente, al intersectar los conjuntos obtenidos se tendrá

$$\begin{aligned} \text{Dom}(\beta) &= \text{Dom}(\beta_1) \cap \text{Dom}(\beta_2) \cap \text{Dom}(\beta_3) \\ &= (\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}) \cap [0, +\infty[\cap [-1, 1] \\ &= [0, 1] - \{\frac{1}{2}\}. \end{aligned}$$

□

N

El **rango** de una función vectorial es la colección de todos los vectores $\alpha(t)$. Puede visualizarse viendo cada $\alpha(t)$ como un vector de posición, es decir, todos los vectores del rango se representan de modo que tengan un punto inicial común (el origen). La colección de todos los puntos terminales de los vectores de posición definidos por una función vectorial $\alpha(t)$ se llama gráfica de la función vectorial.

Definición 3.2 [Traza o imagen]

Al conjunto $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^m$, formado por las imágenes de α , se le asigna el nombre de **traza** de $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, es decir

$$\text{traza}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(I) = \{\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t)) \in \mathbb{R}^m; t \in I\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Observación 5 Es primordial no confundir a la función vectorial α con su traza.

Es claro que la imagen $\alpha(I)$ es un subconjunto de \mathbb{R}^m y determina una curva en él. Por otro lado, una curva en \mathbb{R}^m puede estar determinada por diferentes funciones vectoriales. De este y otros detalles nos ocuparemos más adelante en una sección dedicada exclusivamente al estudio de las curvas.

Intuitivamente, es válido imaginar la traza de la función α como la huella que dejan sus imágenes mientras discurren en el espacio donde viven.

Cuando $n = 2$, se tiene

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

La notación anterior, expresada en términos de los vectores canónicos de \mathbb{R}^2 , se escribe $\alpha(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.

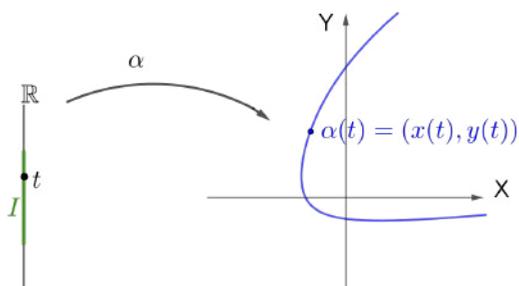


Figura 3.2: Traza en \mathbb{R}^2 de la función α .

Ejemplo 3.2

Las funciones

- $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\alpha(t) = (1 - t^2, t)$ y
- $\beta : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\beta(t) = e^t \vec{i} + 2e^t \vec{j}$

son funciones vectoriales cuya imagen recae en \mathbb{R}^2 .

Cuando $n = 3$, se tiene

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Si usamos los vectores canónicos de \mathbb{R}^3 , una función vectorial también se escribe como $\alpha(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}$.

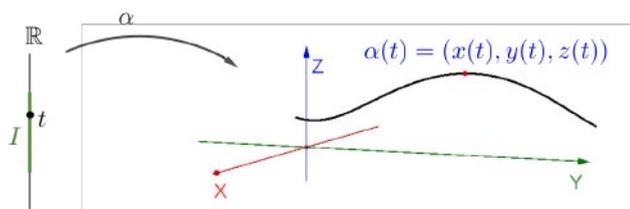


Figura 3.3: Traza en \mathbb{R}^3 de la función α .

Intuitivamente, podemos visualizar la traza de una función vectorial α como la “huella” de las imágenes de α que dejan en el espacio donde viven dichas imágenes.

Ejemplo 3.3

Las funciones

- $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $\alpha(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + 4 \vec{k}$ y
- $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $\beta(t) = (1 - t, 2 + 3t, 4 + t)$

son funciones vectoriales cuyas respectivas imágenes yacen en \mathbb{R}^3 .

3.1.1. Operaciones con funciones vectoriales de una variable Real

De la misma manera que se hizo para funciones reales de variable real, pasaremos a definir las operaciones habituales entre ellas, como la suma, diferencia o multiplicación por un escalar. Además, fijaremos con precisión y claridad nuevas operaciones, como se puede ver en la siguiente definición.

Definición 3.3 [Álgebra de funciones]

Considere las funciones vectoriales de variable real $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definidas sobre el conjunto $I \subset \mathbb{R}$ y la constante $k \in \mathbb{R}$. Se definen:

[SF] la función $\alpha + \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, llamada la suma de α y β , cuya regla de correspondencia es

$$(\alpha + \beta)(t) = \alpha(t) + \beta(t), \text{ para todo } t \in I.$$

[DF] la función $\alpha - \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, llamada la diferencia de α y β , cuya regla de correspondencia es

$$(\alpha - \beta)(t) = \alpha(t) - \beta(t), \text{ para todo } t \in I.$$

[ME] la función $k\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, llamada multiplicación de α por un escalar k , dada por

$$(k\alpha)(t) = k\alpha(t), \text{ para todo } t \in I.$$

[FE] la función $f\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, llamada el producto de α por la función escalar f , dada por

$$(f\alpha)(t) = f(t)\alpha(t), \text{ para todo } t \in I.$$

[QF] si $f(t) \neq 0, \forall t \in I$, la función $\frac{\alpha}{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, llamada cociente de α entre la función escalar f , dada por

$$\left(\frac{\alpha}{f}\right)(t) = \frac{\alpha(t)}{f(t)}, \text{ para todo } t \in I.$$

[PE] la función $\alpha \cdot \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, llamada producto escalar α y β , dada por

$$(\alpha \cdot \beta)(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t), \text{ para todo } t \in I.$$

[PV] si $m = 3$, la función $\alpha \times \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, llamada producto vectorial α y β , dada por

$$(\alpha \times \beta)(t) = \alpha(t) \times \beta(t), \text{ para todo } t \in I.$$

Las operaciones definidas anteriormente también pueden expresarse en términos de las funciones componentes.

Si $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$ y $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_m(t))$ entonces para cualquier $t \in I$, la suma (diferencia) de α y β se obtiene sumando (restando) componente a componente, es decir

$$\begin{aligned} (\alpha \pm \beta)(t) &= \alpha(t) \pm \beta(t) \\ &= (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t)) \pm (\beta_1(t), \dots, \beta_m(t)) \\ &= (\alpha_1(t) \pm \beta_1(t), \dots, \alpha_m(t) \pm \beta_m(t)). \end{aligned}$$

De la misma manera se muestra el producto escalar de α y β :

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot \beta)(t) &= \alpha(t) \cdot \beta(t) \\ &= (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t)) \cdot (\beta_1(t), \dots, \beta_m(t)) \\ &= \alpha_1(t)\beta_1(t) + \dots + \alpha_m(t)\beta_m(t) \end{aligned}$$

que resulta ser una función real de variable real.

Si $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ y $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t))$ entonces para cualquier $t \in I$, el producto vectorial α y β se expresa por

$$\begin{aligned} (\alpha \times \beta)(t) &= \alpha(t) \times \beta(t) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \\ &= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.4

Si las funciones $\alpha(t) = (3t^3, 2t^2, t)$, $\beta(t) = (\cos t, \sin t, t)$ y $f(t) = t^2 + 1$ están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, determine la regla de correspondencia de las funciones $\alpha + 3\beta$, $\frac{\alpha}{f}$, $\alpha \times \beta$, $\alpha \cdot \beta$ y $f\beta$.

Solución.

Las reglas de correspondencia de cada función siguen de la aplicación directa de la definición anterior.

a)

$$\begin{aligned}(\alpha + 3\beta)(t) &= \alpha(t) + 3\beta(t) = (3t^3, 2t^2, t) + 3(\cos t, \sin t, t) \\ &= (3\cos t + 3t^3, 3\sin t + 2t^2, 4t)\end{aligned}$$

$$\text{b) } \left(\frac{\alpha}{f}\right)(t) = \frac{\alpha(t)}{f(t)} = \frac{(3t^3, 2t^2, t)}{t^2 + 1} = \left(\frac{3t^3}{t^2 + 1}, \frac{2t^2}{t^2 + 1}, \frac{t}{t^2 + 1}\right).$$

c)

$$\begin{aligned}(\alpha \times \beta)(t) &= \alpha(t) \times \beta(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3t^3 & 2t^2 & t \\ \cos t & \sin t & t \end{vmatrix} \\ &= (2t^3 - t \sin t, -3t^4 + t \cos t, 3t^3 \sin t - 2t^2 \cos t).\end{aligned}$$

$$\text{d) } (\alpha \cdot \beta)(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t) = (3t^3, 2t^2, t) \cdot (\cos t, \sin t, t) = t^2 + 3t^3 \cos t + 2t^2 \sin t.$$

e)

$$\begin{aligned}(f\beta)(t) &= f(t)\beta(t) = (t^2 + 1)(\cos t, \sin t, t) \\ &= ((t^2 + 1)\cos t, (t^2 + 1)\sin t, t^3 + t).\end{aligned}$$

□

Para estudiar el cálculo de funciones con valores vectoriales, seguimos un camino similar al que tomamos al estudiar funciones con valores reales. Primero, definimos el límite, a continuación la derivada y examinamos sus aplicaciones para luego pasar a definir la integral. Sin embargo, encontraremos algunas ideas nuevas e interesantes a lo largo del camino como resultado de la naturaleza vectorial de estas funciones, especialmente aquellas cuya imagen recae en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 .

3.1.2. Límite y continuidad de una función vectorial

En esta sección extenderemos el concepto de límite de una función real de una variable real a las funciones vectoriales de una variable real. El límite de una función vectorial de una variable real, y de cualquier otra función, debe definirse en puntos de acumulación del dominio de dicha función.

El concepto de límite para las funciones vectoriales tiene el mismo significado intuitivo: $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \vec{b}$ significa que $\alpha(t)$ puede hacerse arbitrariamente cercana al vector \vec{b} tomando a t suficientemente cerca de t_0 , pero distinto de t_0 . Como en \mathbb{R}^m la distancia de $\alpha(t)$ a \vec{b} es $\|\alpha(t) - \vec{b}\|$, la definición formal de $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t)$ es:

Definición 3.4 [Límite de una función vectorial]

Sean $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ un vector de \mathbb{R}^m , t_0 es un punto de acumulación de I y $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función definida en el conjunto $I \subset \mathbb{R}$. Entonces decimos que el vector \vec{b} es el límite de α en t_0 y escribimos

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = (b_1, b_2, \dots, b_m) = \vec{b}$$

si dado $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que $t \in I$ y $0 < |t - t_0| < \delta$ implican que $\|\alpha(t) - \vec{b}\| < \varepsilon$.

(N) En esta definición no se exige que α esté definida en el mismo punto t_0 .

Desde la perspectiva del cálculo de límite de una función vectorial de una variable real, el teorema siguiente expresa que el límite de dichas funciones es el vector cuyos componentes son los límites de las correspondientes componentes de la función. Esto significa que el límite de una función vectorial puede calcularse utilizando los límites de las funciones componentes

Teorema 3.1

Sean $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ es un vector de \mathbb{R}^m , t_0 es un punto de acumulación de I y $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función definida en el conjunto $I \subset \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = (b_1, b_2, \dots, b_m) = \vec{b}$$

si y solamente si $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha_i(t) = b_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, m$.

Prueba 3.1 Para demostrar que, para cada $i = 1, 2, \dots, m$, $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \vec{b}$ implica que $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha_i(t) = b_i$, procedemos según la definición. En efecto, se tiene que si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = (b_1, b_2, \dots, b_m) = \vec{b}$$

entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que si $0 < |t - t_0| < \delta$ entonces

$$\begin{aligned} \|\alpha(t) - \vec{b}\| &= \|(\alpha_1(t) - b_1, \alpha_2(t) - b_2, \dots, \alpha_m(t) - b_m)\| \\ &= \left(\sum_{i=1}^m (\alpha_i(t) - b_i)^2 \right)^{1/2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Observe que para cada $i = 1, 2, \dots, m$ se cumple que

$$|\alpha_i(t) - b_i| \leq \|\alpha(t) - \vec{b}\| < \varepsilon,$$

es por ello que $|\alpha_i(t) - b_i| < \varepsilon$ siempre que $t \in I$. Se ha verificado que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\alpha_i(t) - b_i| < \varepsilon$$

por lo tanto $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha_i(t) = b_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, m$.

Recíprocamente, para cada $i = 1, 2, \dots, m$, de la afirmación $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha_i(t) = b_i$ viene que para todo $\varepsilon_i > 0$, existe un número $\delta_i > 0$ tal que si $0 < |t - t_0| < \delta_i$ entonces $|\alpha_i(t) - b_i| < \varepsilon_i$.

Consideremos $\varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$, con $\varepsilon > 0$ y $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$. Con este valor de δ y para cada $i = 1, 2, \dots, m$, se tiene

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\alpha_i(t) - b_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},$$

por consiguiente

$$\|\alpha(t) - \vec{b}\| = \left(\sum_{i=1}^m (\alpha_i(t) - b_i)^2 \right)^{1/2} < \left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \right)^2 \right)^{1/2} = \varepsilon,$$

con lo que se demuestra que $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \vec{b}$.



Del teorema se desprende que el límite de α , cuando t tiende a t_0 , existe y es igual a $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ si y sólo si el límite de todas sus funciones coordenadas α_i , $i = 1, \dots, m$, cuando t tiende a t_0 , existe y es igual a b_i , $i = 1, \dots, m$, respectivamente.

A título ilustrativo se mostrará en los siguientes ejemplos, la aplicación de la definición de límite, su interpretación geométrica y el cálculo de límites de funciones vectoriales en virtud del teorema 3.1.

Ejemplo 3.5

Calcule $\lim_{t \rightarrow 1} (2t^2, t^3)$ y demuestre el valor del límite obtenido.

Solución.

Para t próximo a 1 vemos que $\alpha(t)$ está cerca de $\vec{b} = (2, 1)$, así que suponemos que $\lim_{t \rightarrow 1} (2t^2, t^3) = (2, 1)$.

Para verificar este resultado debemos demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |t - 1| < \delta$ entonces $\|(2t^2, t^3) - (2, 1)\| < \varepsilon$, siempre que $t \in \text{Dom}(\alpha)$.

En efecto,

$$\|(2t^2, t^3) - (2, 1)\| = \sqrt{(2t^2 - 2)^2 + (t^3 - 1)^2} < \varepsilon$$

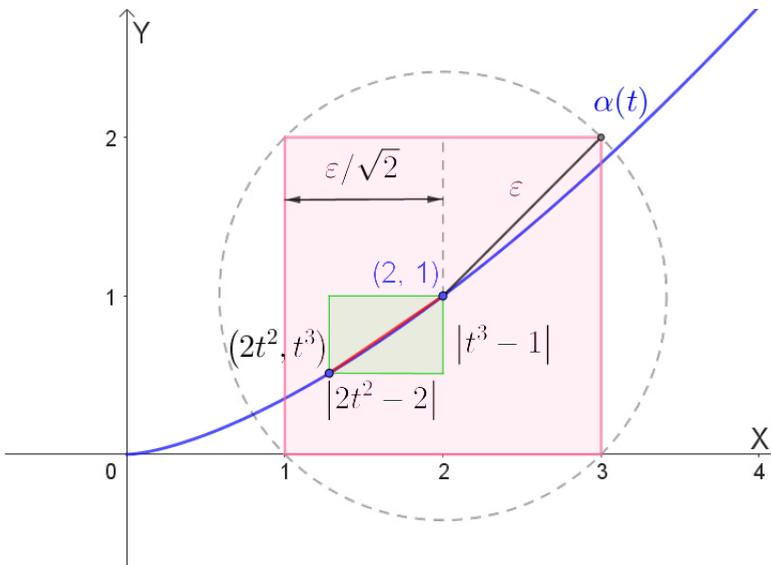


Figura 3.4: Interpretación geométrica de límite

siempre que

$$|2t^2 - 2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad |t^3 - 1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

que se puede apreciar geoméricamente en la figura 3.4.

De otro lado, $\lim_{t \rightarrow 1} 2t^2 = 2$ si y solo si para $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ existe $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |t - 1| < \delta_1$ entonces $|2t^2 - 2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Así mismo $\lim_{t \rightarrow 1} t^3 = 1$ si y solo si para $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ existe $\delta_2 > 0$ tal que $0 < |t - 1| < \delta_2$ entonces $|t^3 - 1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Por lo tanto si consideramos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene

$$\begin{aligned} \|(2t^2, t^3) - (2, 1)\| &= \sqrt{(2t^2 - 2)^2 + (t^3 - 1)^2} \\ &< \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{2 \left(\frac{\varepsilon^2}{2}\right)} = \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que prueba que $\lim_{t \rightarrow 1} (2t^2, t^3) = (2, 1)$. □

La figura 3.4 permite apreciar una interpretación geométrica de la solución del ejemplo. Si elegimos el número δ de modo que la distancia de t a 1 sea siempre menor que δ , las longitudes de los lados del rectángulo serán menores que $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ y en consecuencia, la longitud de la diagonal debe ser menor que ε .

Ejemplo 3.6

Calcule $\lim_{t \rightarrow 1} (t^2 - 7t, t^2 - 6t + 8)$.

Solución.

Utilizando los límites de las funciones componentes tenemos

$$\lim_{t \rightarrow 1} (t^2 - 7t, t^2 - 6t + 8) = \left(\lim_{t \rightarrow 1} (t^2 - 7t), \lim_{t \rightarrow 1} (t^2 - 6t + 8) \right) = (-6, 3).$$

□

Ejemplo 3.7

Calcule $\lim_{t \rightarrow -3} \left(\frac{t^2 - 9}{t^2 + t - 6}, \sqrt{-3t}, \cos(\pi t) \right)$.

Solución.

Los límites de los correspondientes componentes de la función son

$$\lim_{t \rightarrow -3} \left(\frac{t^2 - 9}{t^2 + t - 6}, \sqrt{-3t}, \cos(\pi t) \right) = \left(\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 - 9}{t^2 + t - 6}, \lim_{t \rightarrow -3} \sqrt{-3t}, \lim_{t \rightarrow -3} \cos(\pi t) \right).$$

Resulta claro que al evaluar el límite de la primera componente se obtiene la forma indeterminada $\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 - 9}{t^2 + t - 6} = \frac{0}{0}$.

Para disolver esta indeterminación se procede por factorización,

$$\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 - 9}{t^2 + t - 6} = \lim_{t \rightarrow -3} \frac{(t + 3)(t - 3)}{(t + 3)(t - 2)} = \frac{6}{5}.$$

Los límites de las otras funciones componentes resultan de la aplicación directa, es decir

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -3} \left(\frac{t^2 - 9}{t^2 + t - 6}, \sqrt{-3t}, \cos(\pi t) \right) &= \left(\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 - 9}{t^2 + t - 6}, \lim_{t \rightarrow -3} \sqrt{-3t}, \lim_{t \rightarrow -3} \cos(\pi t) \right) \\ &= \left(\frac{6}{5}, 3, -1 \right). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.8

Calcule

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\left(\frac{3+t}{t+4} \right)^{\frac{t+6}{2}}, \frac{1 - \cos(3t)}{t} \right).$$

Solución.

Procedemos a calcular el límite de cada función componente. Para empezar,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{3+t}{t+4} \right)^{\frac{t+6}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{3+t}{t+4} \right)^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t+6}{2}} = \left(\frac{3}{4} \right)^3 = \frac{27}{64}.$$

En segundo lugar, observamos que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3t)}{t} = \frac{0}{0}$.

Esta situación se resuelve como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3t)}{t(1 + \cos(3t))} = \lim_{t \rightarrow 0} 3 \frac{\sin(3t)}{3t} \cdot \frac{\sin(3t)}{1 + \cos(3t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} 3 \frac{\sin(3t)}{3t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(3t)}{1 + \cos(3t)} = 3(1)(0) = 0.\end{aligned}$$

En conclusión

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\left(\frac{3+t}{t+4} \right)^{\frac{t+6}{2}}, \frac{1 - \cos(3t)}{t} \right) = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{3+t}{t+4} \right)^{\frac{t+6}{2}}, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3t)}{t} \right) = \left(\frac{27}{64}, 0 \right).$$

□

Teorema 3.2 [Propiedades de los límites]

Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ son funciones vectoriales de variable real definidas sobre el conjunto $I \subset \mathbb{R}$ y t_0 es un punto de acumulación de I , tales que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \vec{a} \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \beta(t) = \vec{b}$$

entonces

[LSF] $\lim_{t \rightarrow t_0} (\alpha + \beta)(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \beta(t) = \vec{a} + \vec{b}.$

[LDF] $\lim_{t \rightarrow t_0} (\alpha - \beta)(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) - \lim_{t \rightarrow t_0} \beta(t) = \vec{a} - \vec{b}.$

[LME] $\lim_{t \rightarrow t_0} (k\alpha)(t) = k \lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = k\vec{a}.$

[LQF] $\lim_{t \rightarrow t_0} (\alpha \cdot \beta)(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \beta(t) = \vec{a} \cdot \vec{b}.$

[LPV] Si $m = 3$, $\lim_{t \rightarrow t_0} (\alpha \times \beta)(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \beta(t) = \vec{a} \times \vec{b}.$

[LNF] $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\alpha(t)\| = \|\vec{a}\|.$

Prueba 3.2 Para la prueba de **[LQF]** expresamos la diferencia $\alpha(t) \cdot \beta(t) - \vec{a} \cdot \vec{b}$ de la siguiente manera

$$\alpha(t) \cdot \beta(t) - \vec{a} \cdot \vec{b} = (\alpha(t) - \vec{a}) \cdot (\beta(t) - \vec{b}) + \vec{a} \cdot (\beta(t) - \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\alpha(t) - \vec{a}).$$

En la expresión anterior aplicamos la desigualdad triangular y la desigualdad de Cauchy-Schwarz como sigue

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \left| \alpha(t) \cdot \beta(t) - \vec{a} \cdot \vec{b} \right| \\
 &= \left| (\alpha(t) - \vec{a}) \cdot (\beta(t) - \vec{b}) + \vec{a} \cdot (\beta(t) - \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\alpha(t) - \vec{a}) \right| \\
 &\leq \left| (\alpha(t) - \vec{a}) \cdot (\beta(t) - \vec{b}) \right| + \left| \vec{a} \cdot (\beta(t) - \vec{b}) \right| + \left| \vec{b} \cdot (\alpha(t) - \vec{a}) \right| \\
 &\leq \|\alpha(t) - \vec{a}\| \|\beta(t) - \vec{b}\| + \|\vec{a}\| \|\beta(t) - \vec{b}\| + \|\vec{b}\| \|\alpha(t) - \vec{a}\|.
 \end{aligned}$$

Tomando el límite, cuando t se aproxima a t_0 , de cada una de las funciones del lado derecho de la desigualdad se obtiene como resultado cero. En resumidas cuentas, el teorema del sandwich permite afirmar que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \alpha(t) \cdot \beta(t) - \vec{a} \cdot \vec{b} \right| = \left| \lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) \cdot \beta(t) - \vec{a} \cdot \vec{b} \right| = 0,$$

de donde discurre que $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \beta(t) = \vec{a} \cdot \vec{b}$. ■

Teorema 3.3

Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función vectorial y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real, ambas definidas sobre el conjunto $I \subset \mathbb{R}$ y t_0 es un punto de acumulación de I , tales que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \vec{a} \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L$$

entonces

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (f\alpha)(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = L\vec{a}.$$

Prueba 3.3 Si $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$ entonces

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow t_0} (f\alpha)(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} [f(t) (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))] = \lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) \alpha_1(t), \dots, f(t) \alpha_m(t)) \\
 &= \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \alpha_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \alpha_m(t) \right) \\
 &= \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \alpha_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \alpha_m(t) \right)
 \end{aligned}$$

En vista de que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$ es un escalar, usamos la definición de multiplicación de un escalar por un vector para obtener

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} (f\alpha)(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \left(\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} \alpha_m(t) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = L \vec{a}. \end{aligned}$$

■

Cabe resaltar que el teorema anterior afirma que el límite de una función real que multiplica a una función vectorial es el producto del límite de la función real por el límite de la función vectorial, si los límites de estas funciones existen.

A continuación definimos los límites laterales.

Definición 3.5 [Límite lateral por la izquierda]

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función vectorial definida sobre el conjunto $I \subset \mathbb{R}$ y t_0 es un punto de acumulación de I . Se define el límite de α a la izquierda de t_0 , que se escribe $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \alpha(t) = \vec{b}$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|\alpha(t) - \vec{b}\| < \varepsilon$ siempre que $t \in I \cap]t_0 - \delta, t_0[$.

Definición 3.6 [Límite lateral por la derecha]

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función vectorial definida sobre el conjunto $I \subset \mathbb{R}$ y t_0 es un punto de acumulación de I . Se define el límite de α a la derecha de t_0 , que se escribe $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \alpha(t) = \vec{b}$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|\alpha(t) - \vec{b}\| < \varepsilon$ siempre que $t \in I \cap]t_0, t_0 + \delta[$.

Ejemplo 3.9

Si $\alpha(t) = \left((t+4)^2 + 3, |t-3| - 2 \right)$, calcule $\lim_{t \rightarrow 3^-} \alpha(t)$ y $\lim_{t \rightarrow 3^+} \alpha(t)$.

Solución.

En virtud de la definición de valor absoluto se tiene

$$|t - 3| = \begin{cases} t - 3 & , t \geq 3 \\ 3 - t & , t < 3 \end{cases} .$$

Con ello se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 3^-} \alpha(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^-} \left((t+4)^2 + 3, 3 - t - 2 \right) \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow 3^-} \left((t+4)^2 + 3 \right), \lim_{t \rightarrow 3^-} (1 - t) \right) = (52, -2) . \end{aligned}$$

Se procede de forma análoga para calcular el segundo límite lateral:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 3^+} \alpha(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^+} \left((t+4)^2 + 3, t - 3 - 2 \right) \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow 3^+} \left((t+4)^2 + 3 \right), \lim_{t \rightarrow 3^+} (t - 5) \right) = (52, -2) . \end{aligned}$$

□

3.1.3. Continuidad de una función vectorial

La continuidad de una función vectorial se define de manera semejante a la continuidad de una función real de variable real. Dejaremos en evidencia que la extensión del concepto de continuidad de una función real a la de una función vectorial es muy natural y directa como la extensión del concepto de límite.

Definición 3.7 [Continuidad de una función vectorial]

La función $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en el punto $t_0 \in I$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\left\| \alpha(t) - \vec{b} \right\| < \varepsilon$$

siempre que $t \in I$ y $0 < |t - t_0| < \delta$.

Podríamos resumir a continuación dos situaciones que se pueden presentar. En primer término, si t_0 no es un punto de acumulación de I , entonces α es continua en el punto t_0 . Ciertamente, existe $\delta > 0$ tal que t_0 es el único punto situado en la intersección $I \cap]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ de ahí que para cualquier $\varepsilon > 0$ se cumple $\left\| \alpha(t) - \vec{b} \right\| < \varepsilon$ siempre que $t \in I \cap]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$.

El segundo escenario sería si t_0 es un punto de acumulación de I , en este caso se tiene la siguiente definición, que es equivalente a la establecida en 3.7.

Definición 3.8

La función $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en el punto $t_0 \in I$ si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \alpha(t_0).$$

Teorema 3.4

La función $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en el punto $t_0 \in I$ si y solo si cada una de sus funciones componentes $\alpha_i(t)$ es continua en t_0 , para todo $i = 1, 2, \dots, m$.

Prueba 3.4 La demostración se debe encarar considerando dos circunstancias.

Resulta claro que si t_0 no es un punto de acumulación de I , la prueba es inmediata, solo hay que tener en cuenta que el dominio de cada función componente $\alpha_i(t)$ coincide con $Dom(\alpha) = I$.

En segundo lugar, supongamos que t_0 es un punto de acumulación de I , en razón del teorema 3.1 se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \alpha(t_0)$$

si y solamente si $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha_i(t) = \alpha_i(t_0)$ para cada $i = 1, 2, \dots, m$. ■

Para cuestiones prácticas, la continuidad de una función vectorial en un punto $t_0 \in I$ puede determinarse comprobando la continuidad de cada una de las funciones componentes en $t_0 \in I$.

(N) Debido a que en las definiciones 3.7 y 3.8 no se explicita la naturaleza del conjunto $I \subset \mathbb{R}$, consideramos necesario hacer los siguientes comentarios.

- 1 Si I es el intervalo abierto $I =]a, b[$, entonces diremos que la función $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en I (o simplemente continua) si ella lo es en cada punto de $t \in I$.
- 2 En caso de que $I = [a, b]$, diremos que la función $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en I si ella lo es en $]a, b[$ y si

$$\lim_{t \rightarrow a^-} \alpha(t) = \alpha(a) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow b^+} \alpha(t) = \alpha(b).$$

Teorema 3.5

Si las funciones vectoriales de variable real $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ son continuas en el punto $t_0 \in I$, entonces las funciones $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha \cdot \beta$ y $\alpha \times \beta$, para $m = 3$, son continuas en $t_0 \in I$. Si además $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en t_0 , entonces $f\alpha$ también lo es en t_0 .

Prueba 3.5 Mostraremos solamente la prueba de que $\alpha + \beta$ es continua en $t_0 \in I$. Las demostraciones para las demás funciones son análogas.

Evidentemente si t_0 no es un punto de acumulación de I , se concluye inmediatamente que $\alpha + \beta$ es continua en t_0 , pues el dominio de cada función componente $\alpha_i(t) + \beta_i(t)$ coincide con $Dom(\alpha + \beta) = I$.

Para el caso que t_0 es un punto de acumulación de I , se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \alpha(t_0) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \beta(t) = \beta(t_0).$$

De acuerdo con el ítem **[LSF]** del teorema 3.2 se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} (\alpha + \beta)(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \beta(t) \\ &= \alpha(t_0) + \beta(t_0) \\ &= (\alpha + \beta)(t_0), \end{aligned}$$

de este modo se concluye que $\alpha + \beta$ es continua en $t_0 \in I$. ■

Ejemplo 3.10

Dada la función vectorial

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t + 1, \sqrt{t + 2}, t^2) & , \quad -3 < t \leq 2 \\ (\ln(t - 1), t - 1, 2t) & , \quad t > 2 \end{cases}.$$

Determine si α es continua en el punto $t = 2$.

Solución.

Se procede según los lineamientos de la definición 3.8. Así, $\alpha(2) = (3, 2, 4)$. Al calcular los límites laterales se obtiene:

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} (t + 1, \sqrt{t + 2}, t^2) = \left(\lim_{t \rightarrow 2^-} (t + 1), \lim_{t \rightarrow 2^-} \sqrt{t + 2}, \lim_{t \rightarrow 2^-} t^2 \right) = (3, 2, 4)$$

$$\lim_{t \rightarrow 2^+} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} (\ln(t - 1), t - 1) = \left(\lim_{t \rightarrow 2^+} \ln(t - 1), \lim_{t \rightarrow 2^+} (t - 1), \lim_{t \rightarrow 2^+} 2t \right) = (0, 1, 4)$$

En vista de que los límites laterales son distintos, se concluye que la función no es continua en $t = 2$.

□

Ejemplo 3.11

Analizar si la función vectorial $\alpha(t)$ es continua en su dominio.

$$\alpha(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}, \frac{|t+1|+t}{2} \right) & , \quad -4 < t < -1 \\ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) & , \quad t = -1 \\ \left(\sqrt[3]{x + \frac{9}{8}}, \frac{\text{sen}(t+1)}{t^2 - 1} \right) & , \quad -1 < t < 0 \end{cases}$$

Solución.

Habida cuenta de que cada función componente es continua para todo $t \neq -1$, la función α también goza de dicho privilegio. Por tanto solo analizaremos si se cumple la definición de continuidad en el punto $t = -1$.

En efecto, los límites laterales establecen que

$$\lim_{t \rightarrow -1^-} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow -1^-} \left(\frac{1}{2}, \frac{|t+1|+t}{2} \right) = \left(\lim_{t \rightarrow -1^-} \frac{1}{2}, \lim_{t \rightarrow -1^-} \frac{|t+1|+t}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -1^+} \alpha(t) &= \lim_{t \rightarrow -1^+} \left(\sqrt[3]{x + \frac{9}{8}}, \frac{\text{sen}(t+1)}{t^2 - 1} \right) \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow -1^+} \sqrt[3]{x + \frac{9}{8}}, \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{\text{sen}(t+1)}{t+1} \cdot \frac{1}{t-1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Puesto que los límites laterales son iguales, $\lim_{t \rightarrow -1} \alpha(t) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$.

Queda claro que $\alpha(-1) = \lim_{t \rightarrow -1} \alpha(t)$ lo que nos lleva a concluir que α es continua en $t = -1$.

□

3.1.4. Derivada de una función vectorial

Ahora que ya hemos examinado detenidamente qué es una función vectorial y cómo calcular su límite, el siguiente paso es aprender a diferenciar una función vectorial. La definición de la derivada de una función con valores vectoriales es casi idéntica a la definición de una función con valores reales de una variable. Sin embargo, debido a que el rango de una función con valores vectoriales consta de vectores, lo mismo ocurre con el rango de su derivada.

Definición 3.9 [Derivada de una función vectorial]

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función vectorial definida en el conjunto $I \subset \mathbb{R}$ y t_0 un número real en su dominio. Decimos que α es derivable en t_0 si existe y es finito el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t_0 + h) - \alpha(t_0)}{h},$$

en cuyo caso escribimos

$$\alpha'(t_0) = \frac{d\alpha}{dt}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0}. \quad (3.2)$$

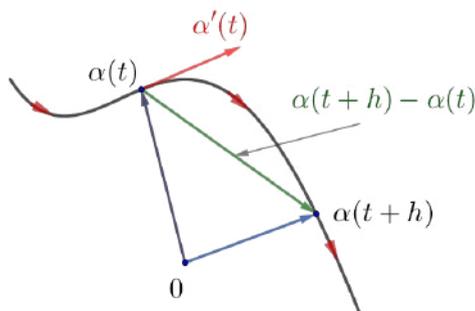


Figura 3.5: Representación geométrica de la derivada

El primer comentario que debemos hacer sobre este nuevo concepto, es que la derivada de una función vectorial $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, en un punto $t_0 \in I$, es un vector en el

espacio euclidiano \mathbb{R}^m .

Otro hecho relevante a destacar sobre el vector $\alpha'(t_0)$ tiene que ver con el aspecto geométrico. El vector $\alpha'(t_0)$ es tangente a la curva correspondiente en el punto donde se calcula la derivada y, además, apunta en dirección al recorrido de la curva.

Para finalizar, el vector tangente $\alpha'(t_0)$ mide la velocidad a la que se trazan las imágenes o los puntos de la curva. En términos físicos, marca el ritmo al que se mueve un punto en el espacio \mathbb{R}^m siguiendo la trayectoria determinada por la función α .

Todas estas peculiaridades quedan enmarcadas en la siguiente definición.

Definición 3.10 [Vector tangente]

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función vectorial derivable. Al vector $\alpha'(t)$ se le llama vector velocidad o vector tangente de la función α en el punto $\alpha(t) \in \mathbb{R}^m$.

Ahora mostramos cómo calcular la derivada de una función con valores vectoriales usando la definición 3.9.

Ejemplo 3.12

Usando la definición, calcule la derivada de la función

$$\alpha(t) = (4t + 5, 3t^2 - 6t + 1).$$

Solución. De acuerdo con la definición, para todo $t \in I$, $\alpha'(t)$ se expresa como

$$\alpha'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4(t+h) + 5, 3(t+h)^2 - 6(t+h) + 1) - (4t + 5, 3t^2 - 6t + 1)}{h}.$$

A continuación efectuamos las operaciones vectoriales que correspondan

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4h, 3(h+t)^2 - 6h - 3t^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4h, 6ht - 6h + 3h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4, 6t - 6 + 3h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4, 6t - 6 + 3h) \end{aligned}$$

Finalmente, al aplicar el límite se consigue el resultado esperado, es decir

$$\alpha'(t) = \left(\lim_{h \rightarrow 0} 4, \lim_{h \rightarrow 0} (6t - 6 + 3h) \right) = (4, 6t - 6).$$

□

Ejemplo 3.13

Sea la función definida por

$$\beta(t) = \left(\frac{t^2 - 2}{t + 1}, \ln(3t + 1), \sqrt{t} \right), \quad t \in [0, 2].$$

Usando la definición de derivada, calcular $\beta'(1)$.

Solución.

De acuerdo con la definición se tiene que

$$\begin{aligned} \beta'(1) &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+h)^2 - 2}{1+h+1} + \frac{1}{2}}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(3(1+h) + 1) - \ln 4}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \right) \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(h+1)^2 - 2}{h+2} + \frac{1}{2}}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(4 + 3h) - \ln 4}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \right). \end{aligned}$$

Si en la primera componente efectuamos la suma de fracciones, aplicamos las propiedades pertinentes del logaritmo en la segunda y, en la tercera, multiplicamos y dividimos por la conjugada de la expresión que aparece en el numerador, se obtiene

$$\begin{aligned} \beta'(1) &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2h+5)}{2h(h+2)}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{4+3h}{4}\right)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)} \right) \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h+5}{2(h+2)}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{4+3h}{4}\right), \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{1+h}+1)} \right) \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h+5}{2(h+2)}, \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(\frac{4+3h}{4}\right)^{1/h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+h}+1} \right). \end{aligned}$$

Evaluamos el límite en la primera y tercera coordenada, mientras que en la segunda reescribimos el argumento del logaritmo; así

$$\beta'(1) = \left(\frac{5}{4}, \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left[\left(1 + \frac{3h}{4} \right)^{\frac{4}{3h}} \right]^{\frac{3}{4}}, \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{5}{4}, \ln e^{\frac{3}{4}}, \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right).$$

□

Observe que los resultados obtenidos en los ejemplos que preceden, también se pueden alcanzar calculando primero la derivada de cada función coordenada y, con ellas, formular la función derivada con valores vectoriales. Esto siempre es posible

para funciones con valores vectoriales, ya sea en dos, tres o más dimensiones. Esto lo expresamos en el siguiente teorema.

Teorema 3.6

La función $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es *derivable* en $t = t_0$ cuando y sólo cuando cada una de sus funciones coordenadas $\alpha_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real derivable en el conjunto $I \subset \mathbb{R}$.

Prueba 3.6 Si expresamos $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$ y la sustituimos en la definición 3.9 obtenemos :

$$\begin{aligned} \alpha'(t_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t_0 + h) - \alpha(t_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\alpha_1(t_0 + h), \dots, \alpha_m(t_0 + h)) - (\alpha_1(t_0), \dots, \alpha_m(t_0))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha_1(t_0 + h) - \alpha_1(t_0)}{h}, \dots, \frac{\alpha_m(t_0 + h) - \alpha_m(t_0)}{h} \right) \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha_1(t_0 + h) - \alpha_1(t_0)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha_m(t_0 + h) - \alpha_m(t_0)}{h} \right) \\ &= (\alpha'_1(t_0), \dots, \alpha'_m(t_0)). \end{aligned}$$

■

Es decir, la derivada $\alpha'(t_0)$ es el vector de \mathbb{R}^m cuyas coordenadas son las derivadas $\alpha'_i(t_0)$ de las funciones coordenadas de α , para cada $i = 1, 2, \dots, m$.

Corolario 3.1 Sean $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ funciones reales diferenciables en todo $t \in I$.

- 1 Si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ entonces $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$
- 2 Si $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ entonces $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

Si usamos los vectores canónicos de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , la notación del corolario también se escribe como $\alpha'(t) = x'(t) \vec{i} + y'(t) \vec{j}$ o $\alpha'(t) = x'(t) \vec{i} + y'(t) \vec{j} + z'(t) \vec{k}$, respectivamente.

Ejemplo 3.14

Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones.

a) $\alpha(t) = \left(t \ln t, \frac{1}{t} \right); t > 0.$

b) $\beta(t) = (t^2 e^t, \arcsen t, \cos(3t)); t \in]-1, 1[.$

Solución.

La derivada de cada una de ellas se consigue por aplicación de las reglas de derivación usuales a cada función coordenada. En efecto,

a)

$$\alpha'(t) = \left((t \ln t)', \left(\frac{1}{t} \right)' \right) = \left(1 + \ln t, -\frac{1}{t^2} \right).$$

b)

$$\beta'(t) = \left((t^2 e^t)', (\arcsen t)', (\cos(3t))' \right) = \left(t e^t (t + 2), -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, 3 \sen(3t) \right).$$

□

Ejemplo 3.15

Calcule el vector tangente de cada una de las siguientes funciones en el valor $t = t_0$.

a) $\alpha(t) = \left(t^3 + 2t + 1, \sqrt[3]{(t-1)^5} \right), t \in \mathbb{R};$ donde $t_0 = 2.$

b) $\gamma(t) = (\arctan t, \sqrt{t+2}, \sen(5\pi t^2)), t \geq -1;$ donde $t_0 = -1.$

Solución.

a) Con la aplicación de las reglas de derivación a cada función coordenada obtenemos

$$\alpha'(t) = \left(3t^2 + 2, \frac{5}{3} \sqrt[3]{(t-1)^2} \right)$$

En seguida, sustituimos el valor $t_0 = 2$ y así se consigue el vector tangente

$$\alpha'(2) = \left(3(2)^2 + 2, \frac{5}{3} \sqrt[3]{(2-1)^2} \right) = \left(14, \frac{5}{3} \right).$$

b) Análogamente, se deriva cada función coordenada de $\gamma(t)$.

$$\gamma'(t) = \left(\frac{1}{t^2 + 1}, \frac{1}{2\sqrt{t+2}}, 10\pi t \cos(5\pi t^2) \right).$$

Al evaluar en $t_0 = -1$ se obtiene $\gamma'(-1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 10\pi \right)$.

□

La derivada de una función vectorial obedece las reglas familiares de la derivada de una función real de una variable real cuando dichas leyes son aplicadas a cada una de las funciones coordenadas, como veremos en el siguiente teorema.

Teorema 3.7 Reglas de derivación para funciones vectoriales

Sean $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ dos funciones vectoriales definidas en el conjunto $I \subset \mathbb{R}$, $\vec{C} = (C_1, C_2, \dots, C_m) \in \mathbb{R}^m$ un vector constante, k un número real y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar derivable en I . Se verifican las siguientes reglas de derivación.

[DV1] Derivada de una función vectorial constante $\frac{d}{dt} \vec{C} = \vec{0}$.

[DV2] Derivada de la multiplicación de un escalar por una función vectorial

$$\frac{d}{dt} (k\alpha(t)) = k \frac{d}{dt} \alpha(t).$$

[DV3] Derivada de una función escalar por una función vectorial

$$\frac{d}{dt} (f(t)\alpha(t)) = f'(t)\alpha(t) + f(t)\alpha'(t).$$

[DV4] Derivada de la adición de funciones vectoriales constante

$$\frac{d}{dt} (\alpha(t) \pm \beta(t)) = \alpha'(t) \pm \beta'(t).$$

[DV5] Derivada del producto escalar de funciones vectoriales

$$\frac{d}{dt} (\alpha(t) \cdot \beta(t)) = \alpha'(t) \cdot \beta(t) + \alpha(t) \cdot \beta'(t).$$

[DV6] Derivada del producto cruz de funciones vectoriales

$$\frac{d}{dt} (\alpha(t) \times \beta(t)) = \alpha'(t) \times \beta(t) + \alpha(t) \times \beta'(t).$$

N Una función escalar es una función real de una variable real. Tenga en cuenta que si $f(t)$ es una función escalar y $\alpha(t)$ es una función vectorial, el producto de ellas, definido por $(f\alpha)(t) = f(t)\alpha(t)$ para todo t , es una función con valor

vectorial ya que el producto de un escalar con un vector resulta un vector.

Prueba 3.7 Mostraremos las pruebas de **[DV3]**, **[DV5]** y **[DV6]** cuando $m = 3$. La verificación de los otros ítems se consiguen fácilmente al derivar las funciones componentes y utilizar las reglas para las derivadas del cálculo de una sola variable, lo que dejaremos como ejercicio para el lector.

Consideremos las funciones $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ y $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t))$ donde todas las funciones componentes son funciones reales de variable real derivables para todo $t \in I$.

La prueba de **[DV3]** se obtiene aplicando la regla de la cadena, tal como sigue.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(t)\alpha(t)) &= \frac{d}{dt}[f(t)(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))] \\ &= \frac{d}{dt}(f(t)\alpha_1(t), f(t)\alpha_2(t), f(t)\alpha_3(t)) \\ &= \left(\frac{d}{dt}f(t)\alpha_1(t), \frac{d}{dt}f(t)\alpha_2(t), \frac{d}{dt}f(t)\alpha_3(t) \right). \end{aligned}$$

La derivada de cada una de las funciones componentes resulta de aplicar la derivada de la regla de un producto, es decir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(t)\alpha(t)) &= (f'(t)\alpha_1(t) + f(t)\alpha'_1(t))\vec{i} \\ &\quad + (f'(t)\alpha_2(t) + f(t)\alpha'_2(t))\vec{j} \\ &\quad + (f'(t)\alpha_3(t) + f(t)\alpha'_3(t))\vec{k}. \end{aligned}$$

Expresamos el resultado anterior como la suma de dos funciones vectoriales, esto es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(t)\alpha(t)) &= (f'(t)\alpha_1(t), f'(t)\alpha_2(t), f'(t)\alpha_3(t)) \\ &\quad + (f(t)\alpha'_1(t), f(t)\alpha'_2(t), f(t)\alpha'_3(t)) \end{aligned}$$

Finalmente, en virtud del ítem **[FE]** de la definición 3.3 se llega al resultado deseado

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(t)\alpha(t)) &= f'(t)(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) + f(t)(\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \alpha'_3(t)) \\ &= f'(t)\alpha(t) + f(t)\alpha'(t). \end{aligned}$$

Para la prueba de **[DV5]** se procede como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\alpha(t) \cdot \beta(t)) &= \frac{d}{dt}(\alpha_1(t)\beta_1(t) + \alpha_2(t)\beta_2(t) + \alpha_3(t)\beta_3(t)) \\ &= \frac{d}{dt}(\alpha_1(t)\beta_1(t)) + \frac{d}{dt}(\alpha_2(t)\beta_2(t)) + \frac{d}{dt}(\alpha_3(t)\beta_3(t)). \end{aligned}$$

Al aplicar la regla de la derivada de un producto de funciones reales, en cada uno de los sumandos de arriba, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\alpha(t) \cdot \beta(t)) &= \frac{d\alpha_1(t)}{dt}\beta_1(t) + \alpha_1(t)\frac{d\beta_1(t)}{dt} + \frac{d\alpha_2(t)}{dt}\beta_2(t) + \alpha_2(t)\frac{d\beta_2(t)}{dt} \\ &\quad + \frac{d\alpha_3(t)}{dt}\beta_3(t) + \alpha_3(t)\frac{d\beta_3(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Si ordenamos los sumandos adecuadamente, la suma anterior del lado derecho es el desarrollo del producto escalar

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\alpha(t) \cdot \beta(t)) &= \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \frac{d\alpha_3(t)}{dt} \right) \cdot (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t)) \\ &\quad + (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \cdot \left(\frac{d\beta_1(t)}{dt}, \frac{d\beta_2(t)}{dt}, \frac{d\beta_3(t)}{dt} \right) \\ &= \alpha'(t) \cdot \beta(t) + \alpha(t) \cdot \beta'(t). \end{aligned}$$

Para la prueba de **[DV6]**, primero se precisa de expresar el producto vectorial de α y β , esto es

$$\begin{aligned} \alpha(t) \times \beta(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1(t) & \alpha_2(t) & \alpha_3(t) \\ \beta_1(t) & \beta_2(t) & \beta_3(t) \end{vmatrix} \\ &= (\alpha_2(t)\beta_3(t) - \beta_2(t)\alpha_3(t))\vec{i} \\ &\quad + (-\alpha_1(t)\beta_3(t) + \beta_1(t)\alpha_3(t))\vec{j} \\ &\quad + (\alpha_1(t)\beta_2(t) - \beta_1(t)\alpha_2(t))\vec{k} \end{aligned}$$

A continuación, expresamos la derivada en función de los vectores canónicos de \mathbb{R}^3 , tal como se ve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\alpha(t) \times \beta(t)) &= \frac{d}{dt}[\alpha_2(t)\beta_3(t) - \beta_2(t)\alpha_3(t)]\vec{i} \\ &\quad + \frac{d}{dt}[-\alpha_1(t)\beta_3(t) + \beta_1(t)\alpha_3(t)]\vec{j} \\ &\quad + \frac{d}{dt}[\alpha_1(t)\beta_2(t) - \beta_1(t)\alpha_2(t)]\vec{k}. \end{aligned}$$

En seguida, procedemos a derivar usando la derivada del producto de funciones reales

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\alpha(t) \times \beta(t)) &= [\alpha'_2(t)\beta_3(t) + \alpha_2(t)\beta'_3(t) - \beta'_2(t)\alpha_3(t) - \beta_2(t)\alpha'_3(t)]\vec{i} \\ &\quad + [-\alpha'_1(t)\beta_3(t) - \alpha_1(t)\beta'_3(t) + \beta'_1(t)\alpha_3(t) + \beta_1(t)\alpha'_3(t)]\vec{j} \\ &\quad + [\alpha'_1(t)\beta_2(t) + \alpha_1(t)\beta'_2(t) - \beta'_1(t)\alpha_2(t) - \beta_1(t)\alpha'_2(t)]\vec{k}. \end{aligned}$$

Luego, expresamos el vector del lado derecho como la suma de dos funciones.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\alpha(t) \times \beta(t)) &= [\alpha'_2(t) \beta_3(t) - \beta'_2(t) \alpha_3(t)] \vec{i} \\ &\quad + [\alpha_2(t) \beta'_3(t) - \beta_2(t) \alpha'_3(t)] \vec{i} \\ &\quad + [-\alpha'_1(t) \beta_3(t) + \beta_1(t) \alpha'_3(t)] \vec{j} \\ &\quad + [-\alpha_1(t) \beta'_3(t) + \beta'_1(t) \alpha_3(t)] \vec{j} \\ &\quad + [\alpha'_1(t) \beta_2(t) - \beta'_1(t) \alpha_2(t)] \vec{k} \\ &\quad + [\alpha_1(t) \beta'_2(t) - \beta_1(t) \alpha'_2(t)] \vec{k}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\alpha(t) \times \beta(t)) &= [\alpha'_2(t) \beta_3(t) - \beta'_2(t) \alpha_3(t)] \vec{i} \\ &\quad + [-\alpha'_1(t) \beta_3(t) + \beta_1(t) \alpha'_3(t)] \vec{j} \\ &\quad + [\alpha'_1(t) \beta_2(t) - \beta'_1(t) \alpha_2(t)] \vec{k} \\ &\quad + [\alpha_2(t) \beta'_3(t) - \beta_2(t) \alpha'_3(t)] \vec{i} \\ &\quad + [-\alpha_1(t) \beta'_3(t) + \beta'_1(t) \alpha_3(t)] \vec{j} \\ &\quad + [\alpha_1(t) \beta'_2(t) - \beta_1(t) \alpha'_2(t)] \vec{k}. \end{aligned}$$

La suma del lado derecho corresponde al desarrollo del producto vectorial deseado, es decir

$$\frac{d}{dt} (\alpha(t) \times \beta(t)) = \alpha'(t) \times \beta(t) + \alpha(t) \times \beta'(t).$$

Ejemplo 3.16

Dadas las funciones α y β definidas en $I =]0, +\infty[$ dadas por

$$\alpha(t) = \left(4t^3, \frac{2}{t^2+2}, 3\sqrt{t} \right) \quad \text{y} \quad \beta(t) = \left(\frac{1}{t}, t, 3t \right).$$

Utilizando las propiedades de la derivada de funciones con valores vectoriales, calcule y evalúe la derivada de cada una de las siguientes funciones en $t = 1$.

a) $\alpha(t) \cdot \beta(t)$.

b) $\alpha(t) \times \beta(t)$.

Solución.

a) En virtud de la propiedad [DV5] se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\alpha(t) \cdot \beta(t)) &= \left(12t^2, -\frac{4t}{(t^2+2)^2}, \frac{3}{2\sqrt{t}}\right) \cdot \left(\frac{1}{t}, t, 3t\right) + \\ &\quad \left(4t^3, \frac{2}{t^2+2}, 3\sqrt{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}, 1, 3\right). \end{aligned}$$

Al evaluar el resultado anterior en $t = 1$ y luego de desarrollar los productos escalares indicados llegamos al resultado esperado, es decir

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt}(\alpha(t) \cdot \beta(t)) \right|_{t=1} &= \left(12(1)^2, -\frac{4(1)}{(1+2)^2}, \frac{3}{2\sqrt{1}}\right) \cdot (1, 1, 3) + \\ &\quad \left(4(1)^3, \frac{2}{1^2+2}, 3\sqrt{1}\right) \cdot (-1, 1, 3) \\ &= \left(12, -\frac{4}{9}, \frac{3}{2}\right) \cdot (1, 1, 3) + \left(4, \frac{2}{3}, 3\right) \cdot (-1, 1, 3) \\ &= \frac{289}{18} + \frac{17}{3} = \frac{391}{18}. \end{aligned}$$

b) De acuerdo con [DV6] se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\alpha(t) \times \beta(t)) &= \left(12t^2, -\frac{4t}{(t^2+2)^2}, \frac{3}{2\sqrt{t}}\right) \times \left(\frac{1}{t}, t, 3t\right) + \\ &\quad \left(4t^3, \frac{2}{t^2+2}, 3\sqrt{t}\right) \times \left(-\frac{1}{t^2}, 1, 3\right). \end{aligned}$$

Al reemplazamos $t = 1$ en el resultado anterior se consigue

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt}(\alpha(t) \times \beta(t)) \right|_{t=1} &= \left(12(1)^2, -\frac{4(1)}{(1+2)^2}, \frac{3}{2\sqrt{1}}\right) \times (1, 1, 3) + \\ &\quad \left(4(1)^3, \frac{2}{1^2+2}, 3\sqrt{1}\right) \times (-1, 1, 3) \\ &= \left(12, -\frac{4}{9}, \frac{3}{2}\right) \times (1, 1, 3) + \left(4, \frac{2}{3}, 3\right) \times (-1, 1, 3). \end{aligned}$$

A continuación, efectuamos los productos vectoriales indicados tal como sigue:

$$\left(12, -\frac{4}{9}, \frac{3}{2}\right) \times (1, 1, 3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 12 & -\frac{4}{9} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{17}{6}\vec{i} - \frac{69}{2}\vec{j} + \frac{112}{9}\vec{k}$$

y

$$\left(4, \frac{2}{3}, 3\right) \times (-1, 1, 3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & \frac{2}{3} & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 15\vec{j} + \frac{14}{3}\vec{k}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (\alpha(t) \times \beta(t)) \right|_{t=1} &= -\frac{17}{6} \vec{i} - \frac{69}{2} \vec{j} + \frac{112}{9} \vec{k} - \vec{i} - 15 \vec{j} + \frac{14}{3} \vec{k} \\ &= -\frac{23}{6} \vec{i} - \frac{99}{2} \vec{j} + \frac{154}{9} \vec{k}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.17

Dadas la función real $f(t) = t \cos(\pi t)$ y las funciones con valores vectoriales

$$\gamma(t) = (\tan(\pi t), 3e^{2t}) \quad \text{y} \quad \mu(t) = (t^2, \cos^2(3\pi t))$$

definidas para todo $t \in]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$. Calcule y evalúe en $t = -1$ cada una de las siguientes derivadas utilizando las propiedades de la derivada de funciones con valores vectoriales.

a) $\gamma(t) + \mu(t)$.

b) $f(t) \mu(t)$.

Solución.

a) En concordancia con **[DV4]** se tiene

$$\frac{d}{dt} (\gamma(t) + \mu(t)) = (\pi \sec^2(\pi t), 6e^{2t}) + (2t, -6\pi \cos(3\pi t) \sin(3\pi t)).$$

Al sustituir $t = -1$ se obtiene

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (\gamma(t) + \mu(t)) \right|_{t=-1} &= (\pi \sec^2(-\pi), 6e^{2(-1)}) \\ &\quad + (2(-1), -6\pi \cos(-3\pi) \sin(-3\pi)) \\ &= (\pi, 6e^{-2}) + (-2, 0) = (\pi - 2, 6e^{-2}). \end{aligned}$$

b) Debido a **[DV3]** procedemos como sigue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (f(t) \mu(t)) &= (\cos(\pi t) - \pi t \sin(\pi t)) (t^2, \cos^2(3\pi t)) + \\ &\quad t \cos(\pi t) (2t, -6\pi \cos(3\pi t) \sin(3\pi t)). \end{aligned}$$

Luego de reemplazar $t = -1$ obtenemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (f(t) \mu(t)) \right|_{t=-1} &= (\cos(-\pi) - \pi(-1) \sin(-\pi)) \left((-1)^2, \cos^2(-3\pi) \right) + \\ &\quad (-1) \cos(-\pi) (2(-1), -6\pi \cos(-3\pi) \sin(-3\pi)) \\ &= -(1, 1) + (-2, 0) = (-3, -1). \end{aligned}$$

□

Ahora demostraremos un teorema importante del cálculo vectorial.

Teorema 3.8

Una función vectorial $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ derivable en el conjunto $I \subset \mathbb{R}$ tiene norma constante si y sólo si $\alpha'(t) \cdot \alpha(t) = 0$.

Prueba 3.8 En virtud de que, para todo $t \in I$, $\|\alpha(t)\|$ es una función real y con el auxilio de la regla de la cadena, se tiene que

$$\frac{d}{dt} \|\alpha(t)\|^2 = 2 \|\alpha(t)\| \frac{d}{dt} \|\alpha(t)\|. \quad (3.3)$$

Por otro lado, sabemos que $\|\alpha(t)\|^2 = \alpha(t) \cdot \alpha(t)$, luego $\frac{d}{dt} \|\alpha(t)\|^2$ discurre de aplicar [DV5], es decir

$$\frac{d}{dt} \|\alpha(t)\|^2 = \frac{d}{dt} (\alpha(t) \cdot \alpha(t)) = \alpha'(t) \cdot \alpha(t) + \alpha(t) \cdot \alpha'(t) = 2\alpha'(t) \cdot \alpha(t).$$

Al reemplazar este resultado en (3.3) se obtiene

$$2 \|\alpha(t)\| \frac{d}{dt} \|\alpha(t)\| = 2\alpha'(t) \cdot \alpha(t)$$

de donde sigue que

$$\frac{d}{dt} \|\alpha(t)\| = \frac{\alpha'(t) \cdot \alpha(t)}{\|\alpha(t)\|} = 0,$$

siempre que $\|\alpha(t)\| \neq 0$.

Recíprocamente, si $\alpha'(t) \cdot \alpha(t) = 0$, entonces $\|\alpha(t)\|$ debe ser constante. ■

Si examinamos con detenimiento el teorema anterior nos percataremos del siguiente hecho: si $\|\alpha(t)\| \neq 0$ entonces $\|\alpha(t)\|$ es constante si y solo si $\alpha'(t)$ y $\alpha(t)$ son vectores ortogonales.

La afirmación anterior tiene consecuencias geométricas, ya que si una curva se encuentra completamente en una esfera (o si ella es una circunferencia) centrada en el origen, entonces el vector tangente $\alpha'(t)$ es siempre ortogonal al vector de posición $\alpha(t)$.

En el siguiente ejemplo se verificará la última aseveración.

Ejemplo 3.18

La función vectorial

$$\alpha(t) = \left(\frac{\cos t}{\sqrt{0,0625t^2 + 1}}, \frac{\sin t}{\sqrt{0,0625t^2 + 1}}, \frac{-0,25t}{\sqrt{0,0625t^2 + 1}} \right), t \in \mathbb{R}$$

cuya imagen es conocida como la espiral esférica, verifica la aseveración anterior.

Solución.

En primer lugar, la traza de la función α yace sobre la esfera con centro en $(0, 0, 0)$ y radio 1. En efecto,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \left(\frac{\cos t}{\sqrt{0,0625t^2 + 1}} \right)^2 + \left(\frac{\sin t}{\sqrt{0,0625t^2 + 1}} \right)^2 + \left(\frac{-0,25t}{\sqrt{0,0625t^2 + 1}} \right)^2 \\ &= \frac{\cos^2 t}{0,0625t^2 + 1} + \frac{\sin^2 t}{0,0625t^2 + 1} + \frac{(-0,25t)^2}{0,0625t^2 + 1} \\ &= \frac{\cos^2 t + \sin^2 t + 0,0625t^2}{0,0625t^2 + 1} = 1. \end{aligned}$$

A continuación, verificaremos que $\alpha'(t) \cdot \alpha(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

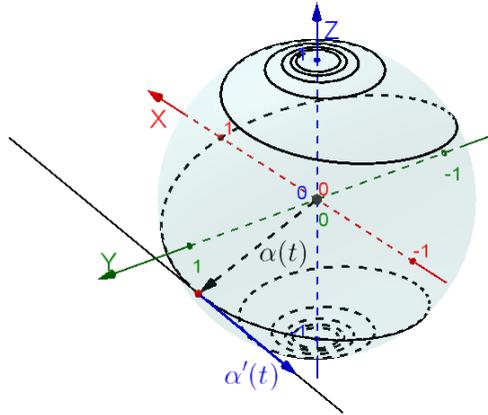


Figura 3.6: La espiral esférica

Como acto previo, calcularemos la derivada de cada función componente de $\alpha(t)$.

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= \frac{-\sqrt{1+0,0625t^2} \operatorname{sen} t - \cos t \frac{0,0625t}{\sqrt{0,0625t^2+1}}}{1+0,0625t^2} \\
 &= \frac{-(1+0,0625t^2) \operatorname{sen} t - 0,0625t \cos t}{(0,0625t^2+1)^{3/2}} \\
 y'(t) &= \frac{\sqrt{1+0,0625t^2} \cos t - \operatorname{sen} t \frac{0,0625t}{\sqrt{0,0625t^2+1}}}{1+0,0625t^2} \\
 &= \frac{(1+0,0625t^2) \cos t - 0,0625t \operatorname{sen} t}{(0,0625t^2+1)^{3/2}} \\
 z'(t) &= -\frac{0,25}{(0,0625t^2+1)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

El segundo acto, consiste en mostrar el producto escalar $\alpha'(t) \cdot \alpha(t)$, para lo cual

apelamos a su paciencia debido a que los cálculos involucrados son tupidos.

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \cdot \alpha(t) &= \frac{-(1 + 0,0625t^2) \operatorname{sen} t - 0,0625t \cos t}{(0,0625t^2 + 1)^{3/2}} \frac{\cos t}{\sqrt{0,0625t^2 + 1}} + \\ &\quad \frac{(1 + 0,0625t^2) \cos t - 0,0625t \operatorname{sen} t}{(0,0625t^2 + 1)^{3/2}} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{0,0625t^2 + 1}} + \\ &\quad + \frac{0,25}{(0,0625t^2 + 1)^{3/2}} \frac{0,25t}{\sqrt{0,0625t^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Observe que al efectuar los productos obtenidos, obtendremos la suma de fracciones homogéneas. O sea,

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \cdot \alpha(t) &= \frac{(- (1 + 0,0625t^2) \operatorname{sen} t - 0,0625t \cos t) \cos t}{(0,0625t^2 + 1)^2} + \\ &\quad \frac{((1 + 0,0625t^2) \cos t - 0,0625t \operatorname{sen} t) \operatorname{sen} t}{(0,0625t^2 + 1)^2} + \frac{0,0625t}{(0,0625t^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, si efectuamos la suma de todos los numeradores involucrados llegaremos a

$$\begin{aligned} &-0,0625t \cos^2 t - \cos t \operatorname{sen} t - 0,0625t^2 \cos t \operatorname{sen} t + \cos t \operatorname{sen} t \\ &-0,0625t \operatorname{sen}^2 t + 0,0625t^2 \cos t \operatorname{sen} t + 0,0625t \\ &= -0,0625t \cos^2 t - 0,0625t \operatorname{sen}^2 t + 0,0625t. \end{aligned}$$

La última pincelada queda a cargo de la identidad trigonométrica que permite obtener

$$-0,0625t (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) + 0,0625t = 0$$

que es el resultado deseado. □

Si la función $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable, tiene sentido considerar la función $\alpha' : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ y profundizar acerca de su continuidad o su diferenciable o algún otro aspecto de importancia.

En efecto, en el caso de que α' sea continua, se dice que α es una función vectorial de clase C^1 y entonces tenemos la licencia para investigar la existencia de la derivada de α' . Cuando existe el vector $(\alpha')'(t_0) = \alpha''(t_0)$, se le llama la segunda derivada de en el punto $t = t_0$. En términos de las funciones coordenadas se escribe

$$\alpha''(t_0) = \frac{d}{dt} \alpha'(t_0) = \alpha''(t_0) = (\alpha''_1(t_0), \alpha''_2(t_0), \dots, \alpha''_m(t_0)).$$

Si existe $\alpha''(t)$ para todo $t \in I$, se dice que α es dos veces diferenciable y queda definida la función $\alpha'' : I \rightarrow \mathbb{R}^m$. En caso de que α'' sea continua afirmamos que α es una función de clase C^2 .

Si extendemos el concepto, diremos que la función $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es $n + 1$ veces diferenciable cuando existe la función $\alpha^{(n)} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ que es diferenciable y es llamada la derivada de orden n de α .

Esto significa que, al igual que en el estudio de las funciones reales de una sola variable, las derivadas de orden superior de funciones con valores vectoriales son obtenidas derivando repetidamente la primera derivada de dicha función. Esto nos lleva a

$$\alpha''(t) = \frac{d}{dt}\alpha'(t), \quad \alpha'''(t) = \frac{d}{dt}\alpha''(t), \quad \alpha^{(4)}(t) = \frac{d}{dt}\alpha'''(t), \dots$$

En general se tiene que, para $n = 2, 3, 4, \dots$

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\alpha(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^n}{dt^n}\alpha(t)\right).$$

Del mismo modo diremos que una función vectorial continua es de clase C^0 y que α es su propia derivada de orden cero, es decir, $\alpha(t) = \alpha^0(t)$.

Finalmente, cuando una función vectorial α goza de la propiedad de que existen sus derivadas de todos los órdenes, entonces afirmaremos que α es de clase C^∞ , en otras palabras, es infinitamente derivable.

En lo que concierne a las funciones coordenadas de $\alpha(t)$, la notación $\alpha \in C^n$ indicará que α es una función de clase C^n si y solamente si cada función coordenada lo es también, o sea, $\alpha_i \in C^n$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

A continuación presentaremos una propiedad de las curvas (funciones vectoriales) que alude a la posibilidad de trazar rectas tangentes a su traza. Esta propiedad se llama regularidad y la definiremos para caminos de clase C^1 .

Definición 3.11 [Curva regular o suave]

Una función vectorial $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase C^1 es regular si $\alpha'(t) \neq \vec{0}$ para todo $t \in I$.

Para mayor tranquilidad del lector, casi todos los ejemplos que mostraremos a lo largo de este capítulo y de otros donde se usen las curvas, serán funciones vectoriales no sólo de clase C^1 , sino también de la clase C^∞ , a saber, con todas sus derivadas continuas.

Ejemplo 3.19

Considere la función vectorial $\alpha :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = \left(\operatorname{sen} t, \cos t + \ln \left(\tan \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right)$$

cuya traza es conocida como la tractriz.

- a) Verifique que α es de clase C^∞ .
- b) Compruebe que α es regular para todo $t \neq \frac{\pi}{2}$.

Solución.

- a) Calculamos la derivada de la función α , esto es

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \left(\cos t, -\operatorname{sen} t + \frac{1}{\tan \left(\frac{t}{2} \right)} \left(\tan \left(\frac{t}{2} \right) \right)' \right) \\ &= \left(\cos t, -\operatorname{sen} t + \frac{1}{\tan \left(\frac{t}{2} \right)} \sec^2 \left(\frac{t}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

A efectos de un análisis más exhaustivo, simplificaremos la segunda componente con la ayuda de las identidades trigonométricas. En efecto

$$\begin{aligned} \alpha'_2(t) &= -\operatorname{sen} t + \frac{1}{\tan \left(\frac{t}{2} \right)} \sec^2 \left(\frac{t}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = -\operatorname{sen} t + \frac{\cos \left(\frac{t}{2} \right)}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{t}{2} \right)} \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{t}{2} \right)} \\ &= -\operatorname{sen} t + \frac{1}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{t}{2} \right) \cos \left(\frac{t}{2} \right)} = -\operatorname{sen} t + \frac{1}{\operatorname{sen} t} = -\operatorname{sen} t + \operatorname{csc} t. \end{aligned}$$

Así,

$$\alpha'(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t + \operatorname{csc} t).$$

Como las funciones trigonométricas $\cos t$, $\operatorname{sen} t$ y $\operatorname{csc} t$ son de clase C^∞ para todo $t \in]0, \pi[$, se concluye que la curva α es una curva diferenciable de clase C^∞ .

- b) Observe que

$\alpha'(t) = 0$ si y solo si

$$(\cos t, -\operatorname{sen} t + \operatorname{csc} t) = (0, 0).$$

Esto implica resolver el sistema

$$\begin{aligned}\cos t &= 0 \\ -\operatorname{sen} t + \operatorname{csc} t &= 0\end{aligned}$$

En efecto,

$$\cos t = 0 \leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

y

$$-\operatorname{sen} t + \frac{1}{\operatorname{sen} t} = \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t} = 0 \leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto, $\alpha'(t) \neq \vec{0}$, para todo $t \neq \frac{\pi}{2}$.

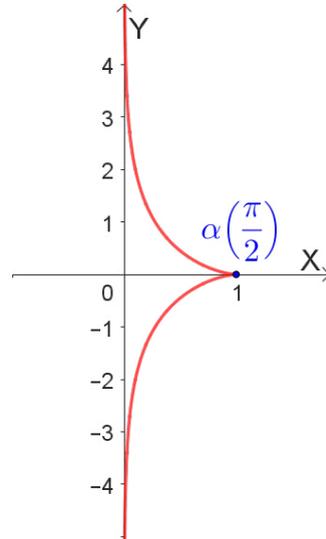


Figura 3.7: La Tractriz

□

Ejemplo 3.20

Sea la aplicación $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\beta(t) = (h + R \cos t, k + R \operatorname{sen} t, Rt),$$

donde h, k y R son números reales, con $R > 0$. Verifique que β es una curva regular para todo $t \in \mathbb{R}$.

Solución.

En efecto, calculamos el vector derivada de β , es decir

$$\beta'(t) = (-R \operatorname{sen} t, R \cos t, R).$$

Es claro que no existe número real t para el cual

$$\beta'(t) = (-R \operatorname{sen} t, R \cos t, R) = (0, 0, 0),$$

por tanto se concluye que β es una curva regular para todo $t \in \mathbb{R}$.

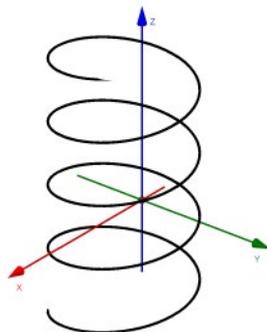


Figura 3.8: La hélice o espiral

La traza de la función β es conocida como la hélice o espiral que está envuelta en un cilindro circular recto con centro en el punto $(h, k, 0)$, radio igual a R y altura infinita, tal como se muestra en la figura 3.8.

□

A las curvas que sean regulares siempre les podremos asociar rectas tangentes que pasamos a definir.

Definición 3.12 [Recta tangente]

Sean $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ una curva regular y $t_0 \in I$. La recta tangente a la curva \mathcal{C} en el punto $\alpha(t_0)$ es la recta que pasa por $\alpha(t_0)$, tiene como vector direccional a $\alpha'(t_0)$ y su ecuación vectorial está dada por

$$\mathcal{L} : \{ \alpha(t_0) + \lambda \alpha'(t_0) ; \lambda \in \mathbb{R} \}. \quad (3.4)$$

Ejemplo 3.21

Considere la curva \mathcal{C} dada por la función vectorial

$$\alpha(t) = \left((16t^2 - 32t + 7)^2, 16t^2 - 32t + 7 \right) ; t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{7}{4} \right].$$

- Represente gráficamente la curva \mathcal{C} e indique claramente su orientación.
- Determine la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva \mathcal{C} en el punto de tangencia que se obtiene cuando $t = \frac{5}{4}$.

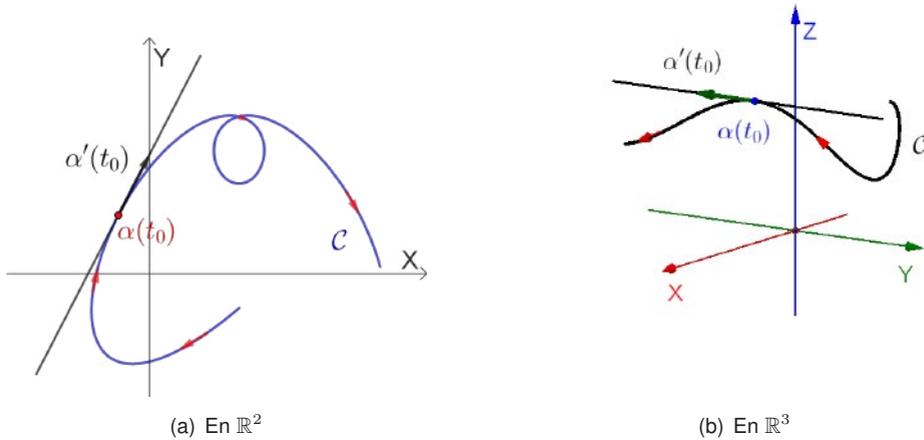


Figura 3.9: Recta tangente a una curva

Solución.

- a) Dado que $x = (16t^2 - 32t + 7)^2$ e $y = 16t^2 - 32t + 7$ entonces la ecuación cartesiana está dada por $x = y^2$.

Para obtener la gráfica de la curva, se procede a tabular tal como sigue.

t	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$
x	0	25	64	81	64	25	0
y	0	-5	-8	-9	-8	-5	0

La gráfica de \mathcal{C} y su respectiva orientación se muestran en la figura 3.10

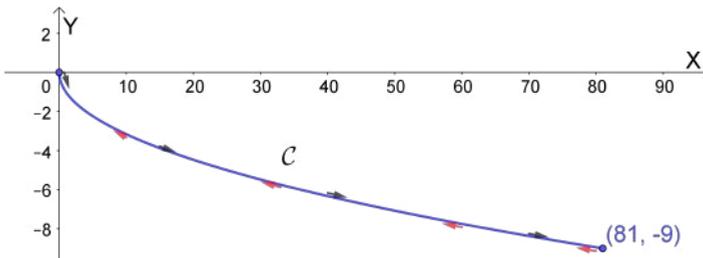


Figura 3.10: $\alpha(t) = ((16t^2 - 32t + 7)^2, 16t^2 - 32t + 7)$; $t \in [\frac{1}{4}, \frac{7}{4}]$

b) Según la definición 3.12 se requiere el punto de paso de la recta tangente, es decir $\alpha\left(\frac{5}{4}\right)$. En efecto, al evaluar α en $t = \frac{5}{4}$ se obtiene $\alpha\left(\frac{5}{4}\right) = (64, -8)$.

En segundo lugar, al derivar

$$\alpha(t) = \left((16t^2 - 32t + 7)^2, 16t^2 - 32t + 7 \right)$$

se obtiene la expresión para el vector tangente, es decir

$$\alpha'(t) = (2(16t^2 - 32t + 7)(32t - 32), 32t - 32).$$

Luego se evalúa en $t = \frac{5}{4}$ y se consigue que $\alpha'\left(\frac{5}{4}\right) = (-128, 8)$.

Con estos resultados, y en virtud de (3.4), la ecuación vectorial de la recta tangente es

$$\mathcal{L} : P = (64, -8) + \lambda(-128, 8); \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

Ejemplo 3.22

Considere la curva \mathcal{C} dada por la función vectorial

$$\beta(t) = \left(4 \cos t, \frac{1}{3} (1 + 16 \cos t - 4 \operatorname{sen} t), 4 \operatorname{sen} t \right); t \in [0, \pi]$$

Determine la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva \mathcal{C} en el punto $\beta\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Solución.

A fin de obtener las coordenadas del punto de tangencia, evaluamos la función β en el valor de t dado, es decir,

$$\beta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(4 \cos \frac{\pi}{2}, \frac{1}{3} \left(1 + 16 \cos \frac{\pi}{2} - 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right), 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = (0, -1, 4).$$

A continuación, se calcula la derivada de β , para todo $tt \in [0, \pi]$.

$$\beta'(t) = \left(-4 \operatorname{sen} t, \frac{1}{3} (-16 \operatorname{sen} t - 4 \cos t), 4 \cos t \right)$$

El vector tangente en el punto $\beta\left(\frac{\pi}{2}\right)$ se determina como sigue,

$$\beta'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}, \frac{1}{3} \left(-16 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - 4 \cos \frac{\pi}{2} \right), 4 \cos \frac{\pi}{2} \right) = \left(-4, -\frac{16}{3}, 0 \right).$$

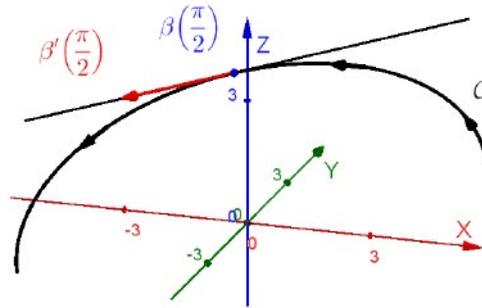


Figura 3.11: La curva $\beta(t)$ y su recta tangente

Finalmente, se posicionan los resultados obtenidos en (3.4)

$$\mathcal{L} : P = (0, -1, 4) + \lambda \left(-4, -\frac{16}{3}, 0 \right); \lambda \in \mathbb{R}.$$

lo que nos lleva a la ecuación vectorial de la recta tangente pedida.

□

3.1.5. Integración de funciones vectoriales

Finalmente, discutiremos las integrales de funciones vectoriales cuyo resultado será una nueva función vectorial para el caso de la integración indefinida o, si calcula una integral definida, un nuevo vector. En el desarrollo de esta sección veremos que utilizaremos las técnicas que aprendimos al integrar funciones escalares aplicadas en el cálculo de la primitiva de cada componente de una función con valores vectoriales.

Desafortunadamente, nuestra interpretación usual de la integral definida como “el área de la región bajo una curva” no tiene sentido aquí, ya que la interpretación razonable de “área” sería un escalar, mientras que la integral de una función vectorial es siempre un vector.

La integral definida de una función vectorial $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida en $I = [a, b]$ y dada por $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$, se define de la misma manera en la que se estableció para una función real, es decir

$$\int_a^b \alpha(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m \alpha(\xi_i) (t_i - t_{i-1}),$$

para cualquiera que sea la partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_m = b\}$ y las constantes $t_{i-1} < \xi_i < t_i$; y por supuesto, siempre que cada uno de los límites exista.

Teniendo en mente la definición de límite, se aprecia fácilmente que para integrar $\alpha(t)$ basta con integrar cada una de sus funciones componentes, hecho que queda establecido en la siguiente definición.

Definición 3.13 [Integral definida de una función vectorial]

Sean $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función vectorial definida sobre $I = [a, b]$ dada por $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$, entonces

$$\int_a^b \alpha(t) dt = \left(\int_a^b \alpha_1(t) dt, \dots, \int_a^b \alpha_m(t) dt \right). \quad (3.5)$$

Queda claro que la integral $\int_a^b \alpha(t) dt$ existe siempre que cada una de las integrales $\int_a^b \alpha_i(t) dt$ existe, para cada $i = 1, 2, \dots, m$. En particular, la continuidad de α es continua sobre $[a, b]$ garantiza la existencia de $\int_a^b \alpha(t) dt$.

En su momento, se afirmó que si una función vectorial α es continua en $I = [a, b]$, entonces cada componente α_i , para cada $i = 1, 2, \dots, m$, es continua y por tanto integrable en $I = [a, b]$, por consiguiente α es integrable en $I = [a, b]$. Y en este caso, es válida la igualdad (3.5).

Definición 3.14 [Integral indefinida de una función vectorial]

Sean $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función definida en el conjunto $I \subset \mathbb{R}$ dada por $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$. La integral indefinida

$$\int \alpha(t) dt = F(t) + \vec{C}$$

es el conjunto de todas las primitivas de α .

- (N)** Observe que en la definición de la integral indefinida \vec{C} representa una constante de integración, no obstante, debe quedar claro que \vec{C} debe ser un vector al que llamaremos *vector constante de integración*.

Ejemplo 3.23

Evaluar la integral

$$\int \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{t+1}{t+2} \right) dt, \forall t > -2.$$

Solución.

Se procede a determinar la primitiva general de cada una de las funciones componentes.

Para resolver $\int \frac{t}{1+t^2} dt$ se introduce el cambio de variable $u = 1 + t^2$ para el cual $du = 2t dt$. Luego al sustituir se obtiene

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln u + C_1.$$

Es decir

$$\int \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C_1.$$

En segundo término, el cálculo de $\int \frac{t+1}{t+2} dt$ se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\int \frac{t+1}{t+2} dt &= \int \left(1 - \frac{1}{t+2}\right) dt = \int dt - \int \frac{dt}{t+2} \\ &= t - \ln|t+2| + C_2.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{t+1}{t+2} \right) dt = \left(\frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C_1, t - \ln|t+2| + C_2 \right).$$

□

Ejemplo 3.24

Si $\alpha(t) = \frac{2^{t-1}}{3^{t+1}} \vec{i} - \frac{2t}{3} \operatorname{sen}(3t) \vec{j} + \frac{\vec{k}}{\sqrt{t} + \sqrt{t-1}}$, con $t > 1$, calcule la integral $\int \alpha(t) dt$.

Solución.

En primer lugar, observemos que $\frac{2^{t-1}}{3^{t+1}} = \frac{2^t 2^{-1}}{3^t 3} = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^t$.

Así que

$$\int \frac{2^{t-1}}{3^{t+1}} dt = \int \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^t dt = \frac{1}{6} \int \left(\frac{2}{3}\right)^t dt = \frac{1}{6 \ln\left(\frac{2}{3}\right)} \left(\frac{2}{3}\right)^t + C_1.$$

En segundo término, la integral $I = \frac{2}{3} \int t \operatorname{sen}(3t) dt$ se resuelve integrando por partes, tal como se muestra a continuación:

Sea $u = t \rightarrow du = dt$ y $dv = \operatorname{sen}(3t) dt \rightarrow v = -\frac{1}{3} \cos(3t)$. Así

$$\begin{aligned}I &= \frac{2}{3} \left(-\frac{t}{3} \cos(3t) + \frac{1}{3} \int \cos(3t) dt \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(-\frac{t}{3} \cos(3t) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \operatorname{sen}(3t) \right) \right) \\ &= -\frac{2t}{9} \cos(3t) + \frac{2}{27} \operatorname{sen}(3t) + C_2.\end{aligned}$$

Para terminar, el cálculo de $\int \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t-1}}$ sigue de percatarse que

$$\frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t-1}} = \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t-1}}{(\sqrt{t} + \sqrt{t-1})(\sqrt{t} - \sqrt{t-1})} = \sqrt{t} - \sqrt{t-1}.$$

Luego

$$I = \int (\sqrt{t} - \sqrt{t-1}) dt = \frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{2}{3}(t-1)^{3/2} + C_3.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \int \alpha(t) dt &= \left(\frac{1}{6 \ln \left(\frac{2}{3}\right)} \left(\frac{2}{3}\right)^t + C_1 \right) \vec{i} - \left(-\frac{2t}{9} \cos(3t) + \frac{2}{27} \operatorname{sen}(3t) + C_2 \right) \vec{j} \\ &+ \left(\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{2}{3}(t-1)^{3/2} + C_3 \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

□

Las propiedades fundamentales de la integral de las funciones vectoriales se enmarcan en los tres teoremas que enunciamos a continuación cuya prueba se desprende de los resultados análogos para las integrales de funciones reales de una variable real.

Teorema 3.9

Considere las constantes $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ y vector constante $\vec{C} = (C_1, \dots, C_m)$. Si las funciones vectoriales de variable real $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ son integrables sobre $I = [a, b]$, entonces

[I1] Linealidad $k_1\alpha + k_2\beta$ es integrable sobre $I = [a, b]$ y se tiene

$$\int_a^b (k_1\alpha(t) + k_2\beta(t)) dt = k_1 \int_a^b \alpha(t) dt + k_2 \int_a^b \beta(t) dt.$$

[I2] Integral del producto escalar el producto escalar $\vec{C} \cdot \alpha$ es integrable en $I = [a, b]$ y se tiene

$$\vec{C} \cdot \int_a^b \alpha(t) dt = \int_a^b \vec{C} \cdot \alpha(t) dt. \quad (3.6)$$

[I3] Integral del producto vectorial el producto vectorial $\vec{C} \times \alpha$ es integrable en $I = [a, b]$ y se tiene

$$\vec{C} \times \int_a^b \alpha(t) dt = \int_a^b \vec{C} \times \alpha(t) dt. \quad (3.7)$$

[I4] si además $c \in I$, entonces las funciones restringidas $\alpha|_{[a,c]}$ y $\alpha|_{[c,b]}$ son integrables y

$$\int_a^b \alpha(t) dt = \int_a^c \alpha(t) dt + \int_c^b \alpha(t) dt. \quad (3.8)$$

Prueba 3.9 Mostraremos la demostración de (3.6) dejando como ejercicio para el lector la prueba de (3.7). En efecto, si $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$ y teniendo en cuenta que cada componente α_i es integrable, escribimos

$$\vec{C} \cdot \int_a^b \alpha(t) dt = (C_1, \dots, C_m) \cdot \left(\int_a^b \alpha_1(t) dt, \dots, \int_a^b \alpha_m(t) dt \right).$$

Al desarrollar el producto escalar del lado derecho se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{C} \cdot \int_a^b \alpha(t) dt &= C_1 \int_a^b \alpha_1(t) dt + \dots + C_m \int_a^b \alpha_m(t) dt \\ &= \int_a^b C_1 \alpha_1(t) dt + \dots + \int_a^b C_m \alpha_m(t) dt \\ &= \int_a^b (C_1, \dots, C_m) \cdot (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t)) dt \\ &= \int_a^b \vec{C} \cdot \alpha(t) dt. \end{aligned}$$

■

Teorema 3.10 [Primer teorema fundamental del cálculo]

Suponga que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función vectorial continua sobre $I = [a, b]$. Si $c \in I$, definimos la integral indefinida F como la función vectorial

$$F(t) = \int_c^t \alpha(x) dx, \text{ si } a \leq t \leq b.$$

Entonces $F'(t)$ existe y $F'(t) = \alpha(t)$, para cada $t \in]a, b[$.

Prueba 3.10 Si $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$, la demostración de este teorema se consigue cuando aplicamos directamente el respectivo primer teorema fundamental del cálculo a cada una de las funciones componentes. En efecto,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{d}{dt} \int_c^t \alpha(x) dx = \frac{d}{dt} \left(\int_c^t (\alpha_1(x), \dots, \alpha_m(x)) dx \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\int_c^t \alpha_1(x) dx, \dots, \int_c^t \alpha_m(x) dx \right) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \int_c^t \alpha_1(x) dx, \dots, \frac{d}{dt} \int_c^t \alpha_m(x) dx \right) \\ &= (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t)) = \alpha(t). \end{aligned}$$

■

Teorema 3.11 [Segundo teorema fundamental del cálculo]

Suponga que la función vectorial $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida en $I = [a, b]$, tiene derivada continua α' en el intervalo abierto $]a, b[$. Entonces para cada $c, x \in]a, b[$, se tiene

$$\int_c^x \alpha'(t) dt = \alpha(x) - \alpha(c).$$

Prueba 3.11 La verificación de este teorema se obtiene por aplicación del segundo teorema fundamental del cálculo a cada una de las funciones componentes de $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$. En efecto, definimos la integral indefinida F como la función vectorial

$$F(t) = \int_c^t \alpha(u) du \leftrightarrow F_i(t) = \int_c^t \alpha'_i(u) du,$$

para cada $i = 1, 2, \dots, m$.

El primer teorema fundamental del cálculo, aplicado a la función definida arriba, nos permite afirmar que

$$F'(t) = (F'_1(t), \dots, F'_m(t)) = (\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_m(t)) = \alpha'(t) \leftrightarrow F'_i(t) = \alpha'_i(t),$$

para cada $t \in]a, b[$. Es decir, para cada $i = 1, \dots, m$ y para todo $t \in I$ se cumple

$$F_i(t) = \int_c^t \alpha'_i(u) du = \alpha_i(t) + C, \quad (3.9)$$

donde C es la constante de integración.

Al evaluar en $t = c$ la función definida en (3.9) se obtiene

$$F_i(c) = \int_c^c \alpha'_i(u) du = \alpha_i(c) + C,$$

es decir, $0 = \alpha_i(c) + C$ de donde $C = -\alpha_i(c)$.

Por consiguiente, la sustitución de cada $t = x \in]a, b[$ en (3.9) nos da el consentimiento para afirmar que

$$\int_c^x \alpha'_i(t) dt = \alpha_i(x) - \alpha_i(c)$$

lo que finaliza la demostración. ■

Ejemplo 3.25

Dada la función vectorial $\alpha(t) = \left(\frac{2}{1+t^2}, -\frac{1}{2}t^2 \right)$, evalúe la integral definida $\int_0^1 \alpha(t) dt$.

Solución. Procedemos de acuerdo con (3.5).

$$\begin{aligned} \int_0^1 \alpha(t) dt &= \int_0^1 \left(\frac{2}{1+t^2}, -\frac{1}{2}t^2 \right) dt = \left(\int_0^1 \frac{2}{1+t^2} dt, \int_0^1 -\frac{1}{2}t^2 dt \right) \\ &= \left(2 \arctan t \Big|_0^1, -\frac{1}{6}t^3 \Big|_0^1 \right) = \left(\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{6} \right). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.26

Calcule $I = \int_{-3}^{-2} \left(\frac{-t-2}{t+4} \vec{i} + t^{-2}e^{2/t} \vec{j} + (2t + (t+2)^2) \vec{k} \right) dt$.

Solución. Primero, evaluamos la integral definida de la primera componente de α , esto es:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{-2} \frac{-t-2}{t+4} dt &= \int_{-3}^{-2} \left(\frac{2}{t+4} - 1 \right) dt \\ &= \left[2 \ln |t+4| - t \right]_{-3}^{-2} = 2 \ln 2 - 1 \approx 0,386. \end{aligned}$$

En segundo lugar, el valor de $\int_{-3}^{-2} t^{-2}e^{2/t} dt$ se consigue introduciendo el siguiente cambio de variable: si $u = \frac{2}{t}$ entonces $du = -\frac{2}{t^2} dt$. Con ello, si $t = -3$ entonces $u = -\frac{2}{3}$ y para $t = -2$ se obtiene que $u = -1$.

Luego al sustituir estos datos en la integral original se tiene el resultado esperado

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{-2} t^{-2}e^{2/t} dt &= \frac{1}{2} \int_{-2/3}^{-1} e^u du = \frac{1}{2} e^u \Big|_{-1}^{-2/3} \\ &= \frac{1}{2} e^{-2/3} - \frac{1}{2} e^{-1} \approx 7.2769 \times 10^{-2}. \end{aligned}$$

Finalmente, evaluar la integral $\int_{-3}^{-2} (2t + (t + 2)^2) dt$ se efectúa de manera inmediata tal como sigue,

$$\int_{-3}^{-2} (2t + (t + 2)^2) dt = \frac{1}{3} (t^3 + 9t^2 + 12t) \Big|_{-3}^{-2} = -\frac{14}{3}.$$

En consecuencia,

$$\int_{-3}^{-2} \alpha(t) dt = \left(0,386, 7.2769 \times 10^{-2}, -\frac{14}{3} \right).$$

□

Ejemplo 3.27

Evalúe la integral definida $\vec{C} \cdot \int_0^{3\pi/2} \alpha(t) dt$, donde $\alpha(t) = (1 + \sin t, \cos t)$ y $\vec{C} = \left(3, -\frac{1}{2} \right)$.

Solución.

De acuerdo con (3.6), el primer paso consiste en calcular el producto escalar.

$$\vec{C} \cdot \alpha(t) = \left(3, -\frac{1}{2} \right) \cdot (1 + \sin t, \cos t) = 3 \sin t - \frac{1}{2} \cos t + 3.$$

A continuación, se evalúa la integral definida de la función real obtenida, es decir

$$\int_0^{3\pi/2} \left(3 \sin t - \frac{1}{2} \cos t + 3 \right) dt = 3t - 3 \cos t - \frac{1}{2} \sin t \Big|_0^{3\pi/2} = \frac{9}{2}\pi + \frac{7}{2}.$$

Por lo tanto

$$\vec{C} \cdot \int_0^{3\pi/2} \alpha(t) dt = \frac{9}{2}\pi + \frac{7}{2} \approx 17.637.$$

□

Ejemplo 3.28

Evalúe la integral definida $\vec{C} \times \int_{-2}^2 \beta(t) dt$, donde $\beta(t) = (-2t^2, t^2 - 4, 3t)$ y $\vec{C} = (-1, 2, -3)$.

Solución.

Con el fin de utilizar (3.7), se procede a calcular el producto vectorial. En efecto

$$\vec{C} \times \beta(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ -2t^2 & t^2 - 4 & 3t \end{vmatrix} = (3t^2 + 6t - 12, 6t^2 + 3t, 3t^2 + 4).$$

A continuación, evaluamos la integral

$$\int_{-2}^2 \vec{C} \times \beta(t) dt = \int_{-2}^2 (3t^2 + 6t - 12, 6t^2 + 3t, 3t^2 + 4) dt.$$

Se procede de acuerdo con (3.5), es decir

$$\int_{-2}^2 \vec{C} \times \beta(t) dt = \left(\int_{-2}^2 (3t^2 + 6t - 12) dt, \int_{-2}^2 (6t^2 + 3t) dt, \int_{-2}^2 (3t^2 + 4) dt \right).$$

Ya que cada componente es el resultado de la suma de funciones pares e impares, usaremos las propiedades respectivas para cada integral definida en $[-2, 2]$, por tanto

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \vec{C} \times \beta(t) dt &= \left(2 \int_0^2 (3t^2 - 12) dt, 2 \int_0^2 6t^2 dt, 2 \int_0^2 (3t^2 + 4) dt \right) \\ &= \left(2t^3 - 24t \Big|_0^2, 4t^3 \Big|_0^2, 2t^3 + 8t \Big|_0^2 \right) \\ &= (-32, 32, 32). \end{aligned}$$

□

3.1.6. Curvas definidas por tramos

Dado un conjunto de curvas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tales que el punto terminal de α_i coincide punto inicial α_{i+1} con $i = 1, 2, \dots, k - 1$, escribimos

$$\alpha = \sum_{i=1}^k \alpha_i$$

para representar a la curva que resulta de la unión por los extremos correspondientes de las α_i , con $i = 1, 2, \dots, k$. Claramente α representa la curva obtenida al recorrer en forma correlativa a las curvas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

Un ejemplo es la curva frontera de un rectángulo en el plano XY con vértices en $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ y $(0, 1)$, que está formada por cuatro tramos, precisamente los lados

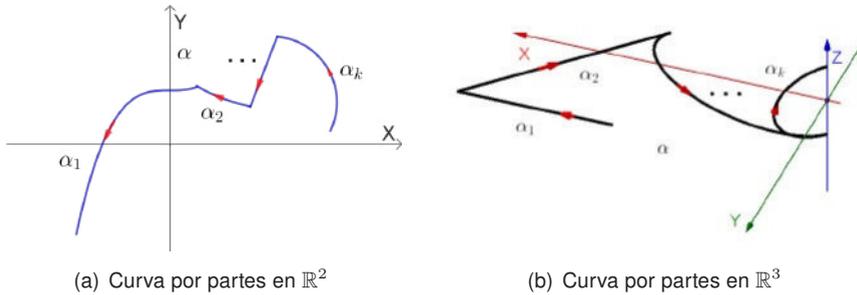


Figura 3.12: Curvas definidas por partes

del rectángulo. Para definir la curva completa hará falta una función vectorial diferente para cada tramo.

Una curva seccionalmente regular o regular por partes o regular por tramos está formada por un número finito de curvas regulares que se han unido una tras otra por sus extremos, dicho de manera formal, se tiene la siguiente definición.

Definición 3.15 [Curva regular por tramos]

Decimos que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una curva regular a trozos o por tramos, si la regularidad se verifica en todo I excepto, tal vez, un conjunto finito de puntos $t_i \in I$.

Observación 6 Cuando hablamos de regularidad nos referimos a que cada tramo debe ser regular o suave en el sentido de la definición 3.11.

Una curva regular a trozos se orienta como una curva regular, dejando en claro cuál debe ser el extremo inicial y su extremo final. Cuando se orienta uno de los trozos de la curva, los demás quedan orientados automáticamente de modo que sean consecutivos teniendo cuidado de que la orientación del conjunto sea la correcta, tal como se muestra en la figura 3.12.

Finalmente, si $n > 0$, diremos que la función $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es de clase C^n por partes si α es continua y posee derivadas continuas hasta el orden n inclusive, salvo en un conjunto finito de punto de I . En dichos puntos, α debe contar con derivadas laterales continuas hasta el orden n inclusive.

Ejemplo 3.29

Verifique que la curva \mathcal{C} definida por la función vectorial

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, -t) & ; t \leq 0 \\ (t, t) & ; t \geq 0 \end{cases}$$

es una curva regular a trozos en \mathbb{R}^2 .

Solución.

Al calcular la derivada $\alpha'(t)$ se obtiene

$$\alpha'(t) = \begin{cases} (1, -1) & ; t < 0 \\ (1, 1) & ; t \geq 0 \end{cases} .$$

Es evidente que $\alpha'(t) \neq \vec{0}$ y, además, a pesar de que no existe $\alpha'(0)$, si existen $\alpha'(0^-) = (1, -1)$ y $\alpha'(0^+) = (1, 1)$. Por tanto, se concluye que \mathcal{C} es una curva regular a trozos y su representación gráfica se aprecia en la figura 3.13

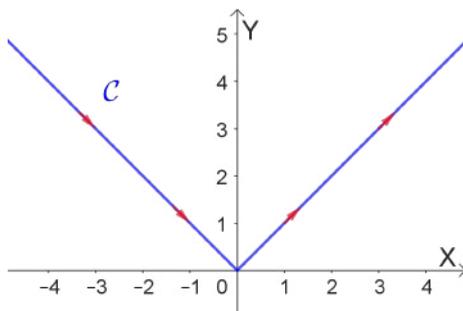


Figura 3.13: la curva plana \mathcal{C} regular a trozos

□

3.1.7. Movimiento curvilíneo de una partícula

El movimiento curvilíneo se refiere al movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria que puede representarse mediante una curva en dos o tres dimensiones, es decir la representación gráfica de la imagen de una función vectorial.

En el mundo de la ingeniería, es fundamental entender cómo se mueven los objetos, punto que resulta crucial ya que forma la base para comprender sistemas dinámicos y de movimiento más complejos.

Usando las funciones reales con valores vectoriales representaremos cantidades físicas, como la velocidad, la aceleración, etc. Para ello, supongamos que la variable real t representa el tiempo transcurrido desde algún tiempo inicial y, además, imaginemos que sobre un objeto o partícula de masa constante m actúa alguna fuerza que posibilite su movimiento en el plano o en el espacio.

1 Vector de posición.

Cuando un objeto puntual se mueve en una trayectoria curva, es decir, en movimiento curvilíneo, se utiliza un vector para definir la posición de dicho punto u objeto. Al denotar con la letra P el punto donde se encuentra la partícula y utilizando el sistema de coordenadas cartesiano \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , con origen en el punto O , definimos la posición de la partícula como el vector que tiene su origen en O y su extremo final en P . Si t representa el tiempo que le toma a la partícula trasladarse de un punto a otro, es claro que el vector que define la posición de la partícula depende del instante t y se denotará por $\alpha(t)$.

2 El vector velocidad.

Ahora, considerando el vector $\alpha_2(t) = \alpha(t+h)$ que denota una segunda posición, digamos P_2 , ocupada por la partícula en el tiempo $t+h = t + \Delta t$, se puede construir el vector $\Delta\alpha(t) = \alpha(t+h) - \alpha(t)$ que tiene su origen en P y su extremo en P_2 y representa la variación del vector de posición en el intervalo de tiempo $h = \Delta t$, es decir, el vector de desplazamiento.

Visualice la figura 3.14 teniendo en mente que el vector $\Delta\alpha(t)$ representa la variación de la dirección, el sentido y el módulo del vector posición $\alpha(t)$. Por lo tanto, el vector velocidad media \vec{v}_m queda determinado por multiplicación del vector $\Delta\alpha(t)$ por el escalar $\frac{1}{h}$. El resultado de esta división será el vector \vec{v} que tiene la misma dirección y dirección que $\Delta\alpha(t)$.

El vector velocidad instantánea en el instante t se puede obtener haciendo que el intervalo de tiempo estudiado sea lo más corto posible, es decir, utilizando el

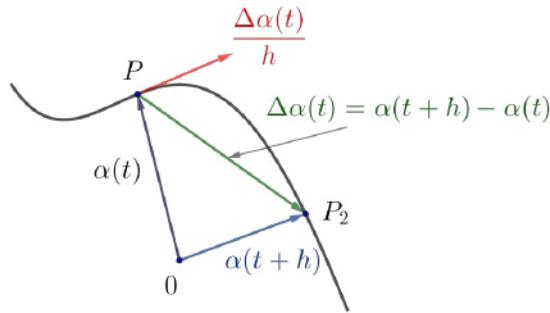


Figura 3.14: El vector velocidad

concepto de derivada según

$$\vec{v} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} = \frac{d\alpha(t)}{dt}.$$

Queda claro que cuando h es cada vez más pequeño, el punto P_2 se aproxima a P . Por lo tanto, en el límite, el vector \vec{v} será tangente a la trayectoria de la partícula.

3 La dirección del movimiento.

En cualquier instante t , la dirección del movimiento de la partícula está dada por la dirección de \vec{v} , esto es

$$\hat{U}_{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

4 La rapidez o velocidad escalar.

La rapidez v de la partícula, en cualquier instante t , se obtiene calculando la magnitud del vector \vec{v} , esto es $v = \|\vec{v}\|$.

5 El vector de aceleración.

Como se ve en la figura 3.15, dibujando los vectores \vec{v} y \vec{v}_2 desde el origen de coordenadas, el vector $\Delta \vec{v} = \alpha'(t+h) - \alpha'(t)$ se construye uniendo los extremos Q y Q_2 de los vectores de velocidad en el primer y segundo instante, respectivamente. El vector $\Delta \vec{v}$ representa la variación en módulo, dirección y sentido de la velocidad y por tanto, la aceleración media viene dada por la multiplicación del vector $\Delta \vec{v}$ por $\frac{1}{h}$, donde h es la variación de tiempo entre el primer y segundo instante.

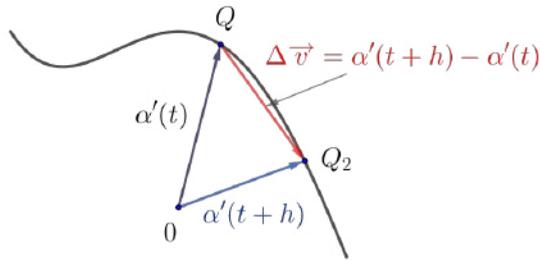


Figura 3.15: El vector de aceleración

La aceleración instantánea se obtendrá cuando h sea pequeño, es decir

$$\vec{a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha'(t+h) - \alpha'(t)}{h} = \frac{d\alpha'(t)}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \alpha''(t).$$

Ejemplo 3.30

Para $t = 2$, calcule la velocidad, aceleración y rapidez de un objeto si la posición está dada por $\alpha(t) = 3t\vec{i} + 5t^2\vec{j} - 7t^3\vec{k}$.

Solución.

La velocidad del objeto se determina evaluando $\alpha'(t)$ en $t = 2$.

En efecto, como $\alpha'(t) = (3, 10t, -21t^2)$, entonces

$$\alpha'(2) = (3, 10(2), -21(2)^2) = (3, 20, -84).$$

En segundo lugar, para determinar la aceleración se calcula la segunda derivada de $\alpha(t)$, o sea, $\alpha''(t) = (0, 10, -42t)$. Luego, al evaluar $t = 2$, se consigue el vector aceleración

$$\alpha''(2) = (0, 10, -42(2)) = (0, 10, -84).$$

Finalmente, la rapidez se obtiene al calcular el módulo del vector velocidad tal como se aprecia a continuación.

$$\|\alpha'(2)\| = \sqrt{3^2 + (20)^2 + (-84)^2} = \sqrt{7465} \approx 86.4$$

□

Ejemplo 3.31

Un planeador vuela en espiral hacia arriba describiendo una trayectoria similar a la de una hélice circular debido a una corriente de aire de rápido ascenso. Su vector posición se modela mediante la función vectorial

$$\alpha(t) = (5 \cos t, 5 \sin t, 2t^2), \quad t \geq 0,$$

donde t es el tiempo dado en segundos y las unidades en los ejes coordenados se miden en metros. Determine

- La velocidad y la aceleración en el instante t .
- La rapidez del planeador en el instante t .
- El momento en el que la aceleración del planeador es ortogonal a su velocidad, si es que ello ocurre.

Solución.

- a) Si derivamos $\alpha(t)$ sucesivamente obtendremos las funciones vectoriales

$$\vec{v}(t) = (-5 \sin t, 5 \cos t, 4t) \quad \text{y} \quad \vec{a}(t) = (-5 \cos t, -5 \sin t, 4)$$

que modelan la velocidad y la aceleración, respectivamente, para todo $t \geq 0$.

- b) La rapidez del planeador se obtiene calculando el módulo del vector velocidad, es decir

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{(-5 \sin t)^2 + (5 \cos t)^2 + (4t)^2} = \sqrt{16t^2 + 25}.$$

- c) Con el fin de determinar si en algún instante t , los vectores velocidad y aceleración son ortogonales, procedemos a resolver la ecuación $\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0$. En efecto

$$\begin{aligned} (-5 \sin t, 5 \cos t, 4t) \cdot (-5 \cos t, -5 \sin t, 4) &= 0 \\ 16t - 25 \cos t \sin t + 25 \sin t \cos t &= 0 \Leftrightarrow t = 0. \end{aligned}$$

Por tanto se afirma que el único instante en que los vectores aceleración y velocidad son ortogonales ocurre al inicio del movimiento del planeador, es decir en su ubicación inicial localizada en el punto $\alpha(0) = (5, 0, 0)$.

□

Ejemplo 3.32

Determinar el vector de posición de una partícula, denotado por $\alpha(t)$, si su función velocidad es $\vec{v}(t) = 2 \cos t \vec{i} - 4 \sin t \vec{j} + 3t^2 \vec{k}$ y su posición inicial de la partícula es $\alpha(0) = (-1, 3, 5)$.

Solución.

Usando la definición de velocidad, podemos expresar el vector posición de la partícula como la integral de su velocidad de la siguiente manera:

$$\vec{v}(t) = \alpha'(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} \Leftrightarrow \alpha(t) = \int \vec{v}(t) dt.$$

Escribimos la integral en términos de las componentes de la función velocidad, es decir

$$\alpha(t) = \int (2 \cos t \vec{i} - 4 \sin t \vec{j} + 3t^2 \vec{k}) dt.$$

A continuación usamos (3.5) y los procedimientos habituales de integración. En efecto,

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \left(\int 2 \cos t dt \right) \vec{i} - \left(\int 4 \sin t dt \right) \vec{j} + \left(\int 3t^2 dt \right) \vec{k} \\ &= 2 \sin t \vec{i} + 4 \cos t \vec{j} + t^3 \vec{k} + \vec{C} \\ &= (2 \sin t + C_1, 4 \cos t + C_2, t^3 + C_3). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para determinar los valores exactos de las componentes del vector constante \vec{C} , usamos la condición inicial dada. Sustituyendo $t = 0$ en el vector de posición de la partícula

$$\alpha(0) = (2 \sin 0 + C_1, 4 \cos 0 + C_2, 0^3 + C_3)$$

se obtiene

$$(C_1, C_2 + 4, C_3) = (-1, 3, 5) \Leftrightarrow C_1 = -1, C_2 = -1 \text{ y } C_3 = 5.$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (3.10), podemos escribir el vector de posición como función del tiempo, o sea

$$\alpha(t) = (2 \sin t - 1, 4 \cos t - 1, t^3 + 5).$$

□

3.1.8. Problemas propuestos

3.1 Sea la función vectorial

$$\alpha(t) = \left(\ln(t-1), \frac{t^2-1}{t+1}, 2t^2+2 \right).$$

- Determine el dominio de la función α .
- Encuentre las coordenadas del punto o los puntos de la curva \mathcal{C} descrita por α , donde la recta que pasa por el punto $Q = (-2, -1, -6)$ es tangente a la curva \mathcal{C} .

3.2 Sea la función vectorial

$$\alpha(t) = \left(t^2 - 1, \frac{1}{t+1}, \sqrt{t^2 - 1} \right).$$

- Determine el dominio de la función α .
- Calcule $\lim_{t \rightarrow 2} f(t)$.

- Calcule $\int_1^2 \alpha(t) dt$.

3.3 Dada la función vectorial

$$f(t) = \left(\sqrt{1-t^2}, \frac{1 - \cos^2(t-1/4)}{(t-1/4)^2}, \frac{\sqrt{t}}{1 - e^{2\sqrt{t}}} \right).$$

- Determine el dominio de f .
- Calcule $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$.

3.4 Sea la función vectorial

$$\alpha(t) = \left(\ln t, \frac{t}{t-1}, t\sqrt{1-t^2} \right).$$

- Determine el dominio de la función α .
- Calcule $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$.

- Calcule $\int_{-1}^0 \alpha(t) dt$.

3.5 Dada la función vectorial

$$\alpha(t) = \left(\frac{2 - 2 \cos(\sqrt{t})}{t}, \frac{2 \cos(\sqrt{t}) - 2}{t} + 1, t^3 \right).$$

a) Determine el dominio de f .

b) Calcule $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$.

3.6 Verifique que la función $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$$

no es regular.

3.7 Determine si la función $\alpha : [0, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

es o no regular. En caso su respuesta sea negativa, calcule los valores de t en los cuales no se satisface la definición de regularidad.

3.8 Dada la curva \mathcal{C} , definida por

$$\alpha(t) = \left(t^2 \cos\left(\frac{1}{t^2}\right), t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right), \frac{t^2}{2} \right)$$

a) Demuestre que la curva está contenida en un cono elíptico.

b) Calcule $\alpha'(t)$.

3.9 Considere la función vectorial

$$\beta(t) = 6 \sin(2t) \vec{i} + 6 \cos(2t) \vec{j} + 5t \vec{k}.$$

Calcule el valor de $\int_0^\pi \|\beta'(t)\| dt$.

3.10 Determine si la función definida por

$$\alpha(t) = \left(1 - \cos t, \sin t, 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right); t \in [-2\pi, 2\pi]$$

es o no regular.

3.11 Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = 2 - \frac{1}{t} \\ y = 2t + \frac{1}{t} \end{cases}$$

en el punto $t_0 = 1$.

3.12 Muestre que la curva \mathcal{C} definida por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t \cos t, 3)$ tiene dos rectas tangentes en el punto $(0, 0, 3)$.

3.13 Determine la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} xy^3 + x^2y + 3xz - yz^3 = 4 \\ xyz - x^2z + z^3 = 1 \end{cases}$$

en el punto $(1, 1, 1)$.

3.14 Para las siguientes funciones vectoriales, determine los vectores velocidad y aceleración del movimiento. Compruebe que el vector aceleración apunta en la misma dirección que el vector velocidad si la velocidad aumenta y en la dirección opuesta si la velocidad disminuye.

a) $\alpha(t) = (2 + t^2, 3 - 2t^2, 5 - t^2)$.

b) $\beta(t) = (-2t^3 - 3t + 1, 4t^3 + 6t - 5, 6t^3 + 9t - 2)$.

3.15 La ecuación vectorial de una curva \mathcal{C} está dada por la función

$$f(t) = (\cos t, \sin t, e^t).$$

Determine la ecuación de la recta tangente a \mathcal{C} que es paralela al plano $\mathcal{P} : \sqrt{3}x + y - 4 = 0$.

3.16 Determine la ecuación vectorial de la recta tangente a las siguientes curvas en el punto indicado.

a) $\alpha(t) = (3t + 1, -4t^2 + 2)$ en el punto $(-5, -14)$.

b) $\beta(t) = (3(1 + \cos t), 4 \sin t)$ en el punto $(\frac{9}{2}, 2\sqrt{3})$.

c) $\gamma(t) = (e^t, te^t)$ en el punto $(1, 0)$.

d) $\omega(t) = (2t, 3t^2, 4t^3)$ en el punto $(-2, 3, -4)$.

e) $\psi(t) = (\cos t, \sin t, 1 - 2 \sin t)$ en el punto $(-1, 0, 1)$.

f) $\varphi(t) = (t, \cos t, \ln(\cos t))$ en el punto $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}, -\ln 2)$.

3.17 Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} z = 4 - x^2 \\ y = 2 \end{cases}$$

en el punto $(1, 2, 3)$.

3.18 Sea la curva definida por

$$\alpha(t) = (2 \operatorname{sen}(2\pi t), 3 \operatorname{cos}(2\pi t)); t \in [0, 2\pi].$$

Determine la ecuación de la recta tangente a \mathcal{C} en el punto $t = \frac{\pi}{3}$.

3.19 Sea la curva \mathcal{C} parametrizada por

$$\beta(t) = (\operatorname{cos} t \operatorname{sen}(2t), \operatorname{cos}(2t), \operatorname{sen} t \operatorname{sen}(2t)); t \in [0, 2\pi].$$

Determine el valor de la rapidez de β para todo t .

3.20 Sea la curva

$$\mathcal{C} : \alpha(t) = (1 - 2t, t^2, 2e^{2t-2}).$$

Determine la ecuación de la recta tangente a \mathcal{C} en el punto donde el vector $\alpha(t)$ es paralelo a $\alpha'(t)$.

3.21 Considere la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ x^2 + y^2 = z + 1 \end{cases}$$

- Obtenga las ecuaciones paramétricas de \mathcal{C} .
- Determine la ecuación vectorial de la recta tangente a \mathcal{C} en el punto $(1, -1, 1)$.
- ¿Existe algún punto en la curva en el que la recta tangente pase por el origen? Justifique su respuesta.

3.22 Sea la curva \mathcal{C} , traza de la función vectorial

$$\alpha(t) = \operatorname{sen}(\pi t) \vec{i} + 2 \operatorname{sen}(\pi t) \vec{j} + \operatorname{cos}(\pi t) \vec{k}, t \in \mathbb{R}.$$

Determine si las rectas tangentes a \mathcal{C} en los puntos correspondientes a $t = 0$ y a $t = \frac{1}{2}$ se intersectan. En caso afirmativo, calcule las coordenadas del punto de intersección.

3.23 Dada la curva parametrizada por

$$\alpha(t) = \left(\ln(t^2 + 1), \sqrt{t^2 + 1}, \frac{2t}{t^2 + 1} \right)$$

- Determine las coordenadas del punto P_0 que resulta de la intersección de la curva con el plano $z = 1$.
- Determine las coordenadas del vector aceleración de α en el punto P_0 .

3.24 Sea C la curva cuya parametrización está dada por

$$g(t) = \left(\ln(2t - 1), 3t^2 - 1, \frac{5 + 5t}{2} \right)$$

- Determine la ecuación de la recta tangente en el punto donde la curva corta al plano $y = 2$.
- Determine un punto sobre C , donde su recta tangente es paralela al plano YZ .

3.25 Una partícula se mueve de modo que su aceleración es constante e igual a $-\vec{k}$. Si se ubica en el punto $(0, 0, 1)$ para $t = 0$ y su velocidad, en el mismo instante, está dada por $\vec{i} + \vec{j}$,

- determine el instante en el que interseca al plano $z = 0$.
- calcule las coordenadas del punto donde interseca al plano $z = 0$.
- describa la trayectoria de la partícula.

3.26 Una partícula pasa por el punto $A(5, 4, -2)$ en el tiempo $t = 4$, moviéndose con velocidad constante $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$. Encuentre una ecuación paramétrica para su movimiento.

3.27 Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria dada por Para tiempo por

$$\gamma(t) = 2t\vec{i} + 3t\vec{j} + \left(100 - (t - 5)^2\right)\vec{k},$$

donde $t \in [0, 10]$ representa el tiempo medido en segundos y la distancia en x , y y z se miden en centímetros.

- ¿En qué instante está la partícula en el punto más alto de su trayectoria? Determine las coordenadas de ese punto.
- Determine los valores de t para los cuales la partícula se mueve más rápido. Además, calcule su velocidad para los valores obtenidos.
- Determine los valores de t para los cuales la partícula se mueve más lento y calcule su velocidad para los valores obtenidos.

3.28 La posición de un objeto está dada por

$$\alpha(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + 2\vec{k},$$

donde t representa el tiempo en segundos.

- Determine las expresiones de la velocidad, la aceleración y la rapidez.
- Dibuje la trayectoria del objeto y dibuje los vectores velocidad y aceleración para $t = 1$ y $t = 2$

3.29 La aceleración de una partícula está dada por la función

$$a(t) = (t, t^2, \sqrt{t}); t \geq 0$$

donde t representa el tiempo dado en segundos. Si inicialmente la partícula estaba en $(1, 2, 0)$ con velocidad inicial nula, determine su posición en el instante $t = 5$.

3.30 Imagine que, en el tiempo t , una partícula está localizada en la posición (x, y) dada por

$$\gamma(t) = \left(h + a \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right) \vec{i} + \left(k + a \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right) \vec{j},$$

donde $a > 0$.

- Verifique que $\|\gamma(t) - h\vec{i} - k\vec{j}\| = a$.
- Calcule el vector velocidad de la partícula.
- Determine la rapidez de la partícula.
- Calcule $\gamma'(t) \cdot (\gamma(t) - h\vec{i} - k\vec{j})$.

3.31 Una partícula inicia su movimiento en el punto $r(0) = (1, 0, 0)$ con velocidad $\vec{v}(0) = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Si su aceleración está dada por

$$\vec{a}(t) = 4t\vec{i} + 6t\vec{j} + \vec{k},$$

determine su velocidad y posición en el tiempo t .

3.32 Dos objetos se mueven en el espacio, de modo que, en el tiempo t un de ellos está en la posición $A(1 + t, 4t, 1 + 2t)$ y el otro se ubica en $B(7 + 2t, 6 + 2t, 1 + t)$.

- Determine si las trayectorias de estos objetos se cruzan. En caso afirmativo, indique en qué punto lo hacen.
- Investigue si los objetos se chocan. De ser así, determine en qué punto del espacio y para que valor de t sucede.

3.2 Curvas parametrizadas

Ya en la primera sección de este capítulo se afirmó que la traza o imagen $\alpha(I)$ de una función vectorial $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un subconjunto de puntos de \mathbb{R}^m y recibe el nombre de curva. En este apartado nos ocuparemos de todos los detalles geométricos y algebraicos de las curvas en espacio euclidiano \mathbb{R}^m que vayan en relación directa con los alcances de este libro, no sin antes aclarar que, en la bibliografía existente, es común que a la función continua $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ se le llame camino o trayectoria en el espacio euclidiano \mathbb{R}^m .

Como ya se dejó entrever en el comentario inicial, los objetos matemáticos que estudiaremos en esta sección son las curvas y además reduciremos nuestro estudio a las dimensiones $m = 2$ y $m = 3$. Es decir, que a partir de ahora designaremos con la palabra curva en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 y que denotaremos con la letra \mathcal{C} , a la traza de una función vectorial continua $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ o $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, respectivamente, según la definición 3.2. Sin embargo, en la manipulación de estos objetos y cuando no haya peligro de confusión, las propiedades de función vectorial α las podemos proyectar como las propiedades de la curva \mathcal{C} (imagen de α .)

Con el propósito de fijar conceptos que serán de utilidad en los capítulos posteriores, estableceremos la siguiente definición.

Definición 3.16 [Representación paramétrica de una curva]

Una curva \mathcal{C} en el plano bidimensional \mathbb{R}^2 o en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 es un conjunto dirigido de puntos de \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 para los cuales existe una función continua $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ o $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, respectivamente tal que $\alpha(I) = \mathcal{C}$. A la función continua α se le denomina parametrización de la curva.

Eliminación del parámetro

La ecuación cartesiana de una curva presentada en forma paramétrica se obtiene eliminando el parámetro t , sin embargo debemos prevenir al lector de que no existe un método general para dicha eliminación. En realidad el procedimiento para eliminar el parámetro en un problema depende, esencialmente, de la forma de las ecuaciones. A continuación examinaremos algunos de estos problemas.

Ejemplo 3.33

Obtenga la ecuación cartesiana de la curva

$$C : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = \frac{1}{3}t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Solución.

Para eliminar el parámetro t en las ecuaciones dadas, se procede a despejar t de la primera ecuación y luego se sustituye en la segunda. En efecto, si $t = 3 - x$ entonces

$$y = \frac{1}{3}(3 - x)^2 = \frac{1}{3}(x - 3)^2$$

es la ecuación cartesiana que corresponde a una parábola con vértice en $(3, 0)$ y eje focal paralelo al eje Y .

□

Ejemplo 3.34

Elimine el parámetro t de las ecuaciones paramétricas

$$C : \begin{cases} x = 2 \operatorname{sen} t \\ y = \cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

y obtenga la ecuación cartesiana de C .

Solución.

En vista de que tenemos las funciones trigonométricas involucradas en la identidad pitagórica, despejamos $\operatorname{sen} t$ de la primera ecuación, es decir $\operatorname{sen} t = \frac{x}{2}$.

Luego elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad anterior y obtenemos $\operatorname{sen}^2 t = \frac{x^2}{4}$, y si a este resultado le sumamos la expresión $y^2 = \cos^2 t$, obtenemos

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Es decir, la curva C es una elipse con centro en el origen, semieje mayor situado sobre el eje X con una longitud de 4 unidades y la longitud del semieje menor, localizado sobre el eje Y , es 2.

□

Ejemplo 3.35

Describe y grafique la curva representada por las ecuaciones paramétricas

$$C : \begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Solución.

Es claro que dichas ecuaciones definen una curva plana y que a cada valor del parámetro $t \in \mathbb{R}$, le corresponde un punto sobre la curva que presentamos en la siguiente tabla.

t	\dots	-3	-2	-1	0	1	2	3	\dots
x	\dots	-8	-3	0	1	0	-3	-8	\dots
y	\dots	-1	0	1	2	3	4	5	\dots

A continuación, situamos los puntos $(x, y) = (x(t), y(t))$ en el plano. Si unimos estos puntos obtenemos una curva continua que observamos en la figura 3.16, en la que las flechas indican la orientación en el que se van generando los puntos de la curva a medida que t aumenta su valor.

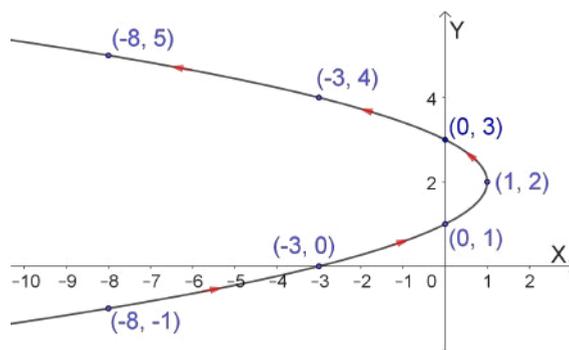


Figura 3.16: Curva paramétrica con $t \in \mathbb{R}$.

Observando la figura, parece que la curva trazada fuera una parábola, pero ¿cómo podemos comprobarlo?. Una forma de responder a esta interrogante es reescribiendo las ecuaciones paramétricas de la curva en otra ecuación usando coordenadas cartesianas, esto es, buscando una relación entre x e y . Para ello debemos eliminar t en las ecuaciones dadas. En este ejemplo es posible hacerlo, y se procede a despejar t de la segunda ecuación y luego se sustituye en la primera. En efecto, si $t = y - 2$ entonces $x = 1 - (y - 2)^2$ y así verificamos que la curva descrita por las ecuaciones paramétricas dadas es la parábola de eje focal paralelo al eje X y vértice en $(1, 2)$ que se abre hacia la izquierda.

□

Arcos en el plano y en el espacio

A efectos de las futuras aplicaciones, nuestro interés se ceñirá al caso particular $I = [a, b]$, para lo cual establecemos la próxima definición.

Definición 3.17 [Arco]

A la imagen o traza de una función continua $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, para $m = 2$ o $m = 3$, definida en el intervalo cerrado $I = [a, b]$ le llamaremos *arco que también será denotado por \mathcal{C}* .

La representación paramétrica de un arco \mathcal{C} en el plano XY está dada por la función vectorial

$$\begin{aligned} \alpha : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

de donde se obtienen las ecuaciones paramétrica del arco \mathcal{C} , es decir

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [a, b]. \quad (3.11)$$

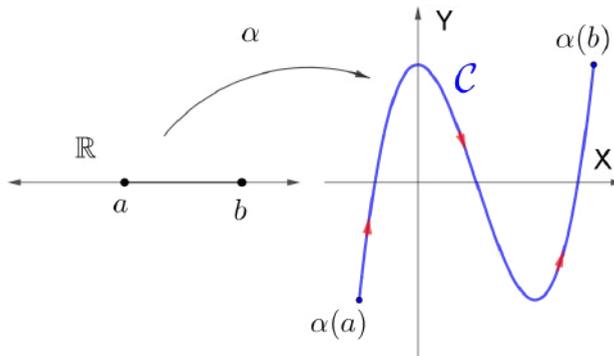


Figura 3.17: Representación geométrica de un arco en \mathbb{R}^2

Por otro lado, la función vectorial que parametriza un arco \mathcal{C} en el espacio \mathbb{R}^3 tiene la forma

$$\begin{aligned} \alpha : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

y las respectivas ecuaciones paramétricas del mismo son

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in [a, b]. \quad (3.12)$$

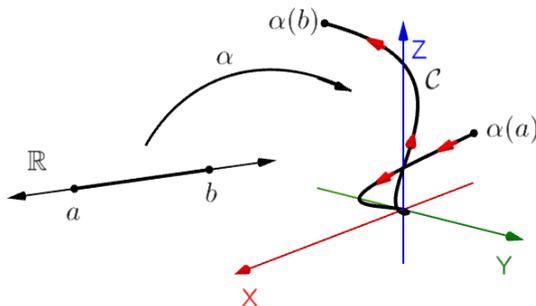


Figura 3.18: Representación geométrica de un arco en \mathbb{R}^3

Para efectos de estudiar la geometría de los arcos (curvas en general), será de mucho provecho tener siempre presente que la variable independiente t recorre el intervalo $I = [a, b]$ de izquierda a derecha y visualizar a las imágenes correspondientes moviéndose en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 dejando así delineada su traza de manera continua. Esto nos facilitará el camino para comprender los dos ingredientes importantes que caracterizan a un arco (curva en general): la forma del arco en sí y la manera como es recorrido.

Al aludir a la forma del arco en sí, nos referimos a la trayectoria del arco que se entiende como la forma que describe su recorrido en el plano cartesiano o en el espacio. Sirva de ejemplo una línea recta, una elipse, una espiral o cualquier otra forma geométrica las cuales dependen de las ecuaciones paramétricas del arco.

Por otro lado, a la manera como es recorrido un arco se le llama **orientación** del arco, la misma que queda supeditada al sentido en el que se recorre la trayectoria. La orientación de un arco queda determinado por la forma cómo se van generando los puntos del arco a medida que t aumenta su valor; por ejemplo, orientación en sentido horario o anti horario. La orientación de la curva puede tener un impacto en cómo se visualiza y se interpreta.

En los gráficos anteriores podemos observar las flechas sobre la imagen de α . Esta flechas indican la orientación del arco \mathcal{C} (imagen de α).

Clasificación de los arcos

A continuación describimos las características que hacen especiales a algunos arcos tanto en \mathbb{R}^2 como en \mathbb{R}^3 .

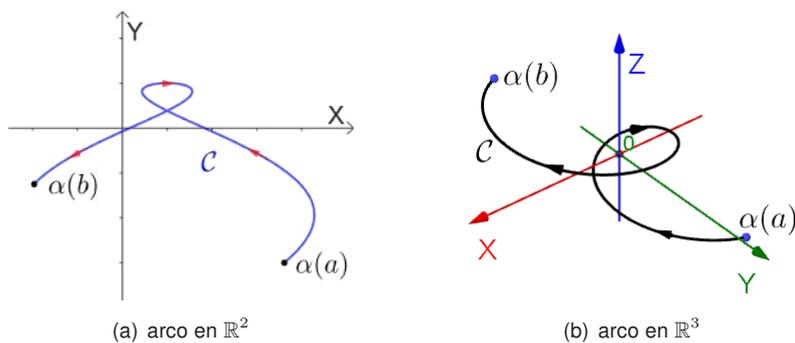


Figura 3.19: Punto inicial y final de un arco

Si consideramos $m = 2$ o $m = 3$ y $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ una parametrización del arco \mathcal{C} , entonces decimos que:

- 1 El punto $P \in \mathbb{R}^m$ pertenece al arco \mathcal{C} si existe $t_0 \in [a, b]$ tal que $P = \alpha(t_0)$.
- 2 El punto $\alpha(a) \in \mathbb{R}^m$ es el punto inicial del arco \mathcal{C} , (o arco α) en tanto que su punto final está determinado por $\alpha(b) \in \mathbb{R}^m$.
- 3 α es un arco simple, si la función α es inyectiva en I , es decir, para todo $t_1, t_2 \in I$, si $t_1 \neq t_2$ implica que $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$.
- 4 El punto $Q \in \mathcal{C}$ es un punto múltiple si α no es inyectiva en $[a, b]$, o equivalentemente, si existen $t_1, t_2 \in [a, b]$, con $t_1 \neq t_2$ tal que $Q = \alpha(t_1) = \alpha(t_2)$. En el momento de representar gráficamente la traza de \mathcal{C} , es habitual denominar a este punto Q como punto de autointersección.
- 5 Si ocurre que $\alpha(a) = \alpha(b)$ entonces el arco α es cerrado.
- 6 Si se tiene que $\alpha(a) = \alpha(b)$ y la función α restringida al intervalo $[a, b[$ es inyectiva, entonces el arco es cerrado simple.

A continuación, los siguientes ejemplos y gráficos buscan ilustrar la clasificación que se ha descrito previamente.

En la figura 3.20 podemos apreciar la representación gráfica de un arco simple tanto en \mathbb{R}^2 como en \mathbb{R}^3 .

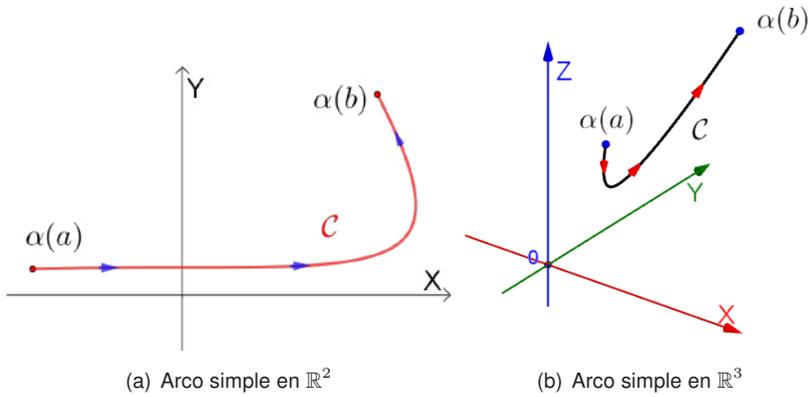


Figura 3.20: Arcos simples

Ejemplo 3.36

Sea la curva \mathcal{C} parametrizada por

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Determine los valores de t en donde tiene un punto múltiple o auto intersección.

Solución.

Sean $t_1 \neq t_2$ tales que $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$. Esto implica que de la igualdad

$$\left((t_1)^2, (t_1)^3 - t_1 \right) = \left((t_2)^2, (t_2)^3 - t_2 \right)$$

se desprende

$$(t_1)^2 = (t_2)^2 \leftrightarrow t_1 = t_2 \vee t_1 = -t_2,$$

de los que solo sobrevive $t_1 = -t_2$. Al sustituir en $(t_1)^3 - t_1 = (t_2)^3 - t_2$ se obtiene

$$(-t_2)^3 - (-t_2) = (t_2)^3 - t_2 \leftrightarrow 2(t_2)^3 - 2t_2 = 0,$$

cuya solución es $t_2 = 1$, $t_2 = 0$ o $t_2 = -1$, descartando el valor $t_2 = 0$.

Así, la curva \mathcal{C} , que ponemos a la vista en la figura 3.21, tiene un punto múltiple para $t_1 = -1$ y $t_2 = 1$, ya que $\alpha(1) = \alpha(-1) = (1, 0)$.

□

En la figura 3.22 podemos visualizar la representación gráfica de un arco cerrado tanto en \mathbb{R}^2 así como en \mathbb{R}^3 .

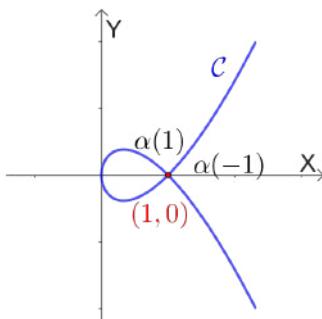


Figura 3.21: Punto múltiple en una curva del ejemplo 3.36

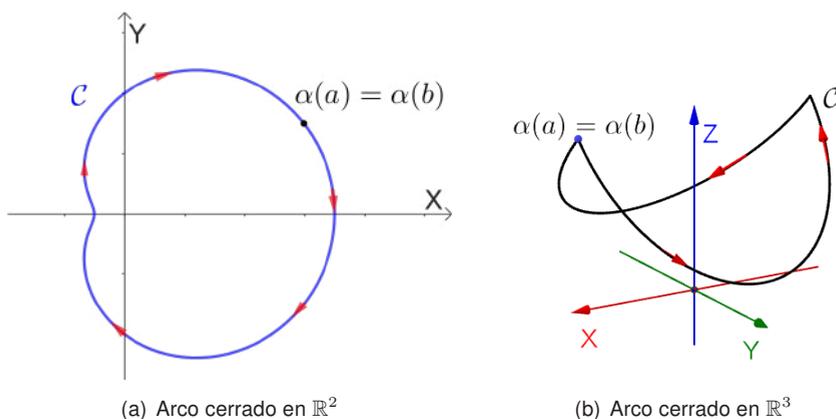


Figura 3.22: Arcos cerrados

Ejemplo 3.37

La curva \mathcal{C} parametrizada por

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = \cos t (2 \cos t - 1) \\ y = \sin t (2 \cos t - 1) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

es un arco cerrado, no simple, ya que $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = (1, 0)$.

□

Recordemos que la definición 3.11 establece que una función $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ es regular si es de clase C^1 y su derivada es distinta de cero en todos los puntos de I .

No obstante la transparencia de la definición, cabe la pregunta: ¿cómo se entienden estas dos condiciones cuando $I = [a, b]$?

En primer lugar, la condición de que α sea de clase C^1 en el intervalo cerrado $[a, b]$

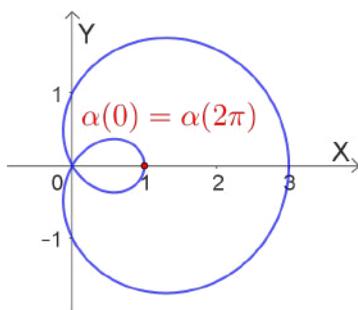


Figura 3.23: arco cerrado no simple del ejemplo 3.37

se entiende como que α es continua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$, y en los extremos a y b existen derivadas laterales, de modo que la función derivada extendida así hasta los extremos del intervalo sea continua.

En segundo termino, la condición de que la derivada de α sea distinta de cero se aplica también a esas derivadas laterales en los extremos.

En última instancia y desde el punto de vista geométrico, estas condiciones sobre α implican que en cada punto de \mathcal{C} existe una única recta tangente, en concordancia con la definición 3.12, incluso en los extremos de \mathcal{C} , y además que la curva es suave, es decir, la dirección y sentido de la recta tangente varían de forma continua.

Parametrización de un segmento de recta

Un segmento de recta entre dos puntos A y B es un arco, en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , que se puede parametrizar mediante la función

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\mapsto \alpha(t) = A + t(B - A) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Esta parametrización proporciona la orientación del segmento desde el punto $A = \alpha(0)$ hacía el punto $B = \alpha(1)$, tal como se muestra en la figura 3.24.

Ejemplo 3.38

Determine un conjunto de ecuaciones paramétricas del segmento de recta que va desde el punto $(-4, 5)$ hasta $(2, -3)$.

Solución.

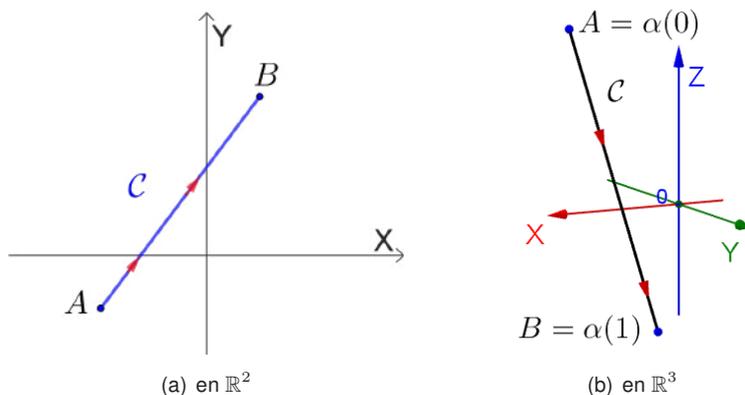


Figura 3.24: Un segmento de recta entre dos puntos A y B

Sean $A(-4, 5)$ el punto inicial y $B(2, -3)$ el punto final del segmento de recta. Procediendo de acuerdo con (3.13) se tiene la función vectorial

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (-4, 5) + t((2, -3) - (-4, 5)) \\ &= (-4, 5) + t(6, -8), \quad t \in [0, 1].\end{aligned}$$

Luego, de conformidad con (3.11), un conjunto de ecuaciones paramétricas está dado por

$$C : \begin{cases} x = -4 + 6t \\ y = 5 - 8t \end{cases}, \quad t \in [0, 1].$$

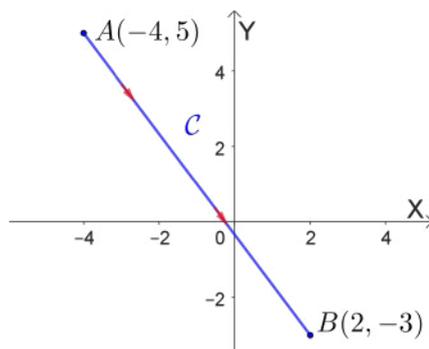


Figura 3.25: Segmento \overline{AB}

□

Ejemplo 3.39

Determine un conjunto de ecuaciones paramétricas del segmento de recta que va desde el punto $(-2, 4, 3)$ hasta $(1, 2, -5)$.

Solución.

Considere $A(-2, 4, 3)$ y $B(1, 2, -5)$ el punto inicial y final del segmento de recta, respectivamente. En aplicación de (3.13) se tiene la función vectorial

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (-2, 4, 3) + t((1, 2, -5) - (-2, 4, 3)) \\ &= (-2, 4, 3) + t(3, -2, -8), \quad t \in [0, 1].\end{aligned}$$

Luego, al amparo de (3.12), un conjunto de ecuaciones paramétricas está dado por

$$C : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - 2t \\ z = 3 - 8t \end{cases}, \quad t \in [0, 1].$$

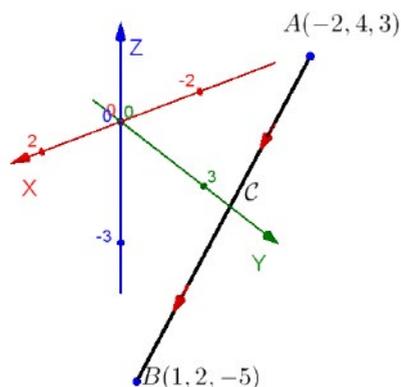


Figura 3.26: Segmento \overline{AB} □

Parametrización de la gráfica de una función real de una variable

La gráfica de una función real de variable real diferenciable dada por $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una curva en \mathbb{R}^2 que se puede parametrizar mediante la función vectorial

$$\begin{aligned}\alpha : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto \alpha(t) = (t, f(t)).\end{aligned}\tag{3.14}$$

Esto significa que una parametrización se obtiene haciendo $x = t$ para luego sustituir en la regla de correspondencia de f y conseguir la expresión $y = f(t)$ justo como se ve en la figura 3.27.

Ejemplo 3.40

Determine una parametrización para el arco parabólico $y = 4x - x^2$ desde el punto $(1, 3)$ hasta $(4, 0)$.

Solución.

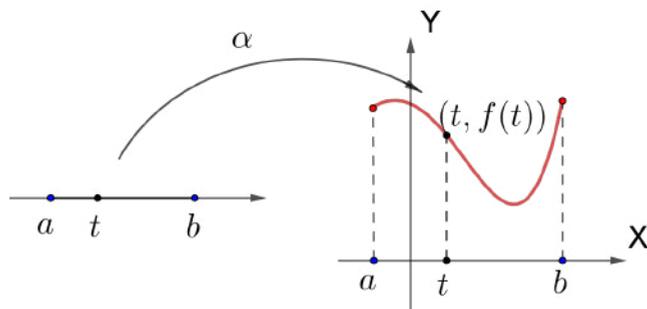


Figura 3.27: Parametrización de la gráfica de $y = f(x)$

Dado que el arco parabólico corresponde a una porción del gráfico de la función $f(x) = 4x - x^2$, entonces una ecuación paramétrica está dada por

$$\alpha(t) = (t, 4t - t^2), \text{ con } t \in [1, 4],$$

lo que va en correspondencia con lo descrito en (3.14).

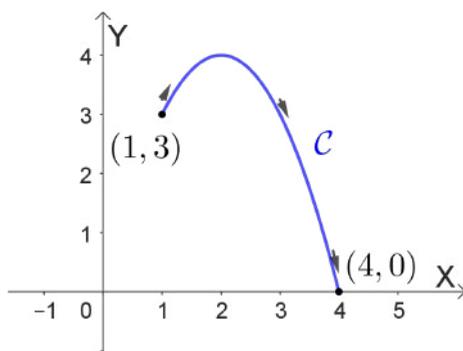


Figura 3.28: Parametrización de la gráfica de $f(x) = 4x - x^2$, $x \in [1, 4]$

□

Parametrizaciones equivalentes de una curva

En este punto debemos advertir que una curva o un arco admite más de una parametrización, en el sentido de la definición 3.16, por consiguiente se debe tener cuidado en distinguir si una propiedad lo es de \mathcal{C} o de la parametrización α .

En el siguiente teorema se demuestra que si se tienen dos parametrizaciones de la misma curva, entonces existe una función denominada cambio de parámetro, que cumple ciertas condiciones específicas y que nos permitirá afirmar que las dos parametrizaciones mencionadas son equivalentes.

Teorema 3.12 [Parametrizaciones equivalentes de una curva]

Sean $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$ dos parametrizaciones de la misma curva \mathcal{C} , entonces existe una función $\psi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ biyectiva, continua en $[a, b]$, de clase C^1 en $]a, b[$ y con $\psi'(t) \neq 0$ para todo $t \in]a, b[$, tal que $\alpha = \beta \circ \psi$. A la función ψ se denomina cambio de parámetro, y se dice que α y β son equivalentes.

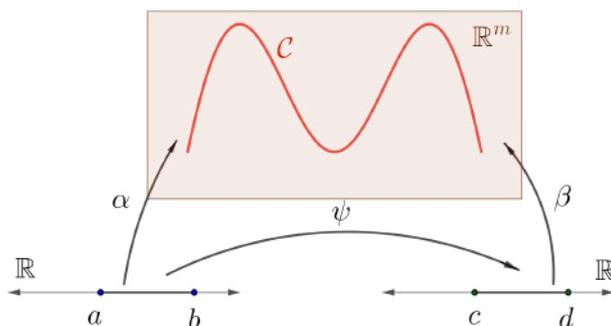


Figura 3.29: Idea gráfica del teorema 3.12

Prueba 3.12 En base a la hipótesis, definimos la función $\psi = \beta^{-1} \circ \alpha$, que es biyectiva. Por otro lado, como $[c, d]$ es compacto y β es inyectiva y continua, entonces su inversa $\beta^{-1} : \mathcal{C} \rightarrow [c, d]$ es también continua, en consecuencia, ψ es continua en $[a, b]$ y $\psi([a, b]) = [c, d]$.

A continuación examinaremos lo que sucede puntualmente con la función definida previamente, para ello consideremos $t \in]a, b[$ un punto cualquiera, para el cual es claro que $\psi(t) \in [c, d]$ y como β es regular, discurre que $\beta'(\psi(t)) \neq 0$.

Seguidamente mostraremos el camino que nos llevará a nuestro objetivo y para ello exhibiremos el razonamiento considerando las primeras coordenadas de las funciones involucradas. Así, $\beta'_1 \circ \psi$ satisface $\beta'_1(\psi(t)) \neq 0$ y de la ecuación $\alpha = \beta \circ \psi$ se deduce que $\alpha_1 = \beta_1 \circ \psi$.

En virtud del teorema de la función inversa, la condición $\beta'_1(\psi(t)) \neq 0$ implica que existen un entorno A de $\psi(t)$ definido por

$$A =]\psi(t) - \varepsilon, \psi(t) + \varepsilon[\cap [c, d]$$

y un entorno de $\beta_1(\psi(t))$ denotado por B , de modo que $\beta_1 : A \rightarrow B$ es biyectiva y tiene una inversa local de clase C^1 definida por $\beta_1^{-1} : B \rightarrow A$.

Por otra parte, la continuidad de α_1 en t garantiza la existencia de un entorno de este punto, digamos $]t - \delta, t + \delta[\cap [a, b]$, tal que

$$\alpha_1(]t - \delta, t + \delta[\cap [a, b]) \subseteq B.$$

De esta forma quedamos habilitados para efectuar la composición de β_1^{-1} con α_1 , lo que nos lleva a la igualdad

$$\beta_1^{-1} \circ \alpha_1 = \beta_1^{-1} \circ \beta_1 \circ \psi = \psi$$

que se cumple en el entorno $]t - \delta, t + \delta[\cap [a, b]$. En consecuencia, ψ es de clase C^1 por ser composición de funciones de clase C^1 .

Este razonamiento es análogo para cualesquiera de las componentes de las funciones descritas en el teorema.

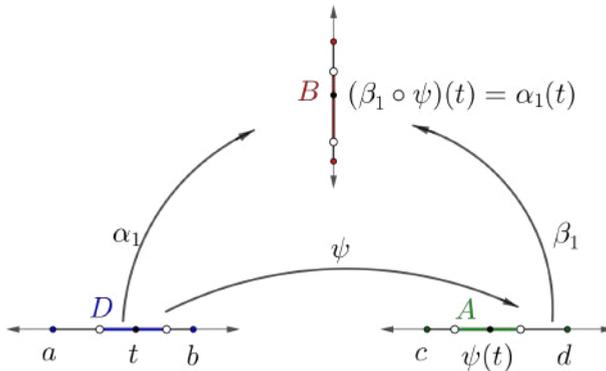


Figura 3.30: Representación geométrica de $\beta_1 \circ \psi$

■

Este cambio de parámetro nos va a permitir demostrar que las propiedades que vamos a estudiar lo son de \mathcal{C} , es decir no dependen de la parametrización utilizada para describir analíticamente a \mathcal{C} .

Para ilustrar la afirmación anterior, mostraremos que la recta tangente a la curva en un punto no depende de la parametrización.

Si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$ son dos parametrizaciones de la misma curva \mathcal{C} y $\psi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ es el cambio de parámetro tal que $\alpha = \beta \circ \psi$, entonces el objetivo quedará cumplido al mostrar que los vector tangentes de α y β son paralelos.

En efecto, consideremos los puntos $t_0 \in [a, b]$, tal que $\alpha(t_0) = P_0 \in \mathbb{R}^m$, y $s_0 \in [c, d]$ de modo que $\beta(s_0) = P_0$. Es claro que $\psi(t_0) = s_0$ y, con ello, el vector tangente de α en t_0 se expresa como sigue

$$\alpha'(t_0) = (\beta \circ \psi)'(t_0) = \beta'(\psi(t_0))\psi'(t_0) = \beta'(s_0)\psi'(t_0),$$

donde $\psi'(t_0) \neq 0$.

De la igualdad de arriba se desprende que los vectores $\alpha'(t_0)$ y $\beta'(s_0)$ son múltiplo escalar uno del otro, es decir, son paralelos y definen la misma recta tangente cuya ecuación vectorial es

$$\mathcal{L}_T : P = P_0 + \lambda\alpha'(t_0) \equiv P_0 + \mu\beta'(s_0).$$

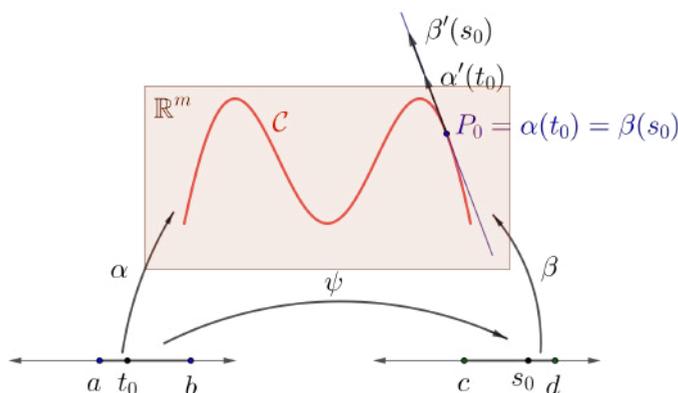


Figura 3.31: Vectores tangentes paralelos

Por el contrario, la orientación o el sentido de recorrido de la curva \mathcal{C} si depende de la parametrización que se utilice, es decir, suele suceder que algunas parametrizaciones equivalentes de un arco preservan la orientación; en cambio otras la invierten. Efectivamente, si α y β son dos parametrizaciones de la curva \mathcal{C} , se tienen los siguientes dos escenarios:

- 1 las dos definen la misma orientación para \mathcal{C} si y sólo si la función de cambio de parámetro ψ es estrictamente creciente, es decir, $\psi'(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$.
- 2 por otro lado, las dos definen orientaciones opuestas si ψ es estrictamente decreciente, o sea, $\psi'(t) < 0$ para todo $t \in [a, b]$.

Observemos además que como ψ' es continua y siempre es diferente de cero, entonces ψ' no cambia de signo en $[a, b]$. En consecuencia, basta con comprobar que en un punto del intervalo, la derivada $\psi'(t)$ es positiva o negativa.

Como un ejemplo para ilustrar esta situación, pensemos en un segmento de recta entre dos puntos. Si consideramos la parametrización α , dada por (3.13), el sentido de recorrido de C será del punto A al punto B , sin embargo, al escoger la parametrización β la orientación inicia en B y termina en el punto A , tal como se muestra en la figura 3.32.

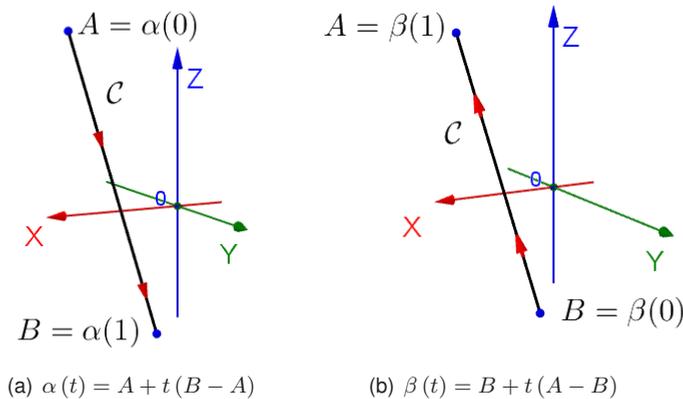


Figura 3.32: Parametrizaciones que cambian la orientación de un segmento

Seguidamente, mostramos una forma sencilla de invertir la orientación de un arco o curva.

(N)

Para $m = 2$ o $m = 3$, si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ una parametrización del arco C y la función

$$\begin{aligned} \psi : [-b, -a] &\rightarrow [a, b] \\ t &\mapsto \psi(t) = -t \end{aligned}$$

es biyectiva, decreciente y de clase C^1 , entonces

$$\begin{aligned} \beta : [-b, -a] &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\mapsto \beta(t) = (\alpha \circ \psi)(t) = \alpha(-t) \end{aligned}$$

es una parametrización de α equivalente que invierte la orientación.

Finalmente, diremos que una curva está orientada si escogemos un sentido para el recorrido de C y, en ese caso, escribiremos C^+ . En función a lo anterior, afirmaremos

que α es una parametrización de C^+ si al recorrer el intervalo de izquierda a derecha, los valores de la imagen que se obtengan recorren a C en el sentido de orientación definido para C^+ . En cambio si β es otra parametrización de C que describe a la curva con la orientación opuesta, precisaremos que β es una parametrización de C^- .

Recuerde que, en la práctica, para definir la orientación de una curva, basta con indicar cuál debe ser el extremo inicial y cuál el extremo final, o dar directamente una parametrización de C^+ .

Parametrización de una circunferencia

Una circunferencia en el plano XY , con centro en el punto (h, k) y radio R tiene como ecuación cartesiana

$$C : (x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2. \quad (3.15)$$

Una parametrización para este arco cerrado está dada por

$$C : \alpha(t) = (h + R \cos t, k + R \sin t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad (3.16)$$

que induce una orientación antihoraria al momento de graficar el arco.

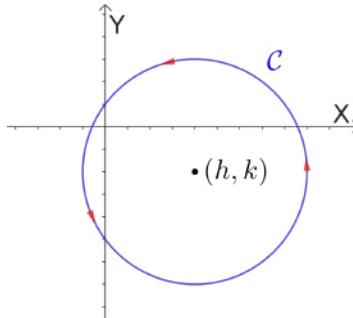


Figura 3.33: Circunferencia con centro en (h, k) y radio R

En particular, una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio R cuya ecuación cartesiana es

$$C : x^2 + y^2 = R^2, \quad (3.17)$$

se puede parametrizar mediante las funciones

$$\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad t \in [0, 2\pi] \quad (3.18)$$

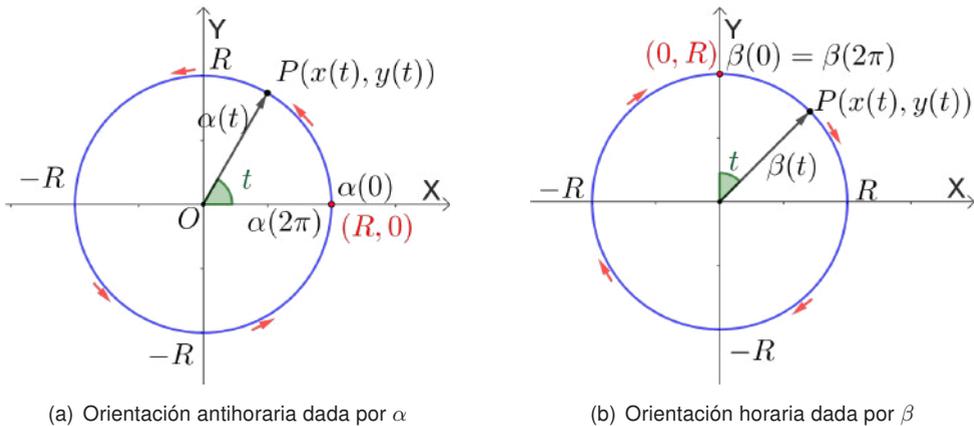
$$\beta(t) = (R \operatorname{sen} t, R \operatorname{cos} t), \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (3.19)$$

A continuación describiremos el recorrido de la imagen de cada parametrización, indicando los puntos inicial y final así como la orientación de cada una de ellas.

Las ecuaciones paramétricas dadas por α son $x(t) = R \operatorname{cos} t$ y $y(t) = R \operatorname{sen} t$. Si para algunos valores de t posicionamos en el plano los puntos $P(x(t), y(t))$, ellos siguen el recorrido de una circunferencia de radio R con centro en el origen, en concordancia con la siguiente tabla de valores.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x	R	$0,7R$	0	$-0,7R$	$-R$	$-0,7R$	0	$0,7R$	R
y	0	$0,7R$	R	$0,7R$	0	$-0,7R$	$-R$	$-0,7R$	0

Debe percatarse que en este ejemplo el parámetro t corresponde al ángulo entre el semieje positivo de las abscisas y el vector \overrightarrow{OP} , como se ve en la figura 3.34(a). El punto inicial y final de la curva es $(R, 0) = \alpha(0) = \alpha(2\pi)$ y, a medida que el parámetro aumenta desde 0 hasta 2π , el punto P recorre la circunferencia en sentido antihorario, esto es contrario al movimiento de las agujas de un reloj.



(a) Orientación antihoraria dada por α

(b) Orientación horaria dada por β

Figura 3.34: Dos parametrizaciones de una circunferencia

Por otro lado, de la función vectorial β , dada por 3.19, se obtienen las ecuaciones paramétricas $x(t) = R \operatorname{sen} t$ y $y(t) = R \operatorname{cos} t$ que al ser evaluadas en los valores de $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi$ se obtienen los pares ordenados consignados en la siguiente tabla

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x	0	$0,7R$	R	$0,7R$	0	$-0,7R$	$-R$	$-0,7R$	0
y	R	$0,7R$	0	$-0,7R$	$-R$	$-0,7R$	0	$0,7R$	R

O sea que la gráfica de la curva nuevamente es la circunferencia de radio R centrada en el origen, sin embargo, debe notar que ahora el parámetro t corresponde al ángulo entre el semieje positivo de las ordenadas el vector \overrightarrow{OP} , tal como se aprecia en la figura 3.34(b). Además, la curva parametrizada por $\beta(t)$ comienza en $(0, R)$ y termina en ese mismo punto después de haber girado una vuelta sobre la circunferencia en sentido horario.

La moraleja de este apartado es que las ecuaciones (3.18) y (3.19) presentan funciones vectoriales distintas, que tienen la misma gráfica. Ante esto, es esencial distinguir entre una curva, que es un conjunto de puntos, y una curva paramétrica cuyos puntos son obtenidos mediante una función vectorial que proporciona, a su vez, una dirección y un sentido u orientación determinados. Por consiguiente, aunque las gráficas de las circunferencias coinciden, las curvas paramétricas son diferentes.

En términos generales, si pensamos en la curva trazada por el movimiento de un objeto, su representación paramétrica nos dice en qué punto está el móvil en cada instante de tiempo, hacia donde va, y con qué velocidad y aceleración se mueve; mientras que la gráfica de la curva solo da información de los puntos por los que pasa el móvil.

Curvas en el espacio

En esta sección enfocaremos nuestro interés particular en los arcos en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 que son parametrizados por funciones cuyos valores son tridimensionales. Como ya sabemos, esto significa que por cada número t en el dominio de α existe un único vector de \mathbb{R}^3 denotado por $\alpha(t)$, y si $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son las componentes de dicho vector, donde x , y y z son funciones de valor real llamadas funciones componentes de α y, de acuerdo con (3.1), podemos escribir

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Por lo regular, las curvas espaciales son inherentemente más difíciles de dibujar que las curvas planas. Por consiguiente, cuando el caso lo amerite, utilizaremos la tecnología computacional para obtener una representación gráfica más precisa del arco o curva.

Para mostrar esta situación, considere la curva con ecuaciones paramétricas

$$C : \begin{cases} x = (4 + \cos(15t)) \cos t \\ y = (4 + \cos(15t)) \sin t \\ z = \sin(15t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

cuya gráfica se exhibe en la figura 3.35 y es llamada la espiral toroidal.

Incluso con la ayuda de una computadora para representar gráficamente una arco, la perspectiva del observador podría dificultar la comprensión geométrica de la forma real de la curva.

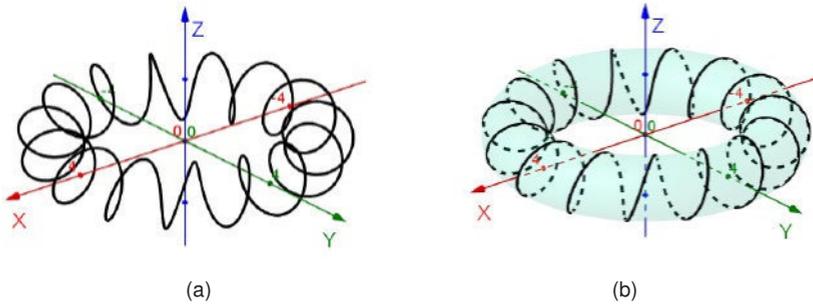


Figura 3.35: La espiral toroidal

En vista de lo anterior, la forma que optaremos para visualizar una curva en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 es pensarla como el resultado de la intersección de dos superficies, y por tanto, su gráfica quedará expuesta sobre una de ellas.

En efecto, dos superficies

$$S_1 = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\} \text{ y } S_2 = \{(x, y, z) : G(x, y, z) = 0\}$$

que se cortan entre sí determinan una curva en el espacio que se define como el conjunto de puntos que satisface ambas relaciones simultáneamente, es decir

$$C = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0 \wedge G(x, y, z) = 0\},$$

que para efectos prácticos escribiremos

$$C : \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

Veamos una forma alternativa de describir tal curva, mediante una función vectorial.

Ejemplo 3.41

Determine una función vectorial que describa la curva

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + z = 3 \end{cases}.$$

e indique la orientación asignada por la parametrización propuesta.

Solución.

En primer lugar, observe que la curva del enunciado resulta de la intersección entre el cilindro circular con eje igual al eje Z , radio 2 y representado por la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ y la superficie plana dada por $x + z = 3$ paralelo al eje Y , tal como se pone a la vista en la figura 3.36.

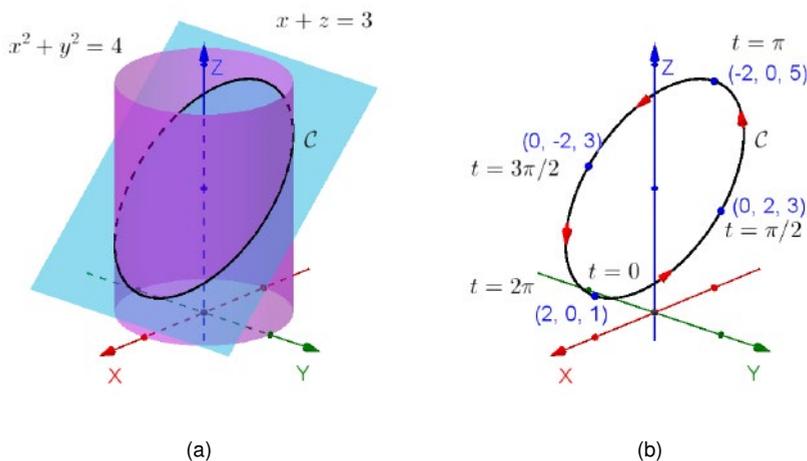


Figura 3.36: Curva intersección de un cilindro y un plano

A partir de la figura, notamos que la curva intersección \mathcal{C} es una curva cerrada y tiene la forma de una elipse sobre el plano $x + z = 3$, por lo que un punto cualquiera $P(x, y, z)$ de la curva debe verificar simultáneamente ambas ecuaciones, dado que pertenece a ambas superficies a la vez.

En segundo término, buscaremos expresar todo punto (x, y, z) en términos de un parámetro t de forma que se verifiquen ambas ecuaciones. En efecto, la ecuación del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ allana el camino ya que si usamos las ecuaciones paramétricas $x(t) = 2 \cos t$ y $y(t) = 2 \sin t$, que se deducen de (3.18), su ecuación queda satisfecha.

Usando lo anterior en la ecuación del plano tenemos que $z = 3 - x$ implica que $z(t) = 3 - 2 \cos t$. Así, una parametrización de la curva intersección es

$$\alpha(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 3 - 2 \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Finalmente, la orientación que se le asigna a la curva paramétrica \mathcal{C} a medida que aumenta el parámetro t , es en sentido antihorario visto desde el semieje Z positivo que es inducida por la parametrización dada por (3.18) la cual se utilizó para parametrizar el cilindro.

□

3.2.1. Problemas propuestos

3.33 Determine una parametrización de la curva plana $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$.

3.34 Obtenga una parametrización de las siguientes curvas, determinando el dominio de cada parametrización.

a) $y = 7x + 2$.

b) $y^2 + x^2 = 6x$.

c) $y = \cos^2 x$.

d) $x^2 = 6 - y$.

e) $x^2 - 4x + y^2 + 6y + 9 = 0$.

f) $e^y = 2 + x^2$.

3.35 Dada la curva \mathcal{C} descrita por $\alpha(t) = (2 \operatorname{sen} |t|, 2 \operatorname{cos} |t|)$, para $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Represente gráficamente la curva \mathcal{C} indicando su orientación. Además, clasifique el arco obtenido.

3.36 Dibuje los siguientes arcos e indique la orientación inducida por la parametrización dada. (Sug: confeccione una tabla con una cantidad razonable de valores de t o utilice algún software graficador)

a) $\alpha(t) = (3 \operatorname{cos} t, \operatorname{sen} t); t \in [0, \pi]$.

b) $\beta(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{cos}(2t)); t \in [0, 2\pi]$.

c) $\gamma(t) = \left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}\right); t \in]0, 10]$.

d) $\varphi(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{cos}(2t), t^2); t \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$.

e) $\psi(t) = (t^2, t^3, t); t \in]-3, 3]$.

f) $\omega(t) = (t, \operatorname{cos} t, \operatorname{sen} t); t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3.37 Determine una parametrización de la curva plana $27y^2 = 4x^3$.

3.38 Verifique una parametrización de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

esta dada por la función $\gamma(t) = (a \operatorname{sect}, b \tan t); t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

3.39 Elimine el parámetro t de las ecuaciones paramétricas

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = 2 + 3 \tan t \\ y = 1 + 4 \sec t \end{cases}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

y obtenga la ecuación cartesiana de \mathcal{C} .

3.40 Elimine el parámetro t de las siguientes ecuaciones paramétricas y obtenga la ecuación cartesiana de \mathcal{C}

$$\text{a) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = 4(1 - t) \\ y = -5t \end{cases}.$$

$$\text{b) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = 3 \tan t \\ y = 5 \cot t \end{cases}.$$

$$\text{c) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = \sen^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases}.$$

$$\text{d) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}.$$

$$\text{e) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = \sen\left(\frac{t}{2}\right) \\ y = \cos t \end{cases}.$$

3.41 Elimine el parámetro t de las ecuaciones paramétricas

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = \sen^2 t \\ y = \tan^2 t \sen^2 t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

y obtenga la ecuación cartesiana de \mathcal{C}

3.42 Verifique que la parametrización

$$\gamma(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

representa una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio igual a 1.

3.43 Determine una parametrización de la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} z = 3 - 3x^2 - y^2 \\ z = x^2 + 2y \end{cases}$$

indicando su dominio.

3.44 Verifique que, para todo $t \in \mathbb{R}$ y $a > 0$, la función vectorial

$$\alpha(t) = a \left(\frac{2}{\pi} \arctan t, \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2} \arctan^2 t} \right)$$

satisface $x^2 + y^2 = a^2$, sin embargo su imagen no recorre toda la circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio igual a a .

3.45 Determine los valores de t en donde la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = \cos t - \frac{1}{2} \cos(3t) \\ y = \sin t - \frac{1}{2} \sin(3t) \end{cases}, t \in [-\pi, \pi].$$

tiene puntos múltiples o auto intersecciones. Además encuentre las coordenadas de dichos puntos.

3.46 Considere la curva definida por

$$\mathcal{C} : \begin{cases} z = 1 + y \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}.$$

Grafique la curva \mathcal{C} y determine una parametrización que proporcione una orientación anti horaria vista desde el eje Z positivo.

3.47 Sea la curva descrita por las superficies

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + 2x + y^2 + 2y + 1 = 0 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

- Obtenga una parametrización de la curva \mathcal{C} .
- Determine las coordenadas del vector aceleración de α en el punto $y = 0$.

3.48 Verifique que la traza de la función vectorial

$$\gamma(t) = (\sin t, \cos t, \sin^2 t), t \in [0, 2\pi]$$

representa a la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 - z = 0 \\ y^2 + x^2 = 1 \end{cases}.$$

3.49 Sea la curva descrita por la ecuación

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ y^2 = x \end{cases}$$

Obtenga una parametrización del arco de \mathcal{C} que va desde el origen hasta el punto $(1, 1, \sqrt{2})$.

3.50 Considere la curva definida por

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases} .$$

Grafique la curva \mathcal{C} y determine una parametrización que proporcione una orientación horaria vista desde el eje Z positivo.

3.51 Considere la curva definida por

$$\mathcal{C} : \begin{cases} 3y + 3 = x \\ 2z - 8 = -x^2 \end{cases} .$$

Grafique la curva \mathcal{C} y determine las ecuaciones paramétricas que proporcione una orientación horaria, desde el punto $(0, -1, 4)$ hasta $(2, -\frac{1}{3}, 2)$, vista desde el eje Y negativo.

3.52 Determine la parametrización de cada uno de las siguientes curvas.

a) $\mathcal{C} : \begin{cases} x = z^2 \\ y = z \end{cases}$, desde el punto $(1, -1, -1)$ hasta el punto $(4, 2, 2)$.

b) $\mathcal{C} : \begin{cases} x + y = 2 \\ z^2 + x^2 = 1 \end{cases}$, desde el punto $(1, 1, 0)$ hasta el punto $(0, 2, -1)$ y en sentido antihorario visto desde del eje Y .

c) $\mathcal{C} : \begin{cases} x + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$, desde el punto $(1, 0, 0)$ hasta el punto $(0, 0, 1)$ y en sentido horario visto desde del eje Z .

d) $\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$, para $z \geq 0$ y en sentido antihorario visto desde del eje Z .

4

Integral de línea

En los cursos de cálculo integral se estudia cómo evaluar integrales definidas simples

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (4.1)$$

Una integral de línea es solo una integral de una función que se evalúa a lo largo de una trayectoria o curva, más específicamente un arco. También se utilizan los términos integral de trayectoria, integral de curva e integral curvilínea o integral de contorno.

La integral de una sola variable dada en (4.1) es el ejemplo más simple de una “integral de línea” en donde la curva es una línea recta, concretamente un segmento del eje X que comienza en $x = a$ y termina en $x = b$.

La función a integrar puede ser un campo escalar y el valor de la integral de línea es la suma de los valores del campo en todos los puntos del arco, ponderados por la longitud del arco. En efecto, supongamos que se tiene una trayectoria \mathcal{C} a través del espacio que comienza en (x_1, y_1, z_1) y serpentea hasta terminar en (x_2, y_2, z_2) .

Se puede integrar una función $f(x, y, z)$ a lo largo del camino \mathcal{C} , tal como hizo con $f(x)$ con respecto a x , y esta integral se escribe como

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds. \quad (4.2)$$

Si la función a integrar es un campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$, el valor de la integral de línea es también la suma de valores del campo en todos los puntos del arco \mathcal{C} , ponderados por el producto escalar del campo vectorial con un vector diferencial en la curva y se escribe

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\alpha. \quad (4.3)$$

Esta ponderación distingue la integral de línea de las integrales simples definidas en intervalos.

4.1 Integrales de líneas de campos escalares

Considere la función real $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y un arco \mathcal{C} en \mathbb{R}^3 definido por la función

$$\begin{aligned} \alpha : I = [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)). \end{aligned}$$

Con el fin de definir con exactitud la integral de línea de f a lo largo de \mathcal{C} , dividimos el intervalo $I = [a, b]$ por medio de una partición regular de orden n , es decir,

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = b,$$

lo cual genera a su vez una fragmentación del arco \mathcal{C} en segmentos de \mathcal{C}_i curva definidos en $[t_i, t_{i+1}]$, donde $i = 0, 1, \dots, n-1$, tal como se aprecia en la figura 4.1.

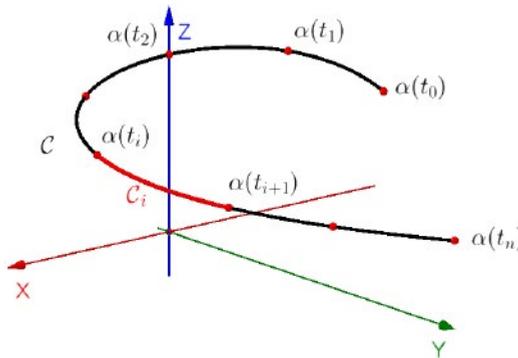


Figura 4.1: Partición de un arco

Suponga que $\alpha(t)$ es de clase C^1 , y si denotamos por Δs_i la longitud de la curva \mathcal{C}_i , se tiene

$$\Delta s_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\alpha'(t)\| dt.$$

Por el teorema de valor medio para las integrales, existe $u_i \in [t_i, t_{i+1}]$ tal que

$$\Delta s_i = \|\alpha'(u_i)\| (t_{i+1} - t_i) = \|\alpha'(u_i)\| \Delta t_i,$$

donde $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Para el caso de que n asuma valores grandes, el valor de Δs_i se hará muy pequeño y $f(x, y, z)$ puede ser considerada constante en \mathcal{C}_i y numéricamente igual a $f(\alpha(u_i))$. Por consiguiente, la integral de línea se aproxima mediante la

suma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha(u_i)) \|\alpha'(u_i)\| \Delta t_i. \quad (4.4)$$

La suma definida en (4.4) es, en rigor, una suma de Riemann en el intervalo $I = [a, b]$ de la función $f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\|$. Por tanto, si consideramos que $f(x, y, z)$ es continua a lo largo de \mathcal{C} , se obtiene

$$\int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt$$

lo que nos lleva a la siguiente definición.

Definición 4.1 [Integral de línea de un campo escalar]

Si \mathcal{C} esta descrita mediante una función que depende del parámetro longitud de arco s y $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar, donde $\mathcal{C} \subset D$, entonces la integral de línea de f respecto al parámetro longitud de arco es

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_a^b (f \circ \alpha)(t) \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt, \quad (4.5)$$

donde $ds = \|\alpha'(t)\| dt$ es el diferencial de longitud de arco.

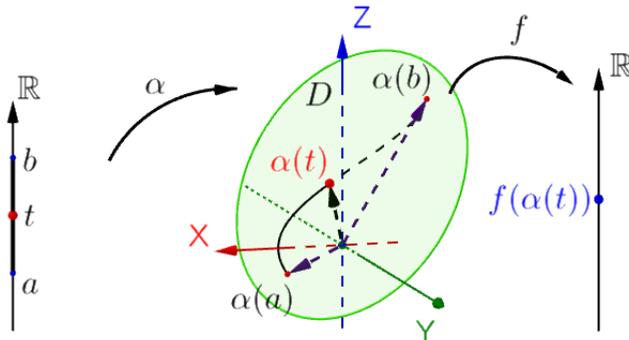


Figura 4.2: Integral de línea de un campo escalar

La fórmula dada en (4.6) también es válida si α es de clase C^1 por partes o $f \circ \alpha$ es continua por partes. En este caso, la integral $\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds$ se calcula dividiendo el intervalo $[a, b]$ en un número finito de intervalos cerrados en los que $f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\|$ es continua.

Cuando ocurre que \mathcal{C} es una curva en el plano XY definida por una función clase C^1 , $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ con $a \leq t \leq b$, y $f(x, y)$ es una función real continua definida en todo punto de \mathcal{C} , la integral de línea de f a lo largo de \mathcal{C} es

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_{\mathcal{C}} f(x, y) ds = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt. \quad (4.6)$$

Proposición 4.1

Sean $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada por $\alpha(t)$, $t \in [a, b]$, los campos escalares $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, donde $\mathcal{C} \subset D$, y las constantes reales k_1 y k_2 , entonces

[ILCE1] Linealidad respecto del integrando

$$\int_{\mathcal{C}} (k_1 f + k_2 g) ds = k_1 \int_{\mathcal{C}} f ds + k_2 \int_{\mathcal{C}} g ds.$$

[ILCE2] Aditividad respecto de la curva

Si \mathcal{C} admite una descomposición en un número finito de curvas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ tales que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \dots \cup \mathcal{C}_n$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f ds &= \int_{\mathcal{C}_1} f ds + \int_{\mathcal{C}_2} f ds + \dots + \int_{\mathcal{C}_n} f ds \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{C}_i} f ds. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.1

Calcule $\int_{\mathcal{C}} (x^2 + 3xy) ds$, donde \mathcal{C} es el segmento de recta de $A(-1, 2)$ hasta $B(3, 5)$.

Solución.

Tenemos que $f(x, y) = x^2 + 3xy$, y parametrizamos el segmento de recta:

$$\mathcal{C} : \alpha(t) = (x, y) = A + t(\overrightarrow{AB}), t \in [0, 1]$$

$$\mathcal{C} : \alpha(t) = (x, y) = A + t(B - A), t \in [0, 1]$$

$$\mathcal{C} : \alpha(t) = (x(t), y(t)) = (-1, 2) + t(4, 3), t \in [0, 1]$$

es decir

$$C : \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 2 + 3t \end{cases}, t \in [0, 1]$$

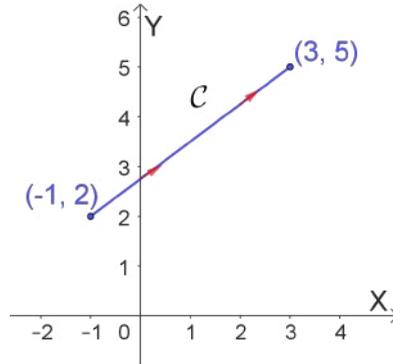


Figura 4.3: Segmento de recta del ejemplo 4.1

Entonces $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) = (4, 3)$ y $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{16 + 9} = 5$.

Luego

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 + 3xy) ds &= \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^1 f(-1 + 4t, 2 + 3t) (5) dt \\ &= 5 \int_0^1 [(-1 + 4t)^2 + 3(-1 + 4t)(2 + 3t)] dt \\ &= 5 \int_0^1 (52t^2 + 7t - 5) dt = \frac{475}{6}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.2

Evalúe la integral de línea $\int_C (x^{4/3} + y^{4/3}) ds$, donde C es el arco del astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Solución.

Sea $x = a \cos^3 t$ e $y = a \sin^3 t$, para $t \in [0, 2\pi]$ las ecuaciones paramétricas de la astroide

Con ello se tiene

$$C : \alpha(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t), t \in [0, 2\pi].$$

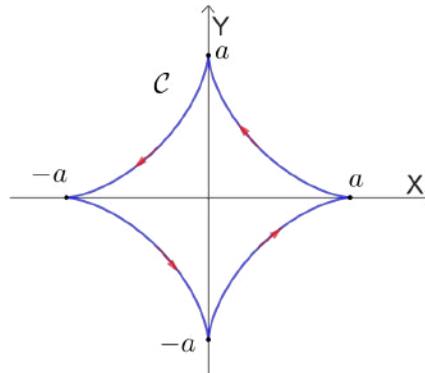


Figura 4.4: Astroide

Luego

$$\alpha'(t) = (3a \cos^2 t \operatorname{sen} t, 3a \operatorname{sen}^2 t \cos t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

y

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{9a^2 \cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + 9a^2 \operatorname{sen}^4 t \cos^2 t} \\ &= 3a \sqrt{\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)} = 3a |\cos t| |\operatorname{sen} t|. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \int_C (x^{4/3} + y^{4/3}) ds &= \int_0^{2\pi} f(a \cos^3 t, a \operatorname{sen}^3 t) \|\alpha'(t)\| dt \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} (a^{4/3} \cos^4 t + a^{4/3} \operatorname{sen}^4 t) (3a \cos t \operatorname{sen} t) dt \\ &= 12a^{7/3} \int_0^{\pi/2} (\cos^4 t + \operatorname{sen}^4 t) \cos t \operatorname{sen} t dt \\ &= 12a^{7/3} \left(\int_0^{\pi/2} \cos^5 t \operatorname{sen} t dt + \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 t \cos t dt \right) \\ &= 12a^{7/3} \left(-\frac{\cos^6 t}{6} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\operatorname{sen}^6 t}{6} \Big|_0^{\pi/2} \right) \\ &= 12a^{7/3} \left(0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - 0 \right) = 4a^{7/3} \end{aligned}$$

□

Recordemos que si $\alpha(t)$, con $a \leq t \leq b$, y $\beta(t)$, con $t \in [c, d]$ son dos parametrizaciones equivalentes de un arco C , entonces existe una función $\psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ biyectiva de clase C^1 tal que $\beta(t) = \alpha(\psi(t))$. Además, si ψ es creciente ella preserva la orientación; en cambio, si ψ es decreciente, afirmamos que invierte la orientación.

El teorema que enunciaremos y demostraremos a continuación estipula que las integrales de línea de campos escalares no cambian de signo al cambiar la orientación del arco o curva sobre el que se está integrando, como lo hacen las integrales de línea de campos vectoriales que veremos más adelante.

En otras palabras el teorema siguiente establece que la integral de línea respecto de la longitud de arco de la función escalar f es invariante por reparametrización del arco \mathcal{C} . Esto significa que, por ejemplo, la masa total de un alambre será la misma si la calculamos del punto A hasta el B o viceversa.

Teorema 4.1

Sean $\alpha(t)$, con $a \leq t \leq b$, y $\beta(t)$, con $t \in [c, d]$ dos parametrizaciones de clase C^1 por partes y equivalentes, y $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en el abierto D de \mathbb{R}^n . Si $\psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ es el cambio de parámetro tal que $\beta = \alpha \circ \psi$ y $\psi'(t) \neq 0$, entonces

$$\int_{\mathcal{C}_\beta} f ds = \int_{\mathcal{C}_\alpha} f ds,$$

donde \mathcal{C}_α y \mathcal{C}_β denotan al arco \mathcal{C} parametrizado por $\alpha(t)$ y $\beta(t)$, respectivamente.

Prueba 4.1 En razón del Teorema 3.12 y de la equivalencia de las parametrizaciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ se garantiza la existencia de una función $\psi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ biyectiva de clase C^1 tal que $\beta(t) = \alpha(\psi(t))$, para todo $t \in [c, d]$. Entonces

$$\int_{\mathcal{C}_\beta} f ds = \int_c^d f(\beta(t)) \|\beta'(t)\| dt = \int_c^d f(\alpha(\psi(t))) \|\alpha'(\psi(t))\psi'(t)\| dt,$$

es decir,

$$\int_{\mathcal{C}_\beta} f ds = \int_c^d f(\alpha(\psi(t))) \|\alpha'(\psi(t))\| |\psi'(t)| dt. \quad (4.7)$$

Bajo la perspectiva de la condición $\psi'(t) \neq 0$, analizamos la integral anterior. En primer lugar, si $\psi'(t) > 0$ para todo $t \in [c, d]$, se tiene que $\psi(c) = a$ y $\psi(d) = b$. Por otro lado, el cambio de variable $u = \psi(t)$ para el cual $du = \psi'(t) dt = |\psi'(t)| dt$, conlleva a que (4.7) se vea como

$$\int_{\mathcal{C}_\beta} f ds = \int_a^b f(\alpha(u)) \|\alpha'(u)\| du = \int_{\mathcal{C}_\alpha} f ds.$$

En segundo lugar, si $\psi'(t) < 0$ para todo $t \in [a, b]$, se tiene que $\psi(c) = b$ y $\psi(d) = a$. En este caso, el cambio de variable $u = \psi(t)$ proporciona $du = \psi'(t) dt = -|\psi'(t)| dt$,

y hace que la relación (4.7) se reduzca a

$$\int_{C_\beta} f ds = \int_b^a f(\alpha(u)) \|\alpha'(u)\| (-du) = \int_a^b f(\alpha(u)) \|\alpha'(u)\| du = \int_{C_\alpha} f ds.$$

■

Ejemplo 4.3

Calcule

$$\int_C x e^{yz} ds,$$

donde C es el segmento de recta definido del punto $A(0, 4, 1)$ hasta $B(1, 2, 3)$.

Solución.

Tenemos que $f(x, y, z) = x e^{yz}$ y sea β la parametrización del segmento

$$C : \beta(t) = (1-t)A + tB, \quad t \in [0, 1]$$

$$C : \beta(t) = (1-t)(0, 4, 1) + t(1, 2, 3), \quad t \in [0, 1]$$

$$C : \beta(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, 4-2t, 1+2t), \quad t \in [0, 1].$$

De lo anterior sigue que

$$\beta'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (1, -2, 2) \text{ y } \|\beta'(t)\| = 3.$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_C x e^{yz} ds &= \int_a^b f(\beta(t)) \|\beta'(t)\| dt = \int_0^1 f(t, 4-2t, 1+2t) (3) dt \\ &= 3 \int_0^1 t e^{(4-2t)(1+2t)} dt = 3 \left(\int_0^1 t e^{-4t^2} dt + \int_0^1 t e^{6t} dt + e^4 \int_0^1 t dt \right) \\ &= 3 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-4} + \frac{5}{36} e^6 + \frac{1}{36} + \frac{e^4}{2} \right). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.4

Calcule

$$\int_C (x + y + z) ds,$$

donde C es la curva $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, definida para $t \in [0, \pi/2]$.

Solución.

De la parametrización dada en el enunciado, el vector tangente y su módulo se determinan como sigue $\alpha'(t) = (-\operatorname{sen} t, \operatorname{cos} t, 1)$ y $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$.

La grafica de la curva denominada una hélice se ve en la figura 4.5

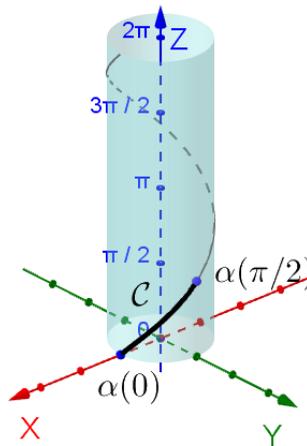


Figura 4.5: La hélice del ejemplo 4.4

Luego

$$\begin{aligned} \int_C (x + y + z) ds &= \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{cos} t, \operatorname{sen} t, t) \sqrt{2} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{cos} t + \operatorname{sen} t + t) dt = \sqrt{2} \left(\operatorname{sen} t - \operatorname{cos} t + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \sqrt{2} \left[\left(1 - 0 + \frac{1}{8} \pi^2 \right) - (0 - 1) \right] = \sqrt{2} \left(2 + \frac{1}{8} \pi^2 \right). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.5

Calcule

$$\int_C \frac{x^2 + xy + y^2}{z^2} ds,$$

donde C es la hélice $\alpha(t) = (\operatorname{cos} t, \operatorname{sen} t, -1)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solución.

Del enunciado se desprende que $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$, mientras que su módulo es $\|\alpha'(t)\| = 1$. Luego

$$\begin{aligned} \int_C \frac{x^2 + xy + y^2}{z^2} ds &= \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t, -1) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t + \sin t \cos t + \sin^2 t}{(-1)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \sin t \cos t) dt \\ &= \left[t + \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

□

4.1.1. Aplicaciones de la integral de línea de un campo escalar

En este apartado nos centraremos en las aplicaciones de integral de línea de campos escalares en el que mostraremos el papel de la integral de línea en la resolución de problemas prácticos relacionados con la masa de un alambre, la longitud de un arco y el área de una porción de superficie bajo ciertas condiciones.

4.1.1.1. Longitud de arco

En el caso particular en el que $f(x, y, z) = 1$ o $f(x, y) = 1$, para todo punto de la curva C , (4.5) y (4.6) se reducen a

$$L = \int_C ds = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \quad (4.8)$$

relación que permite calcular la longitud del arco C .

Ejemplo 4.6

Determinar la longitud de arco de la siguiente curva

$$\alpha(t) = (t^2 \sin t, t^2 \cos t, 2t^3) \quad ; \quad t \in [0, 1].$$

Solución.

Al determinar el vector velocidad se obtiene

$$\alpha'(t) = (t^2 \cos t + 2t \operatorname{sen} t, 2t \cos t - t^2 \operatorname{sen} t, 6t^2),$$

en seguida, determinamos el módulo de dicho vector, es decir

$$(x'(t))^2 = (t^2 \cos t + 2t \operatorname{sen} t)^2 = t^4 \cos^2 t + 4t^3 \cos t \operatorname{sen} t + 4t^2 \operatorname{sen}^2 t$$

$$(y'(t))^2 = (2t \cos t - t^2 \operatorname{sen} t)^2 = t^4 \operatorname{sen}^2 t - 4t^3 \cos t \operatorname{sen} t + 4t^2 \cos^2 t$$

$$(z'(t))^2 = (6t^2)^2 = 36t^4$$

Al efectuar la suma y simplificar se llega a

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = t^4 \cos^2 t + 4t^3 \cos t \operatorname{sen} t + 4t^2 \operatorname{sen}^2 t + t^4 \operatorname{sen}^2 t - 4t^3 \cos t \operatorname{sen} t + 4t^2 \cos^2 t + 36t^4$$

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 37t^4 + 4t^2 = t^2 (37t^2 + 4).$$

Finalmente, se procede de acuerdo con (4.8)

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{t^2 (37t^2 + 4)} dt = \int_0^1 \sqrt{37t^2 + 4} t dt = \frac{1}{111} (37t^2 + 4)^{3/2} \\ &= \frac{41}{111} \sqrt{41} - \frac{8}{111} \approx 2.293. \end{aligned}$$

Esto significa que la longitud del arco es 2.293 unidades.

□

Ejemplo 4.7

Determine la longitud de arco del arco

$$\alpha(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t}), \quad t \in [1, 3].$$

Solución.

Determinamos el vector tangente de α y su respectivo módulo, es decir

$$\alpha'(t) = (\sqrt{2}, e^t, -e^{-t}) \quad \text{y} \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (e^t)^2 + (-e^{-t})^2}.$$

Al simplificar la expresión subradical se obtiene

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{e^{2t}} + e^{2t} + 2} = \sqrt{\frac{(e^{2t} + 1)^2}{e^{2t}}} = \frac{e^{2t} + 1}{e^t}.$$

De esta forma y usando (), se consigue lo deseado

$$L = \int_1^3 \left(\frac{e^{2t} + 1}{e^t} \right) dt = \int_1^3 (e^t + e^{-t}) dt = \left[e^t - \frac{1}{e^t} \right]_1^3 \approx 7.667,$$

o sea, que la longitud del arco es de 7.67 unidades. □

Ejemplo 4.8

Sea \mathcal{C} la curva dada por

$$\alpha(t) = (\sqrt{t} \cos t, \sqrt{t} \sin t, t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Determinar la longitud del arco de \mathcal{C} definido desde el punto $(\frac{\sqrt{2\pi}}{4}, \frac{\sqrt{2\pi}}{4}, \frac{\pi}{4})$ hasta el punto $(-\sqrt{\pi}, 0, \pi)$.

Solución.

El vector tangente de α es

$$\alpha'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} \cos t - \sqrt{t} \sin t, \sqrt{t} \cos t + \frac{1}{2\sqrt{t}} \sin t, 1 \right)$$

y su módulo se obtiene siguiendo las operaciones que van a continuación

$$\begin{aligned} (x'(t))^2 &= \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} \cos t - \sqrt{t} \sin t \right)^2 \\ (y'(t))^2 &= \left(\sqrt{t} \cos t + \frac{1}{2\sqrt{t}} \sin t \right)^2 \\ (z'(t))^2 &= 1 \end{aligned}$$

De donde

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{t \sin^2 t + \frac{1}{4t} \cos^2 t - \cos t \sin t + t \cos^2 t + \frac{1}{4t} \sin^2 t + \cos t \sin t + 1}.$$

Implementando las debidas simplificaciones, se llega a

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{4t} (2t + 1)^2} = \frac{2t + 1}{2\sqrt{t}}.$$

Finalmente y en virtud de (4.8) se obtiene

$$\begin{aligned} L &= \int_{\pi/4}^{\pi} \frac{2t + 1}{2\sqrt{t}} dt = \int_{\pi/4}^{\pi} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{2\sqrt{t}} \right) dt = \left[\frac{2}{3} t^{3/2} + \sqrt{t} \right]_{\pi/4}^{\pi} \\ &= \frac{1}{12} \sqrt{\pi} (7\pi + 6) \approx 4.1344. \end{aligned}$$

Así la longitud del arco descrito es igual a 4.13 unidades. □

4.1.1.2. Masa de un alambre

Supongamos que se tiene un alambre delgado que tiene la forma de una curva \mathcal{C} cuya densidad lineal en cada punto $P(x, y, z)$ está modelada por la función $\delta(x, y, z)$ cuyas unidades son masa por unidad de longitud.

La masa total del alambre, denotada por m está dada por

$$m = \int_{\mathcal{C}} \delta(x, y, z) ds = \int_a^b \delta(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt, \quad (4.9)$$

donde s es el parámetro longitud de arco de \mathcal{C} .

Ejemplo 4.9

Calcule la masa de un alambre que tiene la forma de la curva $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = r^2$, con $x, y \geq 0$ sabiendo que su densidad en cada punto es $\delta(x, y) = x + y$.

Solución.

Una parametrización del arco \mathcal{C} es $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, con lo cual se tiene $\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$ y $\|\alpha'(t)\| = r$

$$\begin{aligned} m &= \int_{\mathcal{C}} \delta(x, y, z) ds = \int_0^{\pi/2} \delta(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{\pi/2} \delta(r \cos t, r \sin t) r dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (r \cos t + r \sin t) r dt = r^2 \int_0^{\pi/2} (\cos t + \sin t) dt \\ &= r^2 (\sin t - \cos t) \Big|_0^{\pi/2} = r^2 [(1 - 0) - (0 - 1)] = 2r^2. \end{aligned}$$

En conclusión, la masa del alambre es numéricamente igual a $2r^2$ unidades de masa. □

Ejemplo 4.10

Un alambre tiene la forma de la intersección del cilindro $z = 4 - y^2$, $z \geq 0$ con el plano $x = 2 - y$. Calcule la masa del alambre si su densidad en cada punto es $\delta(x, y, z) = |y|$.

Solución.

Sea C el arco que resulta de la intersección de las superficies, para la cual, una parametrización se consigue mediante $y = t$ que, a su vez, nos lleva a $x = 2 - t$ y $z = 4 - t^2$. La condición $z \geq 0$ nos permite afirmar que

$$4 - t^2 \geq 0 \Leftrightarrow (t + 2)(t - 2) \leq 0 \Leftrightarrow t \in [-2, 2].$$

Luego $C : \alpha(t) = (2 - t, t, 4 - t^2), t \in [-2, 2]$.

Es sencillo obtener

$$\alpha'(t) = (-1, 1, -2t), t \in [-2, 2] \quad \text{y} \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + 1 + 4t^2} = \sqrt{2 + 4t^2}.$$

Por lo tanto, la masa es

$$\begin{aligned} m &= \int_C \delta(x, y, z) ds = \int_{-2}^2 \delta(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \int_{-2}^2 |t| \sqrt{2 + 4t^2} dt = 2 \int_0^2 t \sqrt{2 + 4t^2} dt = \frac{1}{4} \int_0^2 \sqrt{2 + 4t^2} (8t) dt \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} \right) (2 + 4t^2)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{25}{3} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

En suma, la masa del alambre es igual a $\frac{25}{3} \sqrt{2} \approx 11.79$ unidades de masa. □

Ejemplo 4.11

Determine la masa de un alambre que tiene la forma de la curva $C : x^2 + y^2 = 2x$, si su densidad en cada punto (x, y, z) del alambre es $\delta(x, y) = x - y$.

Solución.

Para conseguir una parametrización de C , que se muestra en la figura 4.6, la expresamos como $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Una vez hecho esto, decimos sea $x - 1 = \cos t$ y $y = \sin t$ para $t \in [0, 2\pi]$. Entonces se obtiene

$$C : \alpha(t) = (1 + \cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi].$$

Luego, la masa total del alambre es

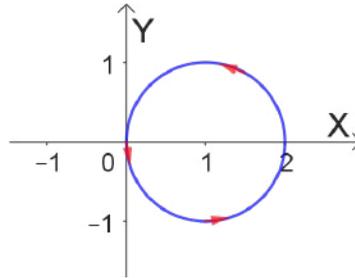


Figura 4.6: Circunferencia del ejemplo 4.11

$$\begin{aligned}
 m &= \int_C \delta(x, y, z) ds = \int_0^{2\pi} \delta(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \delta(1 + \cos t, \sin t) dt = \int_0^{2\pi} (1 + \cos t - \sin t) dt \\
 &= t + \sin t + \cos t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi + 1 - 1 = 2\pi.
 \end{aligned}$$

En resumidas cuentas, la masa del alambre es numéricamente igual a $2\pi \approx 3.14$ unidades de masa.

□

Ejemplo 4.12

Dada la curva $C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ y - z = 0 \end{cases}$.

- Calcule la longitud total de la curva C .
- Si C es un alambre delgado y flexible, calcule su masa, si su densidad en cada punto (x, y, z) es $\delta(x, y, z) = x^2 + y - z$ gramos por unidad de longitud.

Solución.

- a fin de conseguir una parametrización del arco C empezamos sustituyendo $z = y$ en la ecuación de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con lo que se obtiene

$$x^2 + 2y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Con lo anterior, las ecuaciones paramétricas de la curva son

$$\mathcal{C} : x = x(t) = 2 \cos t, y = y(t) = \sqrt{2} \sin t, z = \sqrt{2} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Así, para $t \in [0, 2\pi]$

$$\alpha(t) = (2 \cos t, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin t), \quad \alpha'(t) = (-2 \sin t, \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \cos t)$$

$$y \|\alpha'(t)\| = \sqrt{4 \sin^2 t + 2 \cos^2 t + 2 \cos^2 t} = 2.$$

Luego longitud del arco es

$$L = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 2 dt = 4\pi.$$

b)

$$m = \int_0^{2\pi} \delta(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \delta(2 \cos t, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin t) 2 dt$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 t + \sqrt{2} \sin t - \sqrt{2} \sin t) dt = 8 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt$$

$$= 8 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 4 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = 4(2\pi) = 8\pi.$$

En resumen, la masa del alambre es numéricamente igual a $8\pi \approx 25.13$ unidades de masa.

□

Ejemplo 4.13

Calcule la masa de un alambre que tiene la forma del arco $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = a^2$ con $a > 0$, si su densidad en cada punto (x, y) es $\rho(x, y) = |x| + |y|$ gramos por unidad de longitud.

Solución.

Se sabe que la parametrización de una circunferencia con centro en el origen de coordenadas está dada por $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ cuyo vector velocidad es $\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t)$.

Por consiguiente, la masa del alambre es

$$\begin{aligned}
 m &= \int_C \rho(x, y) ds = \int_0^{2\pi} \rho(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (|a \cos t| + |a \sin t|) a dt = a^2 \int_0^{2\pi} (|\cos t| + |\sin t|) dt \\
 &= 4a^2 \int_0^{\pi/2} (\cos t + \sin t) dt = 4a^2 \left[\sin t - \cos t \right]_0^{\pi/2} = 4a^2 (1 + 1) \\
 &= 8a^2.
 \end{aligned}$$

En consecuencia, la masa del alambre es numéricamente igual a $8a^2$ gramos. □

4.1.1.3. Área de una porción de superficie

Imagine que definimos una función $z = h(x, y)$ a lo largo de un arco \mathcal{C} que nos interesa, es decir, para todo $(x, y) \in \mathcal{C}$. A continuación si rellenamos la región que queda entre nuestro camino, en la parte inferior, y los valores de la función a lo largo del camino \mathcal{C} , se hace tangible el significado de una integral de línea de un campo escalar, es decir, dicha integral proporciona el área de la región sombreada como la que se ve en la Figura 4.7.

Como es evidente, no hay mucha diferencia entre la integral simple (4.1) y la integral de un campo escalar $h(x, y)$ a lo largo de una curva o arco. La integral de línea de un campo escalar puede ser un poco más difícil de visualizar, especialmente si el arco tiene tres dimensiones, de modo que no podemos hacer un dibujo como el de la Figura 4.7, pero sigue significando básicamente lo mismo.

Una interpretación geométrica interesante surge cuando $f(x, y) \geq 0$. En este caso, la fórmula dada en (4.6) se interpreta como el área de una cerca que tiene como base al arco \mathcal{C} , ubicado en el plano XY , y altura $h(x, y)$ en cada punto de \mathcal{C} tal como se puede apreciar en la figura adjunta.

Definición 4.2 [Área de una porción de superficie]

Si \mathcal{C} es el arco en \mathbb{R}^2 parametrizado mediante una función que depende del parámetro longitud de arco s , $h : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar mayor o igual a cero y $\mathcal{C} \subset D$, entonces el área de la porción de superficie que tiene como base al arco \mathcal{C} y altura h en cada punto de \mathcal{C} es la integral de línea de h respecto al parámetro longitud de arco, es decir

$$A(S) = \int_{\mathcal{C}} h ds = \int_a^b h(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt. \quad (4.10)$$

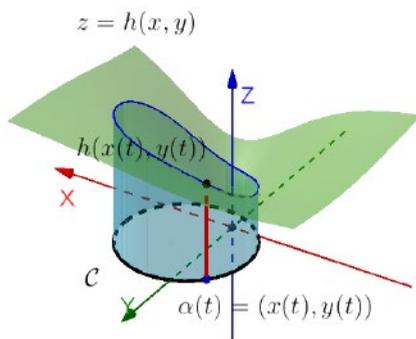


Figura 4.7: Área de una porción de superficie

- (N)** En general, el arco C está ubicado en alguno de los planos coordenados y la función h representará la altura que se mide paralelamente al eje que es ortogonal al plano coordenado que contiene a C .

Ejemplo 4.14

En el primer octante del espacio cartesiano XYZ , donde las unidades en los ejes se miden en pulgadas, se ubica la porción del cilindro $y = 2 + (x - 1)^2$ que ha sido recortado por los planos $x = 3$, $z = 0$, $y = 0$ y $x = 0$, y superiormente por la hoja de cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, tal como se muestra en la figura 4.8. Use una integral de línea de un campo escalar para calcular el área de la porción del cilindro.

Solución.

Para calcular el área correspondiente a la porción del cilindro $y = 2 + (x - 1)^2$, se proyecta dicha superficie sobre el plano XY y se obtiene el arco C cuya parametrización es $\alpha(t) = (t, 2 + (t - 1)^2)$; $t \in [0, 3]$.

Para este caso, el campo escalar está dado por la función $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ cuya composición con $\alpha(t)$ genera $h(\alpha(t)) = \sqrt{t^2 + (2 + (t - 1)^2)^2}$.

Por otro lado, el vector tangente es $\alpha'(t) = (1, 2(t - 1))$ y su módulo está dado por

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + 4(t - 1)^2} = \sqrt{5 + 4t^2 - 8t}.$$

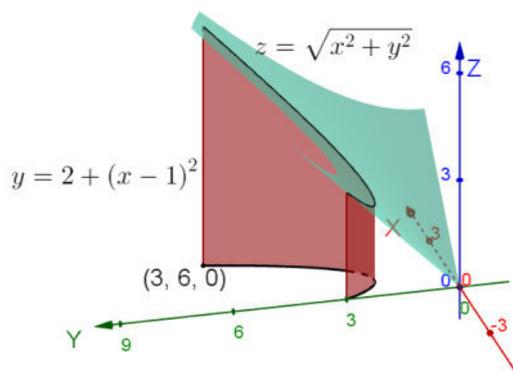


Figura 4.8: Porción del cilindro $y = 2 + (x - 1)^2$

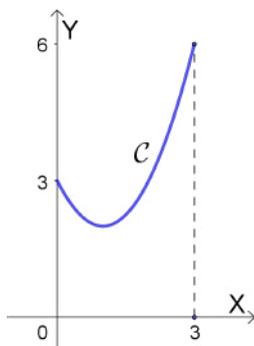


Figura 4.9: Curva base del cilindro $y = 2 + (x - 1)^2$

Con los cálculos previos, formulamos y calculamos el área de la porción del cilindro usando la integral de línea del campo escalar $h(x, y)$ definida en (4.10).

$$A(S) = \int_C h(x, y) = \int_0^3 \sqrt{5 + 4t^2 - 8t} \sqrt{t^2 + (2 + (t - 1)^2)^2} dt \approx 24,260.$$

En suma, el área correspondiente a la porción del cilindro parabólico es de 24,26 pulgadas cuadradas.

□

Ejemplo 4.15

En el primer octante del espacio euclidiano \mathbb{R}^3 , donde las unidades en los ejes se miden en metros, se dibuja la porción del cilindro $x^2 + z^2 = 2z$, limitado por las superficies de ecuaciones $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 4$. Calcule, usando la integral de línea de un campo escalar, el área de dicha superficie.

Solución.

La gráfica de la superficie descrita en el enunciado se muestra en la figura 4.10

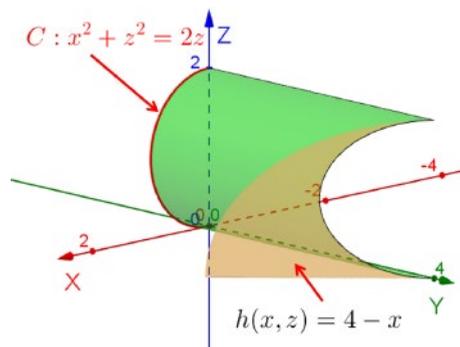


Figura 4.10: Porción del cilindro $x^2 + z^2 = 2z$,

Considerando la proyección de la porción del cilindro sobre el plano XZ , se tiene la curva base

$$C : x^2 + z^2 = 2z \leftrightarrow x^2 + (z - 1)^2 = 1.$$

Además el campo escalar altura está dado por $h(x, z) = 4 - x$.

Una parametrización de C es

$$\alpha(t) = (\cos t, 1 + \sin t), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

y sus correspondientes vector tangente y rapidez son

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t) \quad \text{y} \quad \|\alpha'(t)\| = 1.$$

Por otro lado, $h(\alpha(t)) = 4 - \cos t$.

Finalmente, el área de la cara del sólido determinada por el cilindro es

$$A(S) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4 - \cos t) dt = 4\pi - 2 \approx 10.566.$$

En conclusión, el área correspondiente a la porción del cilindro circular es de, aproximadamente, 10.57 metros cuadrado.

□

4.1.2. Problemas propuestos

4.1 Calcule la integral de línea $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, donde C es la curva cuya parametrización es $\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, t^2)$, $0 \leq t \leq \pi$.

4.2 Evalúe la integral de línea $\int_C (2 + xy^2) ds$, donde a curva C es una curva que da una vuelta completa alrededor de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en sentido contrario antihorario.

4.3 Evalúe la integral de línea $\int_C x^2 y^3 ds$, donde a curva C es una curva está parametrizada por $\beta(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$, $t \in [0, 2]$.

4.4 Evalúe la integral de línea $\int_C (x^2 + 2yz) dS$, donde $C : \begin{cases} 2z = 2 + 3x \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$ desde el punto $(2, 0, 4)$ hasta $(0, 1, 1)$.

4.5 Calcule $\int_C (x + y + z) ds$ si $C : \alpha(t) = \left(3t, \frac{3\sqrt{2}}{2}t^2, t^3 \right)$, $t \in [0, 1]$

4.6 Sea el campo escalar $f(x, y) = x^2 + (2 - 1, 5y)^3$, calcule la integral de línea

$$\int_C f(x, y) dS,$$

donde C es el arco de la parábola $x - y^2 = -4$ para $y \in [1, 2]$.

4.7 Determine $\oint_C xyz ds$ donde

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

4.8 Sea el campo escalar $f(x, y, z) = xy^2 - \frac{1}{4}$. Calcule la integral de línea

$$\int_C f(x, y, z) dS$$

donde C es el arco de curva que resulta de intersectar las superficies de ecuaciones $x = z$ y $y^2 + x = 4$ desde el punto $(0; -2; 0)$ hasta el punto $(0; 2; 0)$.

4.9 Calcule la masa de un alambre que tiene la forma de la curva $C : x^2 + y^2 = 2x$, si su densidad en cada punto (x, y) del alambre es $\delta(x, y) = x - y$

4.10 Calcule la masa de un alambre que tiene la forma de la curva

$$C : \begin{cases} x + z = 6 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

si su densidad en cada punto (x, y) del alambre es $\rho(x, y) = x^2 + y^2$.

4.11 Con relación a un sistema de coordenadas con unidades medidos en metros, se ubica un alambre que adopta la forma del arco C parametrizado por

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t), \quad t \in [0, 2].$$

Calcule la masa de dicho alambre si en cada punto (x, y, z) del alambre la densidad lineal en gr/m es $\rho(x, y, z) = \frac{4}{x^2 + y^2 + z^2}$.

4.12 Un alambre tiene la forma de la curva que resulta de intersectar las superficies $x^2 + y^2 = 1 + z$ y $2x + 2y + z = 1$. Si su densidad, en gramos por centímetro, está dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, determine la masa de dicho alambre.

4.13 Un alambre tiene la forma de la curva C en el primer octante, que resulta de intersectar las superficies $z = x^2$, $x + y = 2$. Si la densidad en cada punto es $\rho(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{1 + 2z}}$, calcule su masa.

4.14 Un pedazo de alambre tiene la forma de la curva que resulta de intersectar las superficies $x^2 + y^2 = 16$ y $2x - z^2 = 0$, y está comprendido entre los puntos $A(2, 0, \sqrt{8})$ y $B(0, 4, 0)$. Si su densidad, en gramos por centímetro, está dada por la función $\rho(x, y, z) = x + y$, determine la masa de dicho alambre.

4.15 Determine la masa de un alambre que tiene la forma de la intersección de las gráficas de las ecuaciones: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y = z$, si su densidad es $\delta(x, y, z) = |x|$

4.16 En un sistema cartesiano de coordenadas con unidades están dadas en metros, la densidad de un alambre en cada punto (x, y, z) de él, es igual a $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$ kg/m. Si este alambre está modelado por la curva $C : \begin{cases} x + z = 6 \\ x - 2 = (y - 2)^2 \end{cases}$, desde el punto $(6, 0, 0)$ hasta $(6, 4, 0)$ calcule su masa total.

4.17 Calcule la masa de un alambre que tiene la forma de la curva C que resulta de interceptar la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ con el plano $x + y = 2$ arriba del plano XY , si su densidad en cada punto (x, y, z) del alambre es $\delta(x, y, z) = |z|$.

4.18 En una maqueta que se elabora en un sistema de coordenadas cuyas unidades se miden en metros, la base de una pared está ubicada en el plano XY y descrita por la parametrización $\delta(t) = \left(t^2 + 2t, t + \frac{8}{t}\right)$, $t \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$. En cada punto (x, y) de esta base, la altura de la pared es $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ calcule el área de la pared descrita.

4.19 Una cerca tiene una altura variable expresada por la función $h(x, y) = xy$, y su base viene dada por la trayectoria descrita por la $4(x - 2) = y^2$ en el primer cuadrante. Calcule el área de la cerca, considerando que en el sistema de coordenadas en la que se ubica, las unidades están dadas en metros.

4.20 A Martín se le proporciona la pintura y un incentivo de S/ 150 por cada $10m^2$ a fin de que pinte uno de los lados de una cerca por ambos lados. La cerca tiene como base la curva descrita por

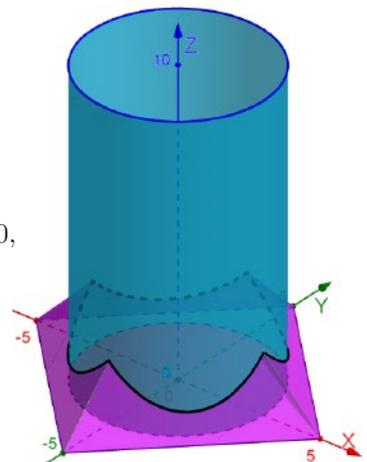
$$\alpha(t) = \left(t^3, (t^2 + t)^{2/3}\right), t \in [1, 3]$$

y la altura para cada punto $(x, y) \in C$ está dada por la función $f(x, y) = 1 + 0,5 \cos x$. Determine la cantidad de dinero que recibirá Martín al terminar el trabajo encargado.

4.21 Un microempresario emprendedor ha diseñado un porta lapiceros cuyas dimensiones y boceto tridimensional se ubican en el espacio cartesiano XYZ , donde las unidades en los ejes se miden en centímetros. Este porta lapiceros queda modelado por las superficies de ecuaciones

$$z = 0; x^2 + y^2 = 9 \text{ y } z = 5 - |x| - |y|; \text{ para } 0 \leq z \leq 10,$$

tal como se muestra en la figura adjunta



- Primero, se pintará el exterior de la parte cilíndrica de cada porta lapiceros con un esmalte de acabado tipo forja. Determine el área total a pintar.
- En segundo lugar, se colocará una cinta decorativa a lo largo de la intersección de la base y la parte cilíndrica de cada porta lapiceros. Determine la mínima longitud de cinta decorativa que se necesitará para decorar 50 porta lapiceros.

4.22 Sobre la pared del frontis de un nuevo teatro, que sigue la trayectoria dada por

$$y = \ln(4 - x^2); \quad -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$$

descansará el techo que tiene la forma de la superficie $z = 3 - x^2y$. Si todas las medidas se dan en metros, calcule el área de la superficie de la pared.

4.23 Calcule la longitud de arco, comprendido entre los puntos $(4, -2, 4)$ y $(4, 2, 4)$, de la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} (x-4)^2 + y^2 = 4 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

4.24 Una partícula se mueve en el espacio, donde sus unidades están en centímetros, siguiendo la trayectoria de la curva de intersección de $2x^2 + y^2 = 4x$ y $x^2 + \frac{y^2}{2} = z$. Calcule la distancia total recorrida por la partícula desde $t = 0$ hasta el instante en el que la partícula interseca al plano $x = 1$.

4.25 En un sistema de coordenadas XYZ en donde las unidades en los tres ejes se miden en centímetros, la superficie S de ecuación $y = \sin(2x)$ es intersectada por la superficie U de ecuación $z = 4 + \sin(0,4xy)$ determinando la curva de intersección \mathcal{C} que va desde el punto $(-\frac{\pi}{2}, 0, 4)$ hasta $(\frac{3\pi}{2}, 0, 4)$. Si Q es un punto de \mathcal{C} cuya proyección sobre el plano XY es $(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$,

- Calcule el área de la porción del cilindro S que está limitada por el plano $z = 0$ y la superficie U .
- Determine la longitud del arco \mathcal{C} .

4.26 Calcule la longitud de arco, en el primer octante, de la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} z^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

4.2 Integral de línea de campos vectoriales

En esta sección se estudiará un procedimiento para evaluar integrales de línea de campos vectoriales, sin embargo, debe tener presente que la integral de línea es una generalización de una integral definida simple de una sola variable. Las integrales de línea de campos vectoriales se utilizan ampliamente en física y una de las más importantes aplicaciones gira en torno a determinar el trabajo realizado por un campo de fuerzas variable. En efecto, si suponemos que un objeto se mueve a lo largo de una curva arbitraria en el espacio bajo la acción de una fuerza, surgen dos interrogantes ¿cómo se calcula el trabajo? y ¿qué hace la fuerza al mover el objeto entre dos puntos cualesquiera en este camino?. Veremos que las respuestas a estas interrogantes se construyen con la integral del producto escalar del campo de fuerza y un desplazamiento infinitesimal a lo largo de la trayectoria del objeto. Este es un ejemplo de un integral de línea de un campo vectorial.

Asimismo se estudiarán integrales de línea sobre campos vectoriales conservativos, un concepto muy importante en física.

Recuerde que un campo vectorial es simplemente un vector con componentes que son funciones. Por ejemplo, si nos atenemos al plano XY , un ejemplo de campo vectorial es

$$\vec{F}(x, y) = (y^2, -xy) = y^2 \vec{i} - xy \vec{j}.$$

La primera componente es la función $f_1(x, y) = y^2$ y la componente en y es la función $f_2(x, y) = -xy$. Este campo vectorial se muestra en la Figura 4.11, con la dirección y el tamaño de cada flecha indicando la dirección y magnitud, respectivamente, del campo vectorial en ese punto.

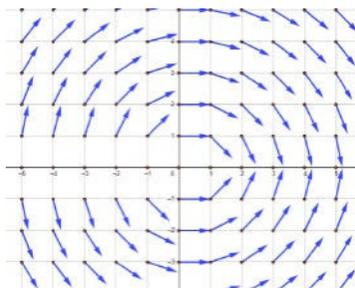


Figura 4.11: Campo vectorial en \mathbb{R}^2

En el espacio tridimensional XYZ , un ejemplo de campo vectorial es

$$\vec{F}(x, y, z) = (y, z, x).$$

La primera componente es la función $f_1(x, y, z) = y$, la componente es la función $f_2(x, y, z) = z$ y la tercera está dada por $f_3(x, y, z) = x$.

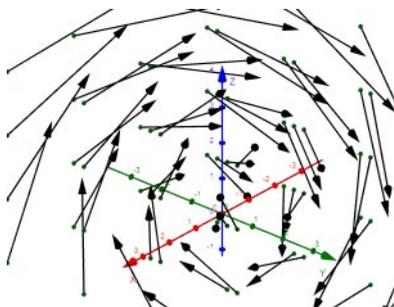


Figura 4.12: Campo vectorial en \mathbb{R}^3

Definición 4.3 [Integral de línea de un campo vectorial]

Sea $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo y sea $\mathcal{C} \subset D$ una curva de clase C^1 cuya parametrización es $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$, $t \in [a, b]$ y contenida en D . La integral de línea del campo \vec{F} a lo largo de la curva \mathcal{C} , denotada por $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\alpha$, es definida por

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\alpha = \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt, \quad (4.11)$$

si la integral del segundo miembro existe.

El punto en la definición (4.11) indica el producto interno o producto escalar de vectores.

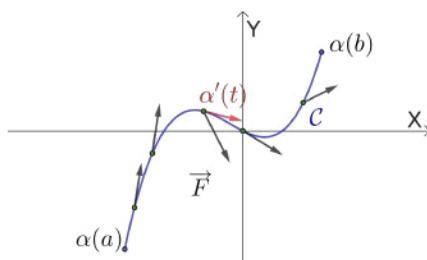


Figura 4.13: Integral de línea sobre un campo vectorial

Ejemplo 4.16

Evalúe la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$, donde $\vec{F}(x, y) = (x - y, x + y)$ y C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$, si $y \geq 0$ y es recorrida en sentido antihorario.

Solución.

Una parametrización de la curva es C , que apreciamos en la figura 4.14, es $\alpha(t) = (3 \cos t, 3 \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, entonces

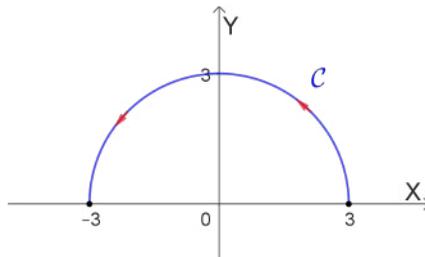


Figura 4.14: La semicircunferencia del ejemplo 4.16

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\alpha &= \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_0^\pi \vec{F}(3 \cos t, 3 \sin t) \cdot (-3 \sin t, 3 \cos t) dt \\ &= \int_0^\pi (3 \cos t - 3 \sin t, 3 \sin t + 3 \cos t) \cdot (-3 \sin t, 3 \cos t) dt \\ &= \int_0^\pi (-9 \cos t \sin t + 9 \sin^2 t + 9 \sin t \cos t + 9 \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^\pi 9 dt = 9(\pi - 0) = 9\pi \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.17

Evalúe $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (\sin x, \cos y, xz)$ y C esta parametrizada por la función vectorial $\alpha(t) = (t^3, -t^2, t)$, $t \in [0, 1]$.

Solución.

Como $\alpha'(t) = (3t^2, -2t, 1)$, $t \in [0, 1]$, entonces

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\alpha &= \int_0^1 \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_0^1 \vec{F}(t^3, -t^2, t) \cdot (3t^2, -2t, 1) dt \\ &= \int_0^1 (\sin(t^3), \cos(-t^2), t^4) \cdot (3t^2, -2t, 1) dt \\ &= \int_0^1 (3t^2 \sin(t^3) - 2t \cos(t^2) + t^4) dt \\ &= -\cos(t^3) - \cos(t^2) + \frac{t^5}{5} \Big|_0^1 = -2\cos(1) - \frac{9}{5}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.18

Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (x^2y, y, xz)$ y C es el arco, producto de la intersección del cilindro $y - 2z^2 = 1$ con el plano $z = x + 1$, desde $(0, 3, 1)$ hasta $(1, 9, 2)$.

Solución.

Parametrizamos la curva $C : \begin{cases} y - 2z^2 = 1 \\ z = x + 1 \end{cases}$.

Sea $z = t$ entonces $y = 2t^2 + 1$ y $x = t - 1$, de esta manera una parametrización de la curva está dada por $\alpha(t) = (t - 1, 2t^2 + 1, t)$.

Notemos que para $t = 1$ obtenemos el punto inicial $A = (0, 3, 1)$ y para $t = 2$, tenemos el punto final $B = (1, 9, 2)$. De esta forma se llega a

$$C : \alpha(t) = (t - 1, 2t^2 + 1, t), \quad t \in [1, 2]$$

y

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\alpha &= \int_1^2 \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_1^2 \vec{F}(t - 1, 2t^2 + 1, t) \cdot (1, 4t, 1) dt \\ &= \int_1^2 \left((t - 1)^2 t, 2t^2 + 1, (t - 1)t \right) \cdot (1, 4t, 1) dt \\ &= \int_1^2 \left[(t - 1)^2 t + (2t^2 + 1) 4t + (t - 1)t \right] dt \\ &= \int_1^2 (9t^3 - t^2 + 4t) dt = \left[\frac{9}{4}t^4 - \frac{t^3}{3} + 2t^2 \right]_1^2 \\ &= \frac{449}{12} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.19

Evalúe $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (9x, y^2z + y^3, 27xz)$ y $C : \begin{cases} y^2 = 3z \\ 2yz = 9x \end{cases}$, recorrida desde el punto $A(0, 0, 0)$ hasta el punto $B(2, 3, 3)$.

Solución.

Siendo C la intersección de las superficies, su parametrización sigue de considerar $y = t$ lo que nos lleva a

$$z = \frac{1}{3}t^2 \text{ y } 2t \left(\frac{t^2}{3} \right) = 9x \rightarrow x = \frac{2}{27}t^3.$$

Así, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \left(\frac{2}{27}t^3, t, \frac{1}{3}t^2 \right)$, $t \in [0, 3]$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\alpha &= \int_0^3 \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_0^3 \vec{F} \left(\frac{2}{27}t^3, t, \frac{1}{3}t^2 \right) \cdot \left(\frac{2}{9}t^2, 1, \frac{2}{3}t \right) dt \\ &= \int_0^3 \left(\frac{2}{3}t^3, \frac{t^4}{3} + t^3, \frac{2}{3}t^5 \right) \cdot \left(\frac{2}{9}t^2, 1, \frac{2}{3}t \right) dt = \int_0^3 \left(\frac{4}{27}t^5 + \frac{t^4}{3} + t^3 + \frac{4}{9}t^6 \right) dt \\ &= \left[\frac{4}{27} \frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{15} + \frac{t^4}{4} + \frac{4}{63} t^7 \right]_0^3 = 18 + \frac{81}{5} + \frac{81}{4} + \frac{972}{7} = \frac{27063}{140}. \end{aligned}$$

□

4.2.1. Integral de línea en la forma diferencial

Veamos otra forma de expresar una integral de línea. Si \vec{F} es un campo vectorial continuo de la forma $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ y sea $C \subset D$ una curva de clase C^1 cuya

parametrización es $\alpha(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $t \in [a, b]$ entonces

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\alpha &= \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) dt \\ &= \int_a^b (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t))) \cdot (x'(t), y'(t)) dt \\ &= \int_a^b [(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))] dt \\ &= \int_a^b \left[\left(P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right) dt \right], \end{aligned}$$

es decir

$$\int_C \vec{F} \cdot d\alpha = \int_a^b P dx + Q dy. \quad (4.12)$$

A la forma de presentar la integral de línea de un campo vectorial como en (4.12) se le llama la *forma diferencial*.

Análogamente, si $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial continuo tal que $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ y sea $C \subset U$ una curva de clase C^1 cuya parametrización es $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ entonces

$$\int_C \vec{F} \cdot d\alpha = \int_C P dx + Q dy + R dz. \quad (4.13)$$

es denominada la *forma diferencial* de la integral línea de un campo vectorial en \mathbb{R} .

Ejemplo 4.20

Calcule la integral de línea $\int_C (x+y)dx + (x-y)dy$ donde C es la curva cuya parametrización es $\alpha : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (t, 2t)$.

Solución.

El dibujo de la curva y su orientación se ponen a la vista en la figura 4.15. Además, notemos que $\vec{F}(x, y) = (P, Q) = (x+y, x-y)$ y como $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (t, 2t)$ entonces $dx = dt$ y $dy = 2dt$.

Luego

$$\begin{aligned} \int_C (x+y)dx + (x-y)dy &= \int_0^2 (t+2t)dt + (t-2t)(2dt) \\ &= \int_0^2 3tdt - 2tdt = \int_0^2 tdt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^2 = 2. \end{aligned}$$

□

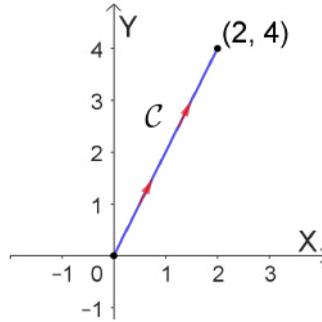


Figura 4.15: Segmento de recta del ejemplo 4.20

Ejemplo 4.21

Evalúe $\int_C \frac{x dx - y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, donde $C : x^2 + y^2 = a^2$, desde $(a, 0)$ a $(0, a)$.

Solución.

Notemos que $P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ y $Q = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Esto nos permite escribir la integral de línea como

$$\int_C \frac{x dx - y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_C \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy = \int_C P dx + Q dy$$

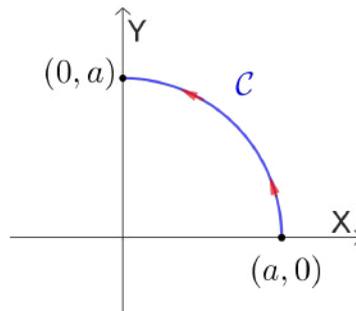


Figura 4.16: Arco de circunferencia del ejemplo 4.21

Si consideramos las ecuaciones $x = a \cos t$ e $y = a \sin t$ se consigue, respectivamente, $dx = -a \sin t dt$ y $dy = a \cos t dt$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_C \frac{xdx - ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \int_0^{\pi/2} \frac{(a \cos t)(-a \operatorname{sen} t dt) - (a \operatorname{sen} t)(a \cos t dt)}{\sqrt{a^2}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{-2a^2 \cos t \operatorname{sen} t}{a} dt = -2a \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t \cos t dt \\ &= -2a \left[\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} \right]_0^{\pi/2} = -a. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.22

Calcule la integral de línea $\int_C xydx + xzdy - yzdz$ donde $C : \alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 1]$.

Solución.

Como $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, t^2, t^3)$ entonces $dx = dt$, $dy = 2t dt$ y $dz = 3t^2 dt$.

Luego

$$\begin{aligned} \int_C xydx + xzdy - yzdz &= \int_0^1 t^3 dt + t^4 (2t dt) - t^5 (3t^2 dt) \\ &= \int_0^1 (t^3 + 2t^5 - 3t^7) dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{3} - \frac{3}{8}t^8 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{3}{8} = \frac{5}{24}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.23

Dada la curva $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2x^2 + 3y^2 \end{cases}$

a) Determine una parametrización para C en términos de senos y cosenos.

b) Evalúe $\int_C (x + z) dx + (x + y) dy + (y + z) dz$.

Solución.

a) Sea $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, entonces $z = 8 \cos^2 t + 12 \sin^2 t$.

Luego $C : \alpha(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 8 \cos^2 t + 12 \sin^2 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) Como

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (-2 \sin t, 2 \cos t, -16 \sin t \cos t + 24 \sin t \cos t) \\ &= (-2 \sin t, 2 \cos t, 8 \sin t \cos t)\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}I &= \int_C (x+z) dx + (x+y) dy + (y+z) dz \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \cos t + 8 \cos^2 t + 12 \sin^2 t) (-2 \sin t) dt + \\ &\quad \int_0^{2\pi} (2 \cos t + 2 \sin t) (2 \cos t) dt + \\ &\quad \int_0^{2\pi} (2 \sin t + 8 \cos^2 t + 12 \sin^2 t) (8 \sin t \cos t) dt \\ &= 4\pi\end{aligned}$$

□

4.2.1.1. Propiedades de la integral de línea

Recordemos que si $\alpha(t)$, con $a \leq t \leq b$, y $\beta(t)$, con $t \in [c, d]$ son dos parametrizaciones equivalentes de un arco C , entonces existe una función $\psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ biyectiva de clase C^1 tal que $\beta(t) = \alpha(\psi(t))$. Además, si ψ es creciente ella preserva la orientación; en cambio, si ψ es decreciente, afirmamos que invierte la orientación.

Teorema 4.2

Sean $\alpha(t)$, con $a \leq t \leq b$, y $\beta(t)$, con $t \in [c, d]$ dos parametrizaciones de clase C^1 por partes y equivalentes. Si ψ preserva la orientación, entonces

$$\int_{C_\beta} \vec{F} \cdot d\beta = \int_{C_\alpha} \vec{F} \cdot d\alpha.$$

Si ψ invierte la orientación, entonces

$$\int_{C_\beta} \vec{F} \cdot d\beta = - \int_{C_\alpha} \vec{F} \cdot d\alpha.$$

Advertimos que C_α y C_β denotan al arco C parametrizado por $\alpha(t)$ y $\beta(t)$, respectivamente.

Prueba 4.2 En concordancia con el Teorema 3.12 se tiene que si $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son dos parametrizaciones equivalentes de un arco \mathcal{C} , entonces existe una función biyectiva $\psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ de clase C^1 tal que $\beta(t) = \alpha(\psi(t))$, para todo $t \in [c, d]$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_\beta} \vec{F} \cdot d\beta &= \int_c^d \vec{F}(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt \\ &= \int_c^d \vec{F}(\alpha(\psi(t))) \cdot \alpha'(\psi(t)) \psi'(t) dt. \end{aligned}$$

En esta integral definida introducimos el cambio de variable $u = \psi(t)$ para el cual $du = \psi'(t) dt$. Al reemplazar en la integral de arriba se obtiene

$$\int_{\mathcal{C}_\beta} \vec{F} \cdot d\beta = \int_{\psi(c)}^{\psi(d)} \vec{F}(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u) du.$$

Analizamos esta integral bajo la mirada de los dos escenarios descritos en la hipótesis. En primer lugar, si ψ preserva la orientación, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_\beta} \vec{F} \cdot d\beta &= \int_{\psi(c)}^{\psi(d)} \vec{F}(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u) du \\ &= \int_a^b \vec{F}(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u) du = \int_{\mathcal{C}_\alpha} \vec{F} \cdot d\alpha. \end{aligned}$$

Por otra parte, si ψ es invierte la orientación, se consigue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_\beta} \vec{F} \cdot d\beta &= \int_{\psi(c)}^{\psi(d)} \vec{F}(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u) du \\ &= \int_b^a \vec{F}(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u) du = - \int_{\mathcal{C}_\alpha} \vec{F} \cdot d\alpha. \end{aligned}$$

■

Observación 7 Como caso particular del Teorema 4.2 se tiene que, si $-\mathcal{C}$ denota la curva \mathcal{C} pero orientada en sentido opuesto entonces

$$\int_{-\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\alpha = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\alpha. \quad (4.14)$$

Proposición 4.2

Sean $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ una curva cuya parametrización es $\alpha(t)$, $t \in [a, b]$, los campos vectoriales $\vec{F}, \vec{G} : \mathcal{C} \subset U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y las constantes reales k_1 y k_2 , entonces

[ILCV1] Linealidad respecto del integrando

$$\int_{\mathcal{C}} (k_1 \vec{F} + k_2 \vec{G}) \cdot d\alpha = k_1 \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\alpha + k_2 \int_{\mathcal{C}} \vec{G} \cdot d\alpha.$$

[ILCV2] Aditividad respecto de la curva

Si \mathcal{C} admite una descomposición en un número finito de curvas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ tales que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \dots \cup \mathcal{C}_n$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\alpha &= \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\alpha_1 + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\alpha_2 + \dots + \int_{\mathcal{C}_n} \vec{F} \cdot d\alpha_n \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{C}_i} \vec{F} \cdot d\alpha_i. \end{aligned}$$

[ILCV3] Si la curva \mathcal{C} es cerrada, la integral de línea de un campo vectorial \vec{F} sobre \mathcal{C} se denota mediante

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\alpha$$

Ejemplo 4.24

Evalúe $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\alpha$, donde $\vec{F}(x, y) = (y^2, x)$ y $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ según la figura 4.17.

Solución.

En vista de que la curva está compuesta como la unión de dos arcos, el cálculo se efectuara sobre cada una de ellas.

En primer lugar, la parametrización del segmento \mathcal{C}_1 está dada por

$$\alpha(t) = (1-t)(0, 2) + t(-5, -3) = (-5t, 2-5t), \quad t \in [0, 1].$$

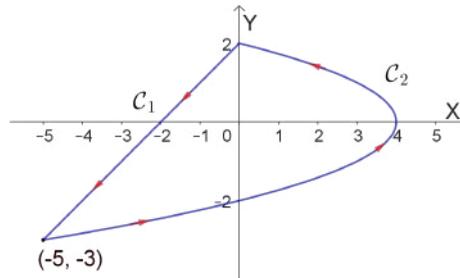


Figura 4.17: Curva cerrada y por tramos del ejemplo 4.24

Con ello,

$$\begin{aligned}
 \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\alpha &= \int_0^1 \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_0^1 \vec{F}(-5t, 2-5t) \cdot (-5, -5) dt \\
 &= \int_0^1 ((2-5t)^2, -5t) \cdot (-5, -5) dt \\
 &= -5 \int_0^1 ((2-5t)^2 - 5t) dt = -5 \int_0^1 (4 - 25t + 25t^2) dt \\
 &= \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

En segundo termino, la parametrización del arco de parábola C_2 es

$$\beta(t) = (4 - t^2, t), \quad t \in [-3, 2].$$

Luego

$$\begin{aligned}
 \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\beta &= \int_{-3}^2 \vec{F}(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt = \int_{-3}^2 \vec{F}(4 - t^2, t) \cdot (-2t, 1) dt \\
 &= \int_{-3}^2 (t^2, 4 - t^2) \cdot (-2t, 1) dt = \int_{-3}^2 (-2t^3 + 4 - t^2) dt = \frac{245}{6}
 \end{aligned}$$

Finalmente

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\alpha = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\alpha + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\beta = \frac{5}{6} + \frac{245}{6} = \frac{125}{3}$$

□

Ejemplo 4.25

Evalúe $\oint_C \vec{F} \cdot d\alpha$, donde $\vec{F}(x, y) = (e^y, x + y)$ y C es la curva formada por el triángulo de vértices $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ y $C(-1, 0)$, orientada en sentido antihorario.

Solución.

Parametrizamos cada lado del triángulo

$$C_1: \alpha(t) = A + t(B - A) = (1, 0) + t(-1, 1) = (1 - t, t), t \in [0, 1]$$

$$C_2: \beta(t) = B + t(C - B) = (0, 1) + t(-1, -1) = (-t, 1 - t), t \in [0, 1]$$

$$C_3: \gamma(t) = C + t(A - C) = (-1, 0) + t(2, 0) = (-1 + 2t, 0), t \in [0, 1]$$

Considerando a la curva $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ tenemos

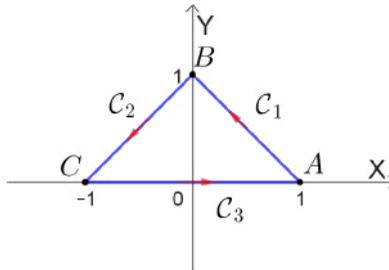


Figura 4.18: Curva cerrada y por tramos triangular del ejemplo 4.25

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\alpha &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\alpha + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\beta + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\gamma \\ &= \int_0^1 \vec{F}(1-t, t) \cdot (-1, 1) dt + \int_0^1 \vec{F}(-t, 1-t) \cdot (-1, -1) dt + \\ &\quad \int_0^1 \vec{F}(-1+2t, 0) \cdot (2, 0) dt \\ &= \int_0^1 (e^t, 1) \cdot (-1, 1) dt + \int_0^1 (e^{1-t}, 1-2t) \cdot (-1, -1) dt + \\ &\quad \int_0^1 (1, -1+2t) \cdot (2, 0) dt \\ &= \int_0^1 (-e^t + 1) dt - \int_0^1 (e^{1-t} + 1 - 2t) dt + \int_0^1 2dt \\ &= (2 - e) - (e - 1) + 2 = 5 - 2e. \end{aligned}$$

□

4.2.2. Trabajo realizado por una fuerza

Uno de los conceptos más fundamentales de la física es la noción de energía, definida, a groso modo como “la capacidad de realizar un trabajo” y el trabajo, a su vez se define como la cantidad que resulta cuando se ejerce una fuerza sobre un distancia. Esta noción, sin embargo, admite descripciones en varios niveles. En primer termino, si la fuerza es constante y el movimiento es rectilíneo, entonces efectivamente el trabajo se define simplemente como el producto de la fuerza por la distancia, lo cual no va acorde con la vida real.

En un segundo escenario, supongamos que todavía nos movemos en línea recta pero la fuerza es variable. El ejemplo típico de esto es el de un resorte al que se ha atado una masa m en uno de sus extremos, estiramos la masa una distancia de x unidades desde su posición de equilibrio y el resorte retrocederá en la dirección opuesta. Robert Hooke formuló una regla simple “la fuerza es proporcional a la distancia,” es decir, $F(x) = -kx$, donde k es la constante del resorte porque enfatiza la fuerza del resorte.

Finalmente, supongamos que una partícula se mueve a través de un campo de fuerzas F siguiendo una trayectoria C . En este caso, se supone que el trabajo realizado es la integral de la componente tangencial de la fuerza sobre la curva. Esto ahora tiene sentido en términos de integrales de línea. En efecto, sea $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una parametrización regular de C con vector velocidad $\vec{v}(t) = \alpha'(t)$, entonces en cualquier instante t , la componente tangencial de la fuerza está dada por $\vec{F}(\alpha(t)) \cdot T(t)$, donde $T(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v}$ es el vector tangente unitario. De esta forma, el trabajo realizado se modela como

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\alpha(t)) \cdot T(t) \vec{v}(t) dt.$$

Sin embargo, ya que el producto $T(t) \vec{v}(t)$ resulta el vector velocidad $\vec{v}(t)$, esta expresión se expresa como la integral de línea del campo vectorial \vec{F} sobre el arco C , tal como se describe en la siguiente definición.

Definición 4.4 [Trabajo realizado por una fuerza]

Si \vec{F} representa un campo de fuerzas continuo sobre un dominio D , entonces el trabajo W realizado por \vec{F} cuando un objeto se mueve desde el punto inicial $A = \alpha(a)$ hasta el punto final $B = \alpha(b)$ a lo largo de un arco regular a trozos C parametrizado por $\alpha = \alpha(t)$, $t \in [a, b]$ en D queda determinado por la integral de línea

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\alpha. \quad (4.15)$$

Ejemplo 4.26

Determine el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$, para trasladar un objeto a lo largo de la curva $\mathcal{C} : \alpha(t) = (t, t^2, t^3), t \in [0, 1]$.

Solución.

En virtud de que

$$\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2) \text{ y } \vec{F}(\alpha(t)) = \vec{F}(t, t^2, t^3) = (t^4 - t^6, 2t^5, -t^2)$$

quedamos expeditos para aplicar (4.15), o sea

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\alpha = \int_0^1 \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_0^1 (t^4 - t^6, 2t^5, -t^2) \cdot (1, 2t, 3t^2) dt \\ &= \int_0^1 (-2t^4 + 3t^6) dt = \frac{1}{35}. \end{aligned}$$

Esto significa que el trabajo realizado por la fuerza \vec{F} es igual a $\frac{1}{35}$ unidades de trabajo. \square

Ejemplo 4.27

Determine el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x, y) = (x, y + 2)$, para trasladar un objeto a lo largo de la cicloide $\mathcal{C} : \alpha(\theta) = (\theta - \text{sen } \theta, 1 - \text{cos } \theta), \theta \in [0, 2\pi]$.

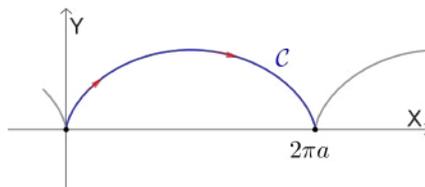


Figura 4.19: Cicloide del ejemplo 4.27

Solución.

Observe que $\alpha'(\theta) = (1 - \text{cos } \theta, \text{sen } \theta)$ y

$$\vec{F}(\alpha(\theta)) = \vec{F}(\theta - \text{sen } \theta, 1 - \text{cos } \theta) = (\theta - \text{sen } \theta, 3 - \text{cos } \theta).$$

Modelamos y calculamos la integral según (4.15). En efecto,

$$\begin{aligned}
 W &= \int_C \vec{F} \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\alpha(\theta)) \cdot \vec{\alpha}'(\theta) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} (\theta - \operatorname{sen} \theta, 3 - \operatorname{cos} \theta) \cdot (1 - \operatorname{cos} \theta, \operatorname{sen} \theta) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} (\theta - \theta \operatorname{cos} \theta - \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta + 3 \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} (\theta - \theta \operatorname{cos} \theta + 2 \operatorname{sen} \theta) d\theta \\
 &= 2\pi^2.
 \end{aligned}$$

El resultado anterior indica que el trabajo realizado por la fuerza \vec{F} es igual a $2\pi^2$ unidades de trabajo.

□

Observación 8 Recordemos que, en este caso particular, la integral de línea que permite cuantificar el trabajo que realiza de un campo vectorial es independiente de la parametrización; sin embargo, no es independiente de la orientación de la curva y esto acarrea una consecuencia ya que como estamos considerando $\vec{F}(\alpha(t)) \cdot T(t)$, si atravesamos la camino en la dirección opuesta, tanto $T(t)$ como la integral de línea se multiplicaría por -1 . Esto tiene sentido físico, pues, desde que el trabajo representa un cambio de energía, si invertimos el tiempo, lo que antes era una ganancia de energía ahora habrá una pérdida de energía, y viceversa.

4.3 Teorema fundamental de la integral de línea

Como se ha estudiado en la sección anterior, una integral de línea nos confiere el trabajo realizado por un campo vectorial sobre un objeto que se mueve a lo largo de una curva paramétrica, ¿cambiaría el trabajo si alteráramos el curso pero mantuviéramos los mismos puntos extremos?

Para responder a esta pregunta, necesitamos el teorema fundamental para las integrales de línea y un vistazo a un tipo especial de campo vectorial, definido sobre un dominio D de \mathbb{R}^n , llamado campos vectoriales conservativos.

Como hemos visto si $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo en D y C es una curva suave por partes en D de extremos $A = \alpha(a)$ y $B = \alpha(b)$, entonces la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$ depende en general de la curva C .

Iniciamos nuestro estudio introduciendo el concepto de independencia de la curva

Definición 4.5 [Independencia de la curva]

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en D y A, B puntos en D . Diremos que la integral de línea de \vec{F} es independiente de cualquier curva suave por partes que une a A con B , con $C \subset D$, si $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$ tiene el mismo valor.

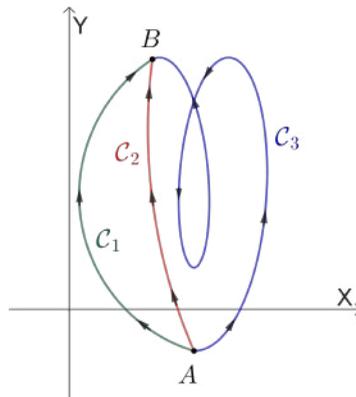


Figura 4.20: Independencia de la curva

En la figura 4.20 se visualizan tres curvas con el mismo punto inicial A y el mismo

punto final B y si la integral de línea es independiente de la curva, se cumple

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\alpha = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\alpha = \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\alpha. \quad (4.16)$$

Ejemplo 4.28

Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y) = (2xy^2, 2x^2y)$ sobre una partícula que se mueve desde $A(0, 0)$ hasta $B(1, 1)$ a la largo de cada una de las siguientes curvas:

- C_1 : es la parábola $y = x^2$.
- C_2 : es la recta que une A y B .
- C_3 : es el arco $\alpha_3(t) = (t, te^{1-t})$, $0 \leq t \leq 1$.

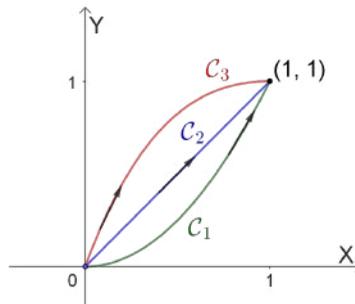


Figura 4.21: Curvas del ejemplo 4.28

Solución.

- Una Parametrización del arco C_1 es $\alpha_1(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$ cuyo vector tangente es $\alpha'_1(t) = (1, 2t)$.

Luego

$$\begin{aligned} W &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\alpha_1 = \int_0^1 \vec{F}(\alpha_1(t)) \cdot \alpha'_1(t) dt = \int_0^1 \vec{F}(t, t^2) \cdot (1, 2t) dt \\ &= \int_0^1 (2t(t^4), 2t^2(t^2)) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 6t^5 dt = \left. t^6 \right|_0^1 = 1. \end{aligned}$$

- b) El segmento de recta C_2 se parametriza como es habitual, es decir, $\alpha_2(t) = A + t(B - A)$, $0 \leq t \leq 1$. Así se obtiene $\alpha_2(t) = (t, t)$, $0 \leq t \leq 1$, de donde $\alpha_2'(t) = (1, 1)$, $0 \leq t \leq 1$.

Planteamos y calculamos la integral de línea tal como sigue a continuación

$$\begin{aligned} W &= \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\alpha_2 = \int_0^1 \vec{F}(\alpha_2(t)) \cdot \alpha_2'(t) dt = \int_0^1 \vec{F}(t, t) \cdot (1, 1) dt \\ &= \int_0^1 (2t(t^2), 2t^2(t)) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 4t^3 dt = t^4 \Big|_0^1 = 1. \end{aligned}$$

- c) Con la Parametrización $\alpha_3'(t) = (1, e^{1-t} - te^{1-t})$, $0 \leq t \leq 1$ del arco C_3 dada en el enunciado, se tiene

$$\begin{aligned} W &= \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\alpha_3 = \int_0^1 \vec{F}(\alpha_3(t)) \cdot \alpha_3'(t) dt \\ &= \int_0^1 \vec{F}(t, te^{1-t}) \cdot (1, e^{1-t} - te^{1-t}) dt \\ &= \int_0^1 (2t(te^{1-t})^2, 2t^2(te^{1-t})) \cdot (1, e^{1-t} - te^{1-t}) dt \\ &= \int_0^1 (2t^3e^{2-2t} + 2t^3e^{2-2t} - 2t^4e^{2-2t}) dt = 1. \end{aligned}$$

□

Como las tres integrales del campo vectorial \vec{F} sobre el dominio $D = \mathbb{R}^2$, evaluadas a lo largo de las curvas diferentes, toman el mismo valor, podemos afirmar que la integral de línea de \vec{F} es independiente de la curva. La razón para que esto ocurra, en realidad se debe a que el campo \vec{F} es el gradiente del campo escalar $f(x, y) = x^2y^2$, es decir,

$$\vec{F}(x, y) = (2xy^2, 2x^2y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \nabla f(x, y).$$

Una propiedad que esta íntimamente relacionada con la anterior definición es que el campo vectorial \vec{F} sea el gradiente de un cierto campo escalar f que estudiaremos en el apartado siguiente.

4.3.1. Campos vectoriales conservativos

En este apartado estudiaremos unos campos vectoriales que tiene una cierta propiedad que implica que las integrales de línea alrededor de todas las curvas cerradas

son cero. Estos campos vectoriales se denominan conservativos porque, precisamente en una región, la energía se conserva.

La fuerza de gravedad es un ejemplo de campo de fuerza conservativo. Recordemos que el trabajo realizado al elevar un objeto de masa m a una altura es el mismo independientemente del camino recorrido, es decir, el trabajo realizado es igual a $-mgh$. Otro ejemplo de campo conservativo es el campo de fuerza electrostático.

El problema de la independencia de la curva para la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$ esta estrechamente relacionada con determinar si \vec{F} es el gradiente de alguna función escalar f , para ello es útil tener la siguiente definición.

Definición 4.6 [Campos vectoriales conservativos]

Un campo vectorial \vec{F} se dice que es conservativo en una región D si se puede representar en D como el gradiente de una función continuamente diferenciable f , el cual es llamada una función potencial de \vec{F} , es decir, \vec{F} es conservativo si existe f , para todo $(x, y) \in D$, tal que

$$\vec{F}(x, y) = \nabla f(x, y) \quad (4.17)$$

Ejemplo 4.29

El campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (2x, y)$ es conservativo, pues basta tomar la función potencial $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$, y se tiene

$$\nabla f(x, y) = (2x, y) = \vec{F}(x, y).$$

□

Ejemplo 4.30

El campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (2xy, x^2)$ es conservativo, con función potencial $f(x, y) = x^2y$, pues

$$\nabla f(x, y) = (2xy, x^2) = \vec{F}(x, y).$$

□

Observación 9 Al estudiar los ejemplos anteriores, podemos hacernos dos preguntas:

- 1 ¿Existe una prueba fácil para determinar si \vec{F} es un campo vectorial conservativo?
- 2 Una vez absuelta la pregunta anterior, ¿cómo se puede encontrar la función potencial f ?

Antes de responder a estas preguntas, necesitamos introducir las siguientes definiciones.

Definición 4.7 [Conjunto conexo]

Un conjunto \mathcal{R} es conexo si dos puntos cualesquiera de \mathcal{R} pueden unirse mediante una curva suave por partes contenida en \mathcal{R} .

De la definición anterior sigue que, si $A, B \in \mathcal{R}$ entonces, existe una curva regular a trozos \mathcal{C} descrita por alguna parametrización $\alpha(t)$, $t \in [a, b]$ tal que se cumple $\mathcal{C} \subset \mathcal{R}$ y $A = \alpha(a)$ y $B = \alpha(b)$.

Definición 4.8 [Conjunto simplemente conexo]

Un conjunto \mathcal{R} es simplemente conexo si toda curva cerrada en \mathcal{R} es tal que su interior esta totalmente contenida en \mathcal{R} .

En forma intuitiva, un dominio \mathcal{R} es simplemente conexo si no tiene agujeros ni siquiera un pinchazo.

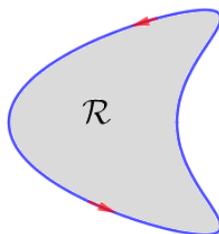


Figura 4.22: Conjunto simplemente conexo

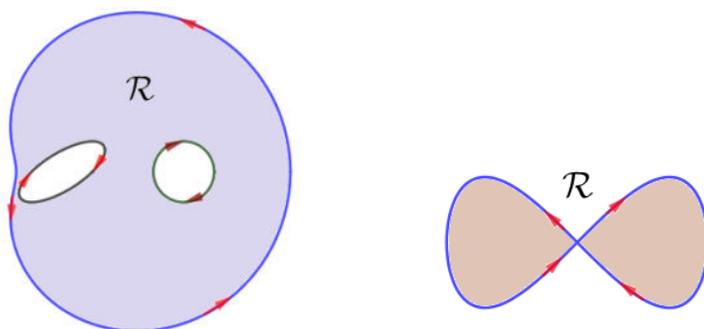


Figura 4.23: Conjunto no simplemente conexo

Ejemplo 4.31

1. El conjunto $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 3\}$ es conexo y simplemente conexo.
2. El conjunto $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ es conexo y no es simplemente conexo.

□

El siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial sea conservativo

Teorema 4.3 [Criterio para campos conservativos en \mathbb{R}^2]

Sean P y Q funciones de dos variables con primeras derivadas parciales continuas sobre una región abierta y simplemente conexa $D \subset \mathbb{R}^2$. El campo vectorial $\vec{F}(x, y) = P\vec{i} + Q\vec{j}$ es conservativo en D si y solo si

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \text{ para cada } (x, y) \in D. \quad (4.18)$$

Ejemplo 4.32

- a) El campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (3x^2 + 2x + y^2, 2xy + y^3)$ es conservativo, ya que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

b) El campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (e^x \operatorname{sen} y, x - e^x \cos y)$ no es conservativo, puesto que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y \neq 1 - e^x \cos y = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

□

De forma similar, extendemos el teorema 4.3 a \mathbb{R}^3 .

Teorema 4.4 [Criterio para campos conservativos en \mathbb{R}^3]

Sean P , Q y R funciones de tres variables con primeras derivadas parciales continuas sobre una región abierta y simplemente conexa $D \subset \mathbb{R}^3$. El campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (P, Q, R)$ es conservativo en D si y solo si

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}. \quad (4.19)$$

(N) La última expresión del teorema equivale decir que el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (P, Q, R)$ es conservativo en D si y solo si $\operatorname{rot} \vec{F} = (0, 0, 0)$.

Ejemplo 4.33

Verifique que el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2 \operatorname{sen}(x+z) + x^3 \cos(x+z) + yz, xz, x^3 \cos(x+z) + xy)$$

es conservativo.

Solución.

De acuerdo con el Teorema 4.19 se procede a calcular las derivadas parciales en cuestión.

Para $P = 3x^2 \operatorname{sen}(x+z) + x^3 \cos(x+z) + yz$ se tienen

$$\frac{\partial P}{\partial y} = z \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 3x^2 \cos(x+z) - x^3 \operatorname{sen}(x+z) + y.$$

Si $Q = xz$, entonces

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = z \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = x.$$

Para $R = x^3 \cos(x + z) + xy$ obtenemos

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 3x^2 \cos(x + z) - x^3 \sin(x + z) + y \quad \text{y} \quad \frac{\partial R}{\partial y} = x.$$

Se observa que se satisface (4.32), es decir

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 3x^2 \cos(x + z) - x^3 \sin(x + z) + y$$

y

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = x.$$

Por consiguiente el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ es conservativo.

□

Teorema fundamental de la integral de línea

En el cálculo integral se estudia el teorema fundamental del cálculo que nos precisa cómo evaluar integrales definidas, es decir,

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

Resulta que existe una versión de este teorema para integrales de línea sobre ciertos tipos de campos vectoriales, que enunciamos y demostramos a continuación.

Teorema 4.5 [Teorema fundamental de la integral de línea]

Sea \vec{F} un campo vectorial conservativo sobre la región D y sea f una función potencial de \vec{F} y si C es una curva regular por partes contenida completamente en D , con punto inicial A y final B . Entonces

$$\int_C \vec{F} \cdot d\alpha = f(B) - f(A),$$

donde la parametrización del arco C está dada por $\alpha(t)$ con $t \in [a, b]$ tal que $\alpha(a) = A$ y $\alpha(b) = B$.

Prueba 4.3 Como \vec{F} es conservativo, existe f tal que $\vec{F} = \nabla f$. Además, usando la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\alpha &= \int_C \nabla f \cdot d\alpha = \int_a^b \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} [f(\alpha(t))] dt = [f(\alpha(t))]_a^b = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) \\ &= f(B) - f(A). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$ es independiente de la curva en D . ■

Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de la independencia del camino

Teorema 4.6

Dado el campo vectorial $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuyas primeras derivadas parciales son continuas en una región abierta y conexa D , y sea C una curva suave por partes contenida en D . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. \vec{F} es conservativo, es decir existe una función potencial f definida en D tal que $\vec{F} = \nabla f$.
2. La integral de línea de $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$ es independiente de la curva en D .
3. La integral de línea de \vec{F} alrededor de toda curva cerrada regular a trozos contenida en D , es igual a cero, es decir,

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\alpha = 0$$

Observe que el Teorema 4.6 explica que un campo conservativo se caracteriza por la existencia de una función potencial, o bien, de modo equivalente, por el hecho de que la integral del campo a lo largo de un camino dependa sólo de los extremos de este último, o bien, por que la integral del campo sobre cualquier camino cerrado sea cero.

Ejemplo 4.34

Consideremos el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (x, xy)$ y la familia de curvas cerradas:

$$\mathcal{C}_r : \alpha_r(t) = (r \cos t, r \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad r > 0.$$

Veamos que la integral de línea de \vec{F} alrededor de \mathcal{C}_r es cero,

Solución.

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}_r} \vec{F} \cdot d\alpha_r &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\alpha_r(t)) \cdot \alpha_r'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(r \cos t, r \sin t) \cdot (-r \sin t, r \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (r \cos t, r^2 \sin t \cos t) \cdot (-r \sin t, r \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-r^2 \cos t \sin t + r^3 \sin t \cos^2 t) dt = 0. \end{aligned}$$

Sin embargo, de acuerdo al teorema 4.3, el campo vectorial no es conservativo, ya que para $P(x, y) = x$ y $Q(x, y) = xy$ se tiene que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y \neq 0 = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

□

Observación 10 Debemos percatarnos que no es suficiente que la integral de línea sea cero para una curva cerrada, si no que adicionalmente, \vec{F} debe ser conservativo sobre la región D .

Ejemplo 4.35

Calcule $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\alpha$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + xy^2 + z, yx^2 + y^2 + z, x + y + z^2)$ y la curva \mathcal{C} es parametrizada por

$$\alpha(t) = (\cos^3 t \sin t, \sin^3 t \cos t, \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Solución.

Del campo vectorial se tiene que

$$P = x^2 + xy^2 + z, \quad Q = yx^2 + y^2 + z \quad \text{y} \quad R = x + y + z^2.$$

Calculamos las derivadas parciales requeridas por el teorema 4.4

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 1 = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 1 = \frac{\partial R}{\partial y},$$

luego, en virtud de (4.19) se concluye que \vec{F} es conservativo.

Además, notemos que $\alpha(0) = (0, 0, 1) = \alpha(2\pi)$, entonces la curva C es cerrada y en consecuencia

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\alpha = 0$$

en razón del numeral 3 del teorema 4.6. □

Ejemplo 4.36

Calcule el valor de la integral $\int_C \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, donde C es la curva descrita por la función vectorial $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

Solución.

El campo vectorial es

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right) = (P, Q),$$

cuyo dominio es $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Además

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2)(-1) - (-x)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

y

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2)(1) - y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Sin embargo, como D no es simplemente conexo, no se cumple el teorema 4.3, es decir, el campo vectorial \vec{F} no es conservativo.

Si elegimos cualquier otra curva, por ejemplo, consideremos el arco

$$C_1 : \beta(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi/2,$$

se tiene

$$\begin{aligned} \int_C \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} &= \int_{C_1} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t(-\sin t) - \cos t(\cos t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt \\ &= - \int_0^{\pi/2} dt = -\pi/2. \end{aligned}$$



- (N)** Notemos que los teoremas 4.4 y 4.5 se cumplen solo para una clase especial de región D , y es aquella que debe ser simplemente conexa.

Cálculo de integrales de línea construyendo la función potencial

Si un campo vectorial \vec{F} es un gradiente en un dominio D , entonces, para calcular la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$, se puede considerar la curva más conveniente en D que una los extremos de C . Otra forma es construir una función potencial f , y con ella sabemos cómo calcular la integral de línea.

Ejemplo 4.37

Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$, donde $\vec{F}(x, y) = (2ye^{2x} + y^3, e^{2x} + 3xy^2)$ y la curva C es cualquier curva que va del punto $(4, 3)$ hasta el punto $(1, -3)$.

Solución.

Para $P = 2ye^{2x} + y^3$ se tiene $\frac{\partial P}{\partial y} = 2e^{2x} + 3y^2$, en tanto que para $Q = e^{2x} + 3xy^2$ se verifica que $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2e^{2x} + 3y^2$ entonces \vec{F} es conservativo. Esto significa que existe una función $f(x, y)$ tal que

$$\vec{F} = \nabla f \Leftrightarrow (P, Q) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = P = 2ye^{2x} + y^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q = e^{2x} + 3xy^2 \end{cases}$$

Integrando la primera relación, respecto a x , obtenemos

$$f(x, y) = \int (2ye^{2x} + y^3) dx = ye^{2x} + xy^3 + C(y)$$

Ahora, derivando respecto a y y usando la segunda relación,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x} + 3xy^2 + C'(y) = e^{2x} + 3xy^2 \Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = K$$

Luego $f(x, y) = ye^{2x} + xy^3 + K$.

Finalmente

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\alpha &= \int_C \nabla f \cdot d\vec{\alpha} = \left[ye^{2x} + xy^3 + K \right]_{(4,3)}^{(1,-3)} \\ &= -3e^2 - 27 + K - (3e^8 + 4(27) + K) \\ &= -3e^2 - 3e^8 - 135 \approx -9100.04.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.38

Evalúe $\int_C (2x \ln y - yz) dx + \left(\frac{x^2}{y} - xz \right) dy - xydz$, sobre la curva

$$C : \alpha(t) = \left(t^2, 1 + \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right), e^{t^2-2t} \right), \quad t \in [0, 2].$$

Solución.

Notemos que $\alpha(0) = A(0, 1, 1)$ y $\alpha(1) = B(4, 2, 1)$.

Para

$$P = 2x \ln y - yz, \quad Q = \frac{x^2}{y} - xz \quad \text{y} \quad R = -xy,$$

se cumple que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2x}{y} - z = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -y = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -x = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

En consecuencia, el campo \vec{F} es conservativo y, por ende, existe una función $f(x, y, z)$ tal que $\vec{F} = \nabla f$, es decir

$$\vec{F} = \nabla f \Leftrightarrow (P, Q, R) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = P = 2x \ln y - yz \\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q = \frac{x^2}{y} - xz \\ \frac{\partial f}{\partial z} = R = -xy \end{cases}$$

Integrando la primera relación, respecto de x , obtenemos

$$f(x, y, z) = \int (2x \ln y - yz) dx = x^2 \ln y - xyz + C(y, z)$$

Enseguida, derivamos f respecto de y , y usamos la segunda relación, para obtener:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{x^2}{y} - xz + \frac{\partial C}{\partial y}(y, z) = Q = \frac{x^2}{y} - xz \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y}(y, z) = 0$$

de donde $C(y, z) = K(z)$, y así $f(x, y, z) = x^2 \ln y - xyz + K(z)$.

Luego, derivamos f respecto de z , y usamos la tercera relación

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0 - xy + K'(z) = R = -xy \Rightarrow K'(z) = 0 \Rightarrow K(z) = C.$$

De esta manera tenemos la función potencial

$$f(x, y, z) = x^2 \ln y - xyz + C.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \int_C Pdx + Qdy + Rdz &= \int_C \nabla f \cdot d\alpha = \left[x^2 \ln y - xyz + C \right]_{(0,1,1)}^{(4,2,1)} \\ &= 16 \ln 2 - 8 \approx 3.09. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.39

Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas

$$\vec{F}(x, y, z) = (yze^{xy}, xze^{xy} - z, e^{xy} - y + 3)$$

para trasladar una partícula a lo largo de la curva C cuya parametrización es $\beta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\beta(t) = (\ln(t^2 - t + 1), t^4 + 5t^3 - 3t^2 - 2t, 3t + \sin(t^3 + 3t^2 - 4t))$$

Solución.

Sean $P = yze^{xy}$, $Q = xze^{xy} - z$, $R = e^{xy} - y + 3$ entonces

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = ze^{xy} + xye^{xy} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = ye^{xy} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = xe^{xy} - 1 = \frac{\partial R}{\partial y}$$

De lo anterior sigue que $\vec{F} = (P, Q, R)$ es un campo vectorial conservativo; por lo tanto, existe la función ¹

$$f(x, y, z) = ze^{xy} - yz + 3z + k$$

¹debe verificar que f es la función potencial del campo \vec{F}

tal que

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_0^1 \nabla f(x, y, z) \cdot d\beta = f(0, 1, 3) - f(0, 0, 0) = 3$$

□

Ejemplo 4.40

Calcule $\int_C (3x^2 + 2x + y^2) dx + (2xy + y^3) dy$, donde C es cualquier curva regular que va de $A(0, 0)$ a $B(1, 1)$.

Solución.

Como $\vec{F}(x, y) = (P, Q) = (3x^2 + 2x + y^2, 2xy + y^3)$ y $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y = \frac{\partial P}{\partial y}$ entonces \vec{F} es conservativo, entonces existe f tal que $\vec{F} = \nabla f$, de donde

$$\vec{F}(x, y) = \nabla f(x, y) \Leftrightarrow (P, Q) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Leftrightarrow P = \frac{\partial f}{\partial x}, Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Hallamos la función potencial f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P = 3x^2 + 2x + y^2 \Rightarrow f(x, y) = \int (3x^2 + 2x + y^2) dx = x^3 + x^2 + y^2x + C(y)$$

Así $f(x, y) = x^3 + x^2 + y^2x + C(y)$. Enseguida derivamos f respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 2xy + C'(y) = Q = 2xy + y^3 \Rightarrow C'(y) = y^3 \Rightarrow C(y) = \frac{y^4}{4} + K$$

Luego

$$f(x, y) = x^3 + x^2 + y^2x + \frac{y^4}{4} + K.$$

Finalmente, como $\vec{F} = (P, Q) = \nabla f$, entonces

$$\begin{aligned} \int_C Pdx + Qdy &= \int_C \nabla f \cdot d\alpha = f(x, y)|_A^B = \left(x^3 + x^2 + y^2x + \frac{y^4}{4} + K \right) \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} \\ &= \left(1 + 1 + 1 + \frac{1}{4} + K \right) - (0 + K) = \frac{13}{4}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.41

Determine el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$ para trasladar una partícula que se mueve a lo largo de la curva

$$C : \alpha(t) = \left(t^2, \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right), e^{t^2-t} \right), 0 \leq t \leq 2.$$

Solución.

Sean $A = \alpha(0) = (0, 0, 1)$, $B = \alpha(2) = (4, 1, e^2)$. Como $P = 2xyz$, $Q = x^2z$, $R = x^2y$ entonces tenemos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xz = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 2xy = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = x^2 = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

por lo tanto \vec{F} es conservativo, es decir, existe f tal que $\nabla f = \vec{F} = (P, Q, R)$ lo que equivale a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = P = 2xyz \\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q = x^2z \\ \frac{\partial f}{\partial z} = R = x^2y \end{cases}$$

integrando respecto de x , en la primera relación, obtenemos

$$f(x, y, z) = \int 2xyz dx = x^2yz + C(y, z)$$

Luego derivamos f respecto a y y de la segunda relación se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^2z + \frac{\partial C}{\partial y}(y, z) = x^2z \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y}(y, z) = 0 \Rightarrow C(y, z) = C_1(z)$$

Entonces $f(x, y, z) = x^2yz + C_1(z)$. Derivamos f respecto a z y de la tercera relación se tiene que $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = x^2y + C_1'(z) = x^2y \Rightarrow C_1'(z) = 0 \rightarrow C_1(z) = K$.

Por lo tanto $f(x, y, z) = x^2yz + K$, y finalmente

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\alpha = (x^2yz + K) \Big|_{A=(0,0,1)}^{B=(4,1,e^2)} = 16e^2 + K - (0 + K) = 16e^2$$

□

Ejemplo 4.42

Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + xy^2 + z, yx^2 + y^2 + z, x + y + z^2)$ y la curva C es parametrizada por $\alpha(t) = (\cos^3 t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^3 t \cos t, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solución.

Sea $P = x^2 + xy^2 + z$, $Q = yx^2 + y^2 + z$, $R = x + y + z^2$. Como

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 1 = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 1 = \frac{\partial R}{\partial y}$$

luego, \vec{F} es conservativo, es decir, existe f tal que $\nabla f = \vec{F} = (P, Q, R)$ y como $A = \alpha(0) = (0, 0, 1) = B = \alpha(2\pi)$ entonces la curva es cerrada y

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\alpha = f(B) - f(A) = 0.$$

□

Ejemplo 4.43

Si el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = \left(a \frac{x^2}{z}, byz, y^2 - \frac{x^3}{z^2} \right)$ es conservativo en la región donde $z > 0$.

1. Determine los valores de las constantes a y b .
2. Sea C la recta desde $(1, 2, 1)$ hasta $(2, 2, 2)$. Evalúe $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$.

Solución.

(a) El campo vectorial es conservativo si:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{3x^2}{z^2} = -a \frac{x^2}{z^2} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 2y = by = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

de donde $a = 3$ y $b = 2$.

(b) Podemos verificar que la función potencial de \vec{F} es $f(x, y, z) = \frac{x^3}{z} + y^2 z + C$, donde C es una constante, y

$$\int_C \vec{F} \cdot d\alpha = f(2, 2, 2) - f(1, 2, 1) = 4 + 8 - 1 - 4 = 7.$$

□

Ejemplo 4.44

Dado el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (y^2 e^{3z} + axy^3, 2xye^{3z} + 3x^2 y^2, bxy^2 e^{3z}).$$

1. ¿Para qué valores de a y b es \vec{F} conservativo?
2. Tomando los valores de a y b de la parte (a) encontrar la función potencial para \vec{F} .
3. Calcule el trabajo para trasladar una partícula sobre el campo vectorial \vec{F} , donde C es la curva cuya parametrización es $\alpha(t) = (e^{2t}, e^{-t}, \ln(1+t))$, $t \in [0, 1]$ y \vec{F} es como arriba con los valores determinados en la parte (a).

Solución.

(a) Sea $P = y^2 e^{3z} + axy^3$, $Q = 2xye^{3z} + 3x^2 y^2$, $R = bxy^2 e^{3z}$. Entonces, \vec{F} es conservativo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2ye^{3z} + 3axy^2 = 2ye^{3z} + 6xy^2 = \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow a = 2,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 3y^2 e^{3z} = by^2 e^{3z} = \frac{\partial R}{\partial x} \Leftrightarrow b = 3$$

y

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 6xye^{3z} = 2bxye^{3z} = \frac{\partial R}{\partial y} \Leftrightarrow b = 3$$

Luego

$$\vec{F}(x, y, z) = (y^2 e^{3z} + 2xy^3, 2xye^{3z} + 3x^2 y^2, 3xy^2 e^{3z}).$$

(b) La función potencial es $f(x, y, z) = xy^2 e^{3z} + x^2 y^3$ (verificar).

(c) El trabajo solicitado es

$$\int_C \vec{F} \cdot d\alpha = (xy^2 e^{3z} + x^2 y^3) \Big|_{(1,1,0)}^{(e^2, e^{-1}, \ln 2)} = (8 + e) - (1 + 1) = e + 6.$$

□

4.3.2. Problemas propuestos

4.27 Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$, donde $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y, 2x + y)$ y la curva C es la parábola $y = x^2$ desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(1, 1)$

4.28 Evalúe la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$ del campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (xy^2, x - y)$ a lo largo de $x^2(x - 2) = -3y$, desde el punto $(2, 0)$ hasta $(-1, 1)$.

4.29 Determine $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$ y la curva C es parametrizada por $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, si $0 \leq t \leq 1$.

4.30 Evalúe la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (2x^2y, -4xy^2)$ a lo largo de $C: \beta(t) = (\cos t + t \sin t)\hat{i} - (\sin t - t \cos t)\hat{j}$ con $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.

4.31 Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ para mover una partícula a lo largo de la curva

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2z \\ z = xy \end{cases}$$

desde el origen hasta el punto $(2, 2, 4)$.

4.32 Evalúe la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$ del campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (y - x^2, z - y^2, x - z^2)$$

a lo largo de $C: \alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ desde el punto $(0, 0, 0)$ hasta el punto $(1, 1, 1)$.

4.33 Calcule $\oint_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ si C es el cuadrado de vértices $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$ y $D(0, -1)$, orientada en sentido antihorario.

4.34 Evalúe la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (2, xy, 2zx)$ a lo largo del arco $C: \begin{cases} 2x - 2y + z = 2 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$, en el primer octante, orientado en sentido antihorario visto desde el eje X .

4.35 Evalúe $\int_C ydx + zdy + xdz$, donde $C: \alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 1]$

4.36 Calcule la integral de línea $\int_C x \cos y dx + x^2 \operatorname{sen} y dy$, donde C es el segmento de recta orientado desde $(-1, 2)$ hasta $(-2, 5)$.

4.37 Evalúe $\int_C \operatorname{sen} y dx + (3 + x \cos y) dy$, donde

$$C : \alpha(t) = \left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi t}{2} \right) \cos(\pi t), \operatorname{arc} \operatorname{sen} t \right), t \in [0, 1].$$

4.38 Calcule la integral de línea

$$\int_C 4xy^3 dx - 2y^2 z^2 dy + xyz dz,$$

donde $C : \gamma(t) = (t, t^2, t^3); t \in [0, 2]$.

4.39 Sea $f(x, y, z) = x^2 y + y^5 + xz^2$. Calcule $\int_C \nabla f \cdot d\alpha$, donde C es el segmento de recta que une los puntos $A(0, 1, 2)$ y $B(2, 3, 1)$.

4.40 Calcule la integral de línea

$$\int_C e^x \cos y dx + xz dy - z dz,$$

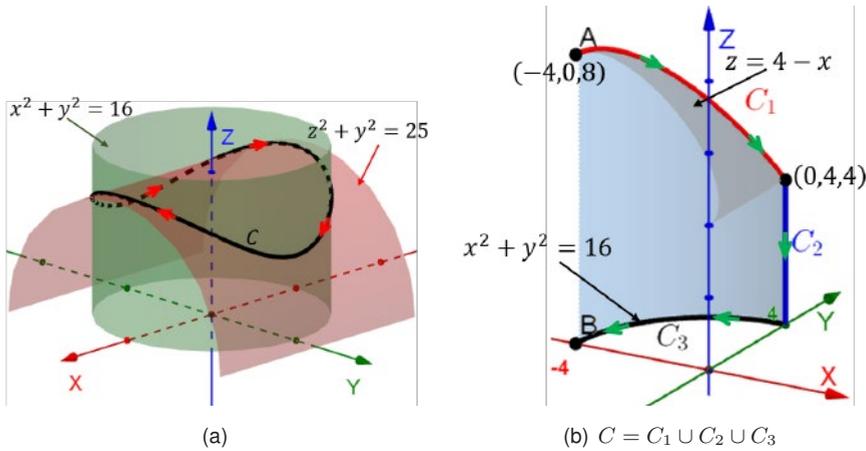
donde $C : \begin{cases} y^2 = x \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$, desde el origen hasta el punto $(1, 1, \sqrt{2})$.

4.41 Calcule la integral de línea $\int_C (2xy^3 + yz) dx + (3x^2 y^2 + xz) dy + xyz dz$ donde C es un camino cuyo punto inicial es $A = (0, 0, 0)$ y cuyo punto final es $B = (1, 1, 1)$ y $\alpha(t) = (t^p, t^q, z^r); t \in [0, 1], p, q, r \in \mathbb{N}$ es la parametrización de C .

4.42 Para cada una de las curvas C que se muestra en la figura adjunta, calcule el trabajo que realiza la fuerza $F(x, y, z) = -z^2 \hat{i} + x \hat{j} + y \hat{k}$ para mover una partícula, sobre la curva C .

4.43 Calcule el trabajo que realiza la fuerza $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{z}{x}, \frac{z}{y}, \ln(xy) \right); x, y > 0$, al mover una partícula a lo largo de la curva

$$C : \alpha(t) = \left(\frac{1}{1+t^2}, t^2 + t + 1, t \right), t \in [-1, 1].$$



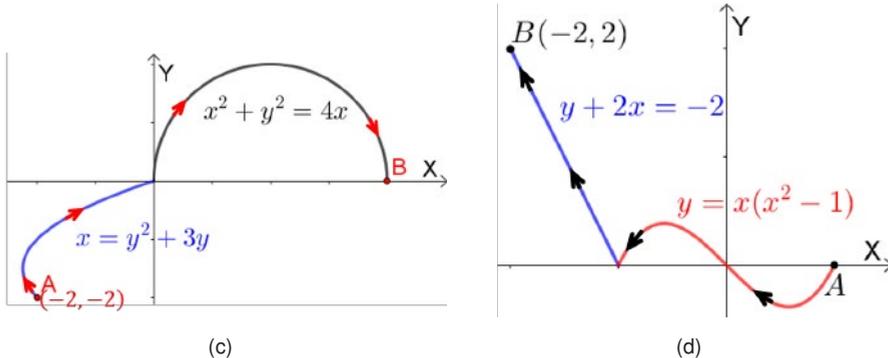
4.44 Calcule el trabajo que realiza la fuerza $F(x, y, z) = (z^2, y^2 + x^2, z)$ para mover una partícula, sobre la curva $C : \begin{cases} y^2 = x \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$, desde el origen hasta el punto $(1, 1, \sqrt{2})$.

4.45 Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$, donde

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + xy^2 + z, yx^2 + y^2 + z, x + y + z^2)$$

y la curva C es parametrizada por $\alpha(t) = (\cos^3 t \sin t, \sin^3 t \cos t, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

4.46 Para cada una de las curvas C que se muestra en la figura adjunta, calcule el trabajo que realiza la fuerza $F(x, y) = (x - y^2, x^2 - xy)$ para mover una partícula, sobre la curva C desde el punto A hasta el punto B .



4.47 Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\alpha$, si

$$\vec{F}(x, y, z) = (2xe^{y^2}, 2x^2ye^{y^2} + \operatorname{sen}^2 z, y \operatorname{sen} 2z)$$

$$y \ C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}.$$

4.48 En cada caso, verifique que el campo vectorial dado es conservativo y luego determine una de sus funciones potenciales.

a) $\vec{F}(x, y) = (y + 4x + 3, x - 9y^2)$.

b) $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{y}{x} + \frac{6}{x^4}, 1 + \ln x - \frac{4}{y^3} \right)$.

c) $\vec{F}(x, y, z) = (6y^2 + 3z^2 - 2, 12yx - z, 6zx - y + 1)$.

d) $\vec{F}(x, y, z) = (1 + 6x^2y, 2x^3 + e^y \cos z, 2 - e^y \operatorname{sen} z)$.

4.49 Sea $\vec{F}(x, y, z) = (axy + z, bx + 2z)$.

a) ¿Para qué valores de a y b es \vec{F} conservativo?

b) Usando los valores de a y b de la parte (a), calcule la función potencial f .

c) Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$, donde C es la curva desde $(2, 0, 1)$ hasta $(0, 2, 5)$ la cual es la intersección (en el primer octante) de el paraboloido $z = (x - 1)^2 + y^2$, y el plano $z = 25x$.

4.50 Use el teorema fundamental de la integral de línea para calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$, en cada uno de los casos.

a) $\vec{F}(x, y, z) = (6y^2 + 3z^2 - 2, 12yx - z, 6zx - y + 1)$ donde $C : \begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ en el primer octante, con orientación horaria vista desde el eje Y .

b) $\vec{F}(x, y, z) = (1 + 6x^2y, 2x^3 + e^y \cos z, 2 - e^y \operatorname{sen} z)$ donde $C : \begin{cases} y = x \\ z = 4 - x^2 \end{cases}$ en el primer octante, con orientación antoraria vista desde el eje X .

4.51 Dado el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (ax^3y^2z, z^3 + bx^4yz, 3yz^2 - x^4y^2)$ conservativo.

- a) Calcule los valores de las constantes a y b .
- b) Tomando los valores de a y b de la parte (a) encontrar la función potencial para \vec{F} .
- c) Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza \vec{F} para mover una partícula a lo largo de la curva C la cual es la intersección del paraboloides $z = (x - 1)^2 + y^2$, con el plano $z = 2x$.

4.52 Dada la integral $\int_C \left(\frac{y}{x} + \frac{6}{x^4} \right) dx + \left(1 + \ln x - \frac{4}{y^3} \right) dy$ donde C es una curva que no intersecta a los ejes coordenados y que va desde el punto $(-1, 2)$ hasta el punto $(-5, 3)$.

- a) Demuestre que la integral de línea es independiente de la curva C .
- b) Calcule el valor de la integral.

4.4 Teorema de Green

El teorema de Green relaciona una integral de línea a lo largo de una curva cerrada C en el plano \mathbb{R}^2 , con una integral doble sobre la región D encerrada por C . Usaremos la notación $\partial D = C$ para indicar que la frontera de D es la curva C .

Definición 4.9 [Curva de Jordan]

Una curva de Jordan, es una curva cerrada en el plano que no se corta así misma.

Podemos redefinir la noción de región D simplemente conexa usando curvas de Jordan.

Definición 4.10 [Región simplemente conexa]

Una región es simplemente conexa si es conexa y el interior de toda curva de Jordan C contenida en D está también contenida en D .

Teorema 4.7 [Teorema de Green]

Sea D una región simplemente conexa en el plano XY con frontera C suave por partes y orientada positivamente. Si las componentes P y Q del campo vectorial \vec{F} tienen derivadas parciales continuas sobre la región D . Entonces

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\alpha = \oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Prueba 4.4 Por simplicidad, suponemos que la región

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\},$$

donde f y g son funciones continuas.

Descomponemos $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, tal como se ve en la figura 4.24 (b).

Por el teorema de Fubini podemos evaluar la integral doble como una integral iterada y después usar el teorema fundamental del calculo. Así demostraremos que

$$\oint_C Pdx + Qdy = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

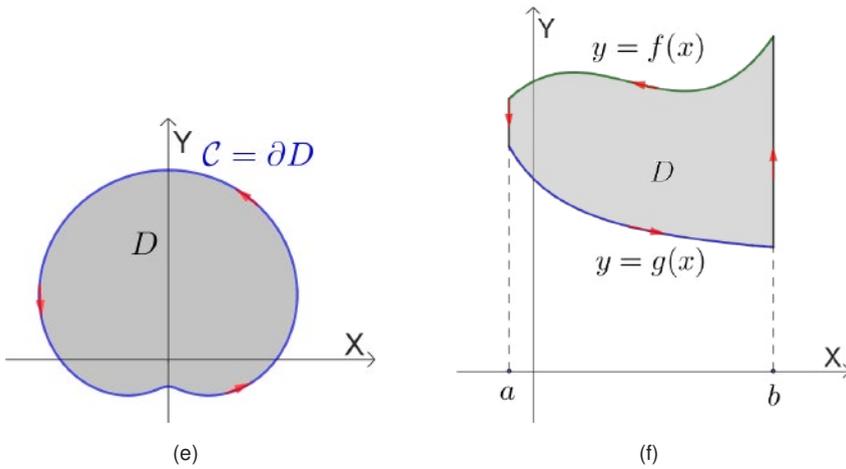


Figura 4.24: Teorema de Green

lo que equivale demostrar:

$$\oint_C P dx = - \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx \quad \text{y} \quad \oint_C Q dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial Q}{\partial x} dy dx$$

Probaremos la primera igualdad

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b [P(x, f(x)) - P(x, g(x))] dx$$

Si escribimos

$$C_1 : \alpha(x) = (x, g(x)) \quad \text{y} \quad -C_3 : \beta(x) = (x, f(x)), \quad a \leq x \leq b$$

entonces tendremos que

$$\begin{aligned} \oint_C &= \oint_{C_1} P dx + \oint_{C_2} P dx + \oint_{C_3} P dx + \oint_{C_4} P dx \\ &= \oint_{C_1} P dx + \oint_{C_2} P dx - \oint_{-C_3} P dx + \oint_{C_4} P dx \\ &= \int_a^b P(x, g(x)) dx + 0 - \int_a^b P(x, f(x)) dx + 0 \\ &= - \left[\int_a^b P(x, f(x)) dx - \int_a^b P(x, g(x)) dx \right] \\ &= - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA \end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que x es constante en C_2 y C_4 . ■

Ejemplo 4.45

Calcule

$$\oint_C y^2 dx + 5xy dy,$$

donde C es la frontera de la región sombreada de la figura 4.25.

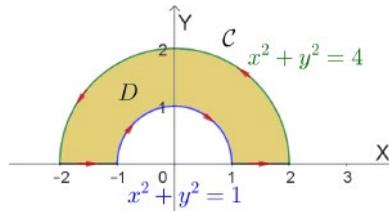


Figura 4.25: Región D del ejemplo 4.45

Solución.

Como $P(x, y) = y^2$ y $Q(x, y) = 5xy$ entonces $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 5y - 2y = 3y$. Así

$$\begin{aligned} \oint_C P dx + Q dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D 3y dA \\ &= \int_1^2 \left(3r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) dr = \int_1^2 \left(3r^2 [-\cos \theta]_0^\pi \right) dr \\ &= \int_1^2 (3r^2 (1 + 1)) dr = 2r^3 \Big|_1^2 = 14. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.46

Usando el teorema de Green, evalúe la integral de línea

$$\oint_C \left(\arctan \left(\frac{3}{x^2 + 3} \right) - 3y + 5 \right) dx + \left(x^2 + 5x + 7 + e^x - e^{(y^2+3)} + \frac{\cos y}{y} \right) dy$$

donde C es la frontera, orientada en sentido antihorario, de la región D de la figura 4.26.

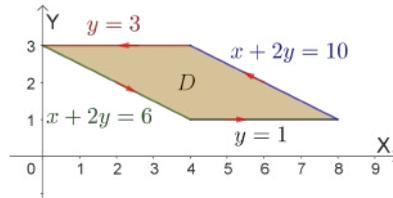


Figura 4.26: Región del ejemplo 4.46

Solución.

Para

$$P(x, y) = \arctan\left(\frac{3}{x^2 + 3}\right) + 3y + 5 \quad \text{y} \quad Q(x, y) = x^2 + 5x + 7 + e^x - e^{(y^2+3)} + \frac{\cos y}{y}$$

se tiene, respectivamente,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 5 + e^x \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 3.$$

Por otro lado, se tiene la representación analítica de la región, es decir,

$$D = \{ : 1 \leq y \leq 3 \wedge 6 - 2y \leq x \leq 10 - 2y \}.$$

En seguida, modelamos y calculamos la integral de línea.

$$\begin{aligned} \oint_C P dx + Q dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_1^3 \left(\int_{6-2y}^{10-2y} (2x + 2 + e^x) dx \right) dy \\ &= \int_1^3 (x^2 + 2x + e^x) \Big|_{6-2y}^{10-2y} dy = \int_1^3 (72 - 16y + e^{10-2y} - e^{6-2y}) dy \\ &= \left(72y - 8y^2 - \frac{1}{2}e^{10-2y} + \frac{1}{2}e^{6-2y} \right) \Big|_1^3 = \frac{1}{2}e^8 - e^4 + \frac{161}{2} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.47

Aplice el teorema de Green, para calcular el trabajo que realiza el campo de fuerza

$$\vec{F}(x, y) = \left(\sin(x^x + 3) - 3y + 5, e^{y^2+1} + \ln(|y|) + 2x + 7 \right)$$

para trasladar una partícula a lo largo de la curva cerrada C , que es la frontera de la región encerrada por las curvas: $x = y + 1$, $x = 3 - y^2$.

Solución.

Como $P = \sin(x^x + 3) - 3y + 5$ y $Q = e^{y^2+1} + \ln(|y|) + 2x + 7$ entonces

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2 \text{ y } \frac{\partial P}{\partial y} = -3$$

Intersección de las curvas:

$$x = y + 1 = 3 - y^2 \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow (y + 2)(y - 1) = 0$$

de donde sigue que $y = -2$ o $y = 1$.

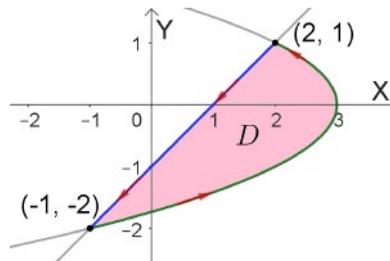


Figura 4.27: Región D

luego $D = \{(x, y) : -2 \leq y \leq 1 \wedge y + 1 \leq x \leq 3 - y^2\}$ y por el teorema de Green

$$\begin{aligned} \oint_C P dx + Q dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{-2}^1 \left(\int_{y+1}^{3-y^2} 5 dx \right) dy \\ &= 5 \int_{-2}^1 (2 - y^2 - y) dy \\ &= 5 \left(2y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_{-2}^1 = 5 \left(\frac{9}{2} \right) = \frac{45}{2}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.48

Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\alpha$, donde $\vec{F}(x, y) = (e^y, x + y)$ y C es el triángulo de vértices $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ y $C(-1, 0)$.

Solución.

$P = e^y$, $Q = x + y$, aplicando el teorema de Green, obtenemos

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\alpha &= \oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} (1 - e^y) dy \right) dx = 2 \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1 - e^y) dy \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 (y - e^y) \Big|_0^{1-x} dx = 2 \int_0^1 (1 - x - e^{1-x} - (0 - 1)) dx \\ &= 2 \int_0^1 (2 - x - e^{1-x}) dx = 2 \left(2x - \frac{x^2}{2} + e^{1-x} \right) \Big|_0^1 \\ &= 2 \left[\left(2 - \frac{1}{2} + 1 \right) - (0 - 0 + e) \right] = 5 - 2e \end{aligned}$$

Otra forma, es calcular

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\alpha = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\alpha + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\alpha + \oint_{C_3} \vec{F} \cdot d\alpha$$

donde $C_1 : x + y = 1$, $C_2 : -x + y = 1$ y $C_3 : y = 0$. Ver la figura 4.18 de este capítulo. □

Ejemplo 4.49

Aplicando el teorema de Green, calcule la integral de línea

$$\oint_C (x + 2y + \arctan x) dx + (x^2 + \ln(y^2 + 3)) dy,$$

donde

$$C : \begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 1 - \frac{x^2}{4} \end{cases} .$$

Solución.

Como $P(x, y) = x + 2y + \arctan x$ y $Q(x, y) = x^2 + \ln(y^2 + 3)$ entonces $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$ y $\frac{\partial P}{\partial y} = 2$, respectivamente.

Luego, aplicando el teorema de Green tenemos

$$\begin{aligned}\oint_C P dx + Q dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{-2}^2 \left(\int_{1-\frac{x^2}{4}}^{4-x^2} (2x-2) dy \right) dx \\ &= \int_{-2}^2 (2x-2) \left(4-x^2-1+\frac{x^2}{4} \right) dx = \int_{-2}^2 \left(-\frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 6 \right) dx \\ &= 2 \int_0^2 \left(\frac{3}{2}x^2 - 6 \right) dx = -16\end{aligned}$$

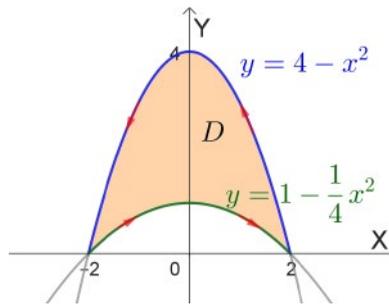


Figura 4.28: Región D

□

Ejemplo 4.50

Usando el teorema de Green, calcule

$$\oint_C \left(\frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{4}xy^4 + 3 \right) dx + \left(\frac{1}{4}x^4y - \cos(y^3+2) - \ln(e^y+2) + 8 \right) dy,$$

donde C es la frontera, orientada en sentido antihorario, de la región

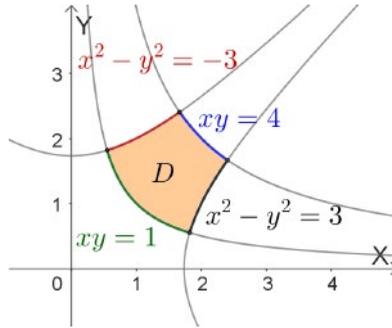
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x^2 - y^2 \leq 3 \wedge 1 \leq xy \leq 4\}$$

de la siguiente figura

Solución.

Como $P = \frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{4}xy^4 + 3$ y $Q = \frac{1}{4}x^4y - \cos(y^3+2) - \ln(e^y+2) + 8$ entonces

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -xy^3, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = x^3y \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^3y + xy^3 = xy(x^2 + y^2).$$

Figura 4.29: Región D

Sea $u = x^2 - y^2$, $v = xy$ entonces

$$J(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2(x^2 + y^2)$$

Luego, aplicando el teorema de Green, obtenemos

$$\begin{aligned} \oint_C Pdx + Qdy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D xy(x^2 + y^2) dA \\ &= \iint_D f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| dA \\ &= \iint_D v(x^2 + y^2) \frac{1}{2(x^2 + y^2)} dudv \\ &= \int_1^4 \left(\int_{-3}^3 v du \right) dv = 6 \int_1^4 v dv = 6 \left. \frac{v^2}{2} \right|_1^4 \\ &= 6 \left(\frac{15}{2} \right) = 45. \end{aligned}$$

□

4.4.1. Problemas propuestos

4.53 Utilice el teorema de Green, para calcular la integral

$$\oint_C (2xy + y^2 - xe^x + \ln|3 + x^2| - 5y) dx + (x^2 - 3x + y + \arctan y) dy,$$

donde C es la frontera, en sentido antihorario, de la región comprendida entre las curvas: $y = x$, $y = x^2 - x$.

4.54 Sea C el arco de la curva dada por la ecuación $x = \sqrt{4 - y^2}$, que va desde el punto $A(\sqrt{3}, 1)$ hasta el punto $B(\sqrt{3}, -1)$. Use el Teorema de Green para calcular la integral de línea

$$\int_C \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dx + \ln(x^2 + y^2) dy.$$

4.55 Usando el teorema de Green, calcule $\oint_C (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$, donde $C : x^2 + y^2 = 2x$, $y \geq 0$.

4.56 Considere C la curva que es la frontera de la región R limitada por $x^2 + y^2 = 1$, $y = -x$ y $x = y$, para $y \geq 0$. Calcule la siguiente integral de línea

$$\int_C (-16y + \sin(x^2)) dx + (4e^y + 3x^2) dy.$$

4.57 Usando el teorema de Green, calcule

$$\oint_C \left(\frac{e^{x/y}}{y} + ye^{xy} \right) dx + \left(xe^{xy} - \frac{xe^{x/y}}{y^2} + e^{-y} + x^2 + 2xy \right) dy$$

siendo C la frontera (orientada positivamente) de la región comprendida entre las gráficas de $y = x^2$, $y = 1$.

4.58 Calcule la siguiente integral

$$4 \int_C (x^3y + 2xy) dx + \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + x + 4y \right) dy,$$

donde la curva C , que es descrita por $x^2 + 4y^2 = 4$ y $|x| + |y| = 1$, cerrada y orientada positivamente.

4.59 Sea el rectángulo limitado por $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, donde $a > 0$, $b > 0$ son tales que $ab = 4$. Calcule a y b de manera que

$$\oint_C e^{-x^2y} (1 - 2x^2y) dx + x^3 (1 - e^{-x^2y}) dy = 1$$

4.60 Calcule

$$\int_C (2x^3 - y) dx + (2x + y^3 e^{\cos y}) dy$$

siendo C el contorno de la región entre las curvas $x^2 + y^2 = 25$ orientada en sentido antihorario y $x^2 + 4y^2 = 4$ orientada en sentido horario.

4.61 Aplicando el teorema de Green, calcule la integral de línea

$$\oint_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \left[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right] dy,$$

donde C es la curva cerrada, que es la frontera de la región

$$\mathcal{R} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \geq 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

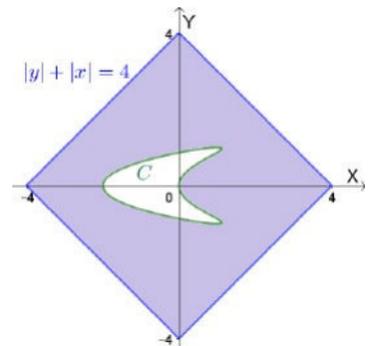
4.62 Por medio del teorema de Green, calcular $\int_C (2x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy$, donde C es la frontera del anillo circular $\{(x, y) / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

4.63 Usando el teorema de Green, calcule

$$\oint_C \left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{y^2}{2} + \ln(x^2 + 1) \right) dx + \left(\sqrt{1+x^2} + \frac{yx^3}{3} \right) dy$$

siendo C la frontera (orientada positivamente) de la región comprendida entre la gráfica de las parábolas $\mathcal{P}_1 : y = x^2$ y $\mathcal{P}_2 : x = y^2$.

4.64 En la figura adjunta se muestra una placa construida con un material homogéneo de densidad 4,75 gramos por centímetro cuadrado, ubicada en un plano cartesiano cuyas unidades están en centímetros. si los bordes de la placa están representados por las curvas $\alpha(t) = (\cos t - \cos(2t), \sin t)$; $t \in [0, 2\pi]$ y $|x| + |y|$, determine la masa total de la placa.



4.65 Usando el teorema de Green, calcule el área de la región acotada por la curva C , cuya parametrización es

$$x = x(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y = y(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

el segmento que une el origen con el punto $A\left(\frac{e+e^{-1}}{2}, \frac{e-e^{-1}}{2}\right)$ y el eje X .

4.66 Sea C el arco de la curva dada por la ecuación $x = y^2 - 3y$, que va desde el punto $A(0, 3)$ hasta el punto $B(4, -1)$. Use el Teorema de Green para calcular

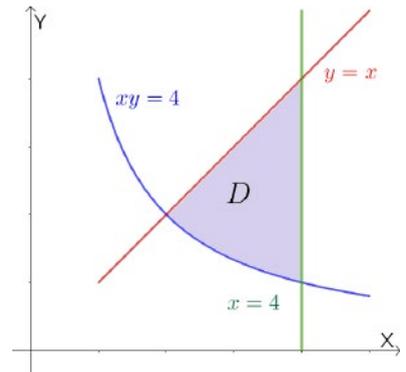
$$\int_C (2y + y^2) dx + (8x + 2yx) dy.$$

4.67 Use una integral de línea para hallar el área de la región acotada por las gráficas de: $y = 2x + 1$ e $y = 4 - x^2$.

4.68 Calcule la integral de línea $\int_C (-y^2 + 6 \tan^2(2x)) dx + (x^2 - 2yx) dy$ a lo largo de la curva C de orientación antihoraria, donde C es la frontera de la región limitada por las curvas de ecuaciones $y = 1 + \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$; $y = -x^2 + 3$ y $x = -1$.

4.69 En la imagen adjunta se muestra la región D del plano XY . Si C es la frontera de la región D orientada positivamente, calcule la integral de línea

$$\int_C x^2 y^2 dx - xy e^{y^2} dy.$$



4.70 Calcule la integral de línea $\int_C (8y - y^2 \operatorname{sen} x) dx + (x^2 + 2y \cos x) dy$ a lo largo de la curva C de orientación antihoraria, donde C es la frontera de la región limitada por las curvas de ecuaciones $y = \cos x$; $x = \sqrt{1 - y^2}$ y $y = -1$.

4.71 Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$, donde

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{x}{(x^2 + e^{y^2})} - y, \frac{ye^{y^2}}{(x^2 + e^{y^2})} + x \right),$$

y C es el borde de la región comprendida por las curvas $x^2 - y + 1 = 0$ y $x^2 - 2y + 6 = 0$, recorrida en sentido antihorario.

4.72 Sea C el contorno, orientado positivamente, de un triángulo en el plano XY . Demuestre que el valor de la integral $\int_C (2e^x y^2 + 6) dx + (6x + 4ye^x) dy$ depende sólo del área de la región triangular encerrada por C .

4.73 Se define la región

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 3 - 2y^2 \wedge y \geq 0 \wedge x \geq y\}$$

del plano XY ubicada en el primer cuadrante. Si $\vec{F}(x, y) = (M(x, y); N(x, y))$ es un campo vectorial de clase C^1 en todo \mathbb{R}^2 tal que, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, satisface

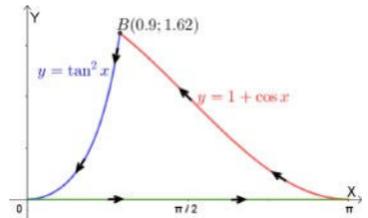
$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} + xy^2 e^{x^2 y^3}$$

entonces calcule el trabajo que realiza el campo F para mover, por única vez, una partícula a lo largo de toda la frontera de la región D .

4.74 Sea C la curva cerrada mostrada en la figura adjunta.

En cada caso, use el teorema de Green para calcular la siguiente integral de línea

$$\int_C (2xy^2 - 3x^2y) dx + (yx^2 - x^3) dy$$

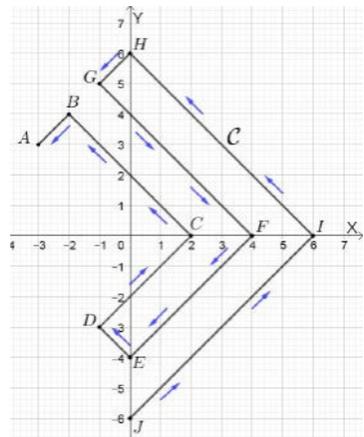


4.75 Sean, el campo vectorial

$$F(x, y) = \left(-4xy - 2, -2x^2 + \frac{1}{y^2 + 1} \right),$$

definido para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, y la curva C que va desde el punto $J(0, -6)$ hasta el punto $A(-3, 3)$. La curva C está formada por la unión de nueve segmentos de recta con la orientación mostrada en la figura adjunta.

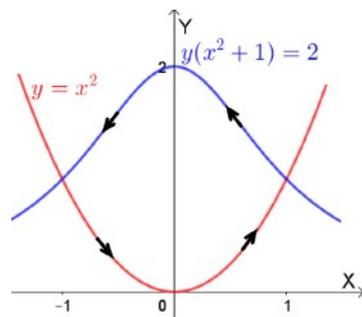
Use el teorema de Green para calcular la integral de línea $\int_C F \cdot d\alpha$.



4.76 Sea C la curva cerrada mostrada en la figura adjunta.

En cada caso, use el teorema de Green para calcular la siguiente integral de línea

$$\int_C (2xy^2 - 3x^2y) dx + (yx^2 - x^3) dy$$



4.77 La región D está limitado por las curvas $y = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 2y$. Si $\vec{F}(x, y) = (M(x, y); N(x, y))$ es un campo vectorial que, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, es de clase C^1 y satisface

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} + \ln(y^2 + x^2),$$

entonces calcule el trabajo que realiza el campo F para mover, por única vez, una partícula a lo largo de toda la frontera de la región D .

4.78 Sean u y v dos campos escalares con derivadas parciales primeras y segundas continuas en un conjunto abierto conexo U del plano. Sea \mathcal{R} una región de U limitada por una curva \mathcal{C} . Demostrar que

$$\text{a) } \oint_{\mathcal{C}} u \nabla v \cdot (dx, dy) = \iint_{\mathcal{R}} (u \nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v) dx dy, \text{ donde } \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\text{b) } \oint_{\mathcal{C}} u v dx + u v dy = \iint_{\mathcal{R}} \left[v \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy$$

5

Integral de Superficie

Una integral de superficie es una generalización natural de la integral de línea en la que la integración se realiza sobre una superficie en el espacio tridimensional en lugar de una curva. Estas integrales son importantes cuando se estudian temas relacionados con medios continuos como los sólidos, fluidos o gases, así como tópicos que tratan con campos de fuerza, campos electromagnéticos o campos gravitacionales.

Aunque la mayor parte de nuestro trabajo se dedicará a ver cómo se pueden calcular y para qué se utilizan, primero queremos indicar brevemente cómo se definen. La integral superficie de la función continua $f(x, y, z)$ sobre la superficie S se denota por

$$\iint_S f(x, y, z) dS,$$

donde dS puede imaginarse como el área de una porción infinitesimal de la superficie S .

Iniciaremos el capítulo con el estudio de los procedimientos destinados a obtener una parametrización de una superficie, de las que sólo nos interesarán las superficies que son suaves por partes, es decir, aquellas que consisten en un número finito de piezas sobre las cuales hay un plano tangente que varía continuamente y que está asociado a un vector normal unitario que, a su vez, inducirá una orientación sobre dicha superficie. Una vez terminado esto, en las secciones siguientes mostraremos el cálculo y las aplicaciones de estas integrales cuando la función a integrar sea un campo escalar o vectorial.

5.1 Superficies parametrizadas

Una integral de superficie es similar a una integral de línea, excepto que la integración se realiza sobre una superficie en lugar de un arco. En este sentido, las integrales de superficie amplían nuestro estudio de las integrales de línea. Sin embargo, antes de que podamos plantear y resolver una integral sobre una superficie, debemos considerar la superficie en si misma.

Recuerde que para calcular una integral de línea de un campo escalar o vectorial sobre el arco \mathcal{C} , primero se requiere parametrizar \mathcal{C} . Análogamente, para calcular una integral de superficie sobre la superficie S , necesitamos parametrizar S . Esto significa que necesitamos un concepto funcional de superficie parametrizada o superficie paramétrica, de la misma manera o de modo semejante al de curva parametrizada.

Definición 5.1 [Parametrización de una superficie]

Una parametrización de la superficie S es la función continua

$$\begin{aligned} \vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \vec{r}(u, v) = x(u, v) \vec{i} + y(u, v) \vec{j} + z(u, v) \vec{k} \end{aligned}$$

La imagen $\vec{r}(D) = S$, se denomina superficie descrita por \vec{r} .

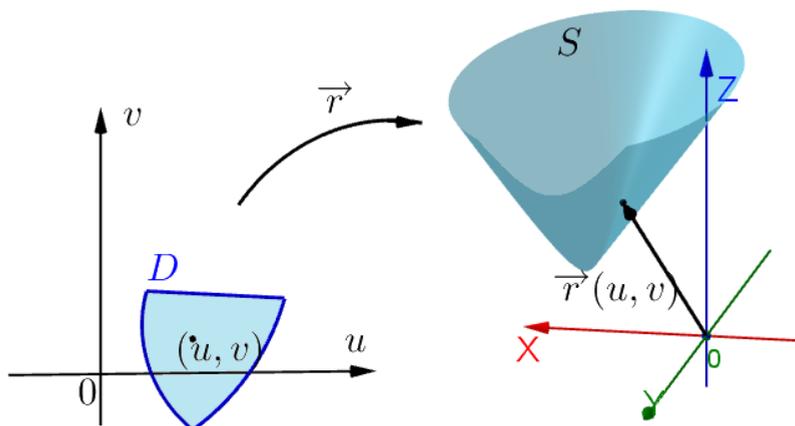


Figura 5.1: Parametrización de una superficie

De esta manera, podemos expresar la superficie en su forma paramétrica

$$S : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}; (u, v) \in D$$

Veamos algunas superficies cuadráticas conocidas con sus respectivas parametrizaciones.

❶ **El cilindro circular recto** $x^2 + y^2 = a^2$.

Una parametrización para esta superficie está dada por

$$\vec{r}(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v); \text{ donde } 0 \leq u \leq 2\pi, -\infty < v < +\infty$$

Pues se satisface $x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 u = a^2$ y $v \in \mathbb{R}$.

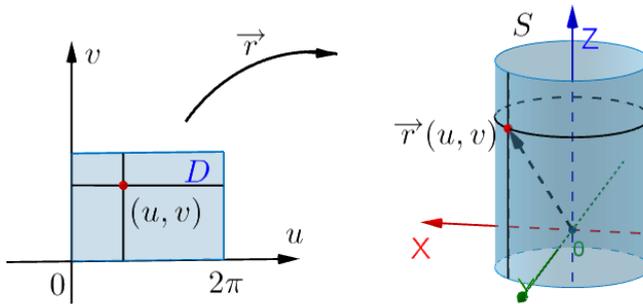


Figura 5.2: Parametrización de un cilindro

En general, si tenemos el cilindro elíptico: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, entonces podemos considerar la parametrización

$$\vec{r}(u, v) = (a \cos u, b \sin u, v); 0 \leq u \leq 2\pi, -\infty < v < +\infty$$

❷ **La esfera** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con centro en $(0, 0, 0)$ y radio a .

Esta superficie tiene una parametrización definida por

$$\vec{r}(u, v) = (a \cos u \sin v, a \sin u \sin v, a \cos v); \text{ con } 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi$$

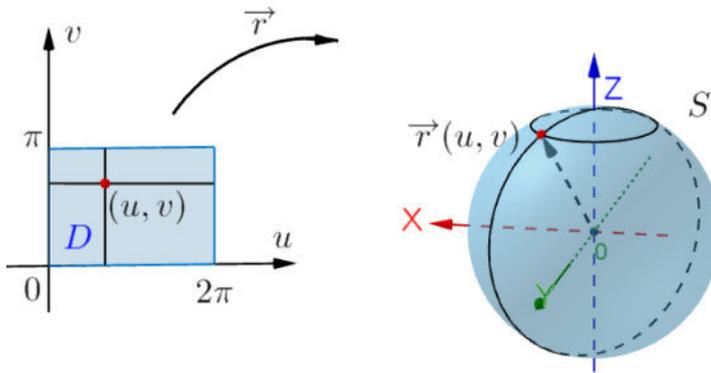


Figura 5.3: Parametrización de una esfera

3 El paraboloides circular $z = x^2 + y^2$.

Una parametrización queda definida por

$$\vec{r}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v^2); \text{ para } 0 \leq u \leq 2\pi, v \geq 0$$

Como $x^2 + y^2 = v^2 \cos^2 u + v^2 \sin^2 u = v^2 = z$.

Para el paraboloides elíptico $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ podemos utilizar la parametrización

$$\vec{r}(u, v) = (au, bv, c(u^2 + v^2)).$$

4 El paraboloides hiperbólico $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

Una parametrización queda definida por

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = c(u^2 - v^2) \end{cases}$$

5 La hoja del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Para la hoja superior de un cono cuyo eje es el eje z , una parametrización es

$$\vec{r}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v); \text{ para } 0 \leq u \leq 2\pi, v \geq 0$$

Ya que $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{v^2 \cos^2 u + v^2 \sin^2 u} = \sqrt{v^2} = v = z$.

En general, sean a, b, c números reales positivos, la ecuación del cono elíptico es

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Considerando $x = av \cos u$, $y = bv \sin u$, $z = cv$, tenemos que

$$\frac{z^2}{c^2} = v^2 = v^2 (\cos^2 u + \sin^2 u) = v^2 \cos^2 u + v^2 \sin^2 u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Por lo tanto, la parametrización es

$$\vec{r}(u, v) = (av \cos u, bv \sin u, cv), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad -\infty < v < +\infty$$

6 La superficie del plano $\mathcal{P} : ax + by + z = d$.

Esta superficie tiene una parametrización definida por

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = d - au - bv \end{cases} ; \text{ para cada } (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

7 La superficie de revolución.

La ecuación de una superficie de revolución S , obtenida al rotar alrededor al eje z una curva que se encuentra en el plano XZ dada por

$$\mathcal{C} : x = f(z), \text{ con } z \in [a, b],$$

es dada por $S : x^2 + y^2 = [f(z)]^2$.

Si $x = f(v) \cos u$, $y = f(v) \sin u$, $z = v$, tenemos que $x^2 + y^2 = [f(z)]^2$.

Luego una parametrización de S es

$$\vec{r}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, v) ; \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad a \leq v \leq b.$$

Observación 11 A la función vectorial \vec{r} la denominaremos representación paramétrica de la superficie S . Notemos que una superficie puede tener más de una representación paramétrica.

5.1.1. Superficie como la gráfica de una función de dos variables

La gráfica de una función también se le denomina la superficie $S : z = f(x, y)$, es decir

$$S = \text{graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\},$$

donde la parametrización es definida por

$$\vec{r}(x, y) = x \vec{i} + y \vec{j} + f(x, y) \vec{k}, \quad (x, y) \in D$$

Luego, si

$$f : \quad D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \rightarrow z = f(x, y)$$

es una función continua en D , la gráfica de f es denotada por $\text{graf}(f)$ y es denominada una superficie S , es decir,

$$S : \vec{r}(x, y) = x \vec{i} + y \vec{j} + f(x, y) \vec{k}, \quad (x, y) \in D$$

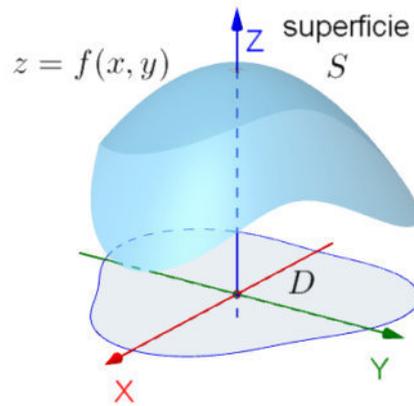


Figura 5.4: Superficie $z = f(x, y)$

Podemos cambiar los parámetros x e y por u y v respectivamente, así la superficie S tiene parametrización

$$\vec{r}(u, v) = u \vec{i} + v \vec{j} + f(u, v) \vec{k}, \quad (u, v) \in D$$

5.1.2. Producto vectorial fundamental área

Suponga que la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ tiene una parametrización

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v) \vec{i} + y(u, v) \vec{j} + z(u, v) \vec{k}; \quad (u, v) \in D$$

que es uno a uno sobre el dominio D . Asumimos que \vec{r} es continuamente diferenciables, es decir, las funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ tienen derivadas parciales continuas sobre D .

En el plano uv , podemos formar una cuadrícula de rectas paralelas a los ejes coordenados. Estas rectas de cuadrículas corresponden, vía \vec{r} , un sistema de curvas de

cuadrículas sobre la superficie. Más precisamente, las rectas verticales y horizontales que pasan por $P = (u_0, v_0)$ en el dominio corresponden a las curvas de cuadrículas $\vec{r}(u, v_0)$ y $\vec{r}(u_0, v)$ que se encuentran en S y se cortan en P .

Consideremos ahora los vectores tangentes a las curvas:

Para $\vec{r}(u, v_0)$

$$\begin{aligned} T_u(P) &= \vec{r}'_u(u_0, v_0) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \\ &= \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \vec{k} \end{aligned}$$

y para $\vec{r}(u_0, v)$

$$\begin{aligned} T_v(P) &= \vec{r}'_v(u_0, v_0) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \\ &= \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \vec{k} \end{aligned}$$

La parametrización \vec{r} se denomina regular en P si el siguiente producto vectorial es diferente de cero

$$\mathbf{n}(P) = \vec{n}(u_0, v_0) = \vec{r}'_u(u_0, v_0) \times \vec{r}'_v(u_0, v_0) = T_u(P) \times T_v(P)$$

El vector

$$\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}$$

también se denomina producto vectorial fundamental de la superficie S , respecto de la parametrización \vec{r} .

En particular, si la superficie es descrita por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), \text{ para } (x, y) \in D\},$$

cuya parametrización es $\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ entonces el producto vectorial es

$$\vec{r}'_x \times \vec{r}'_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \vec{j} + \vec{k}$$

y

$$\|\vec{r}'_x \times \vec{r}'_y\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

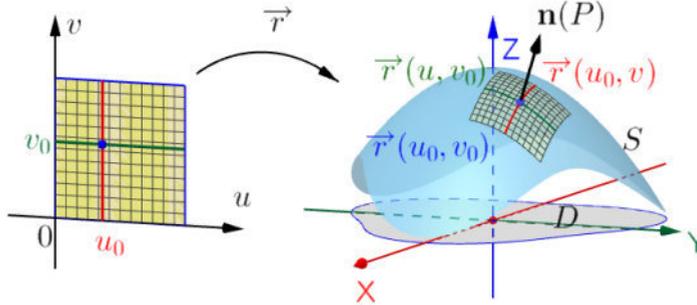


Figura 5.5: Vector normal

Definición 5.2 [Vector normal unitario]

Diremos que N es el vector normal unitario a S , si

$$N = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_v \times \vec{r}_u\|}, \text{ para cada } P = \vec{r}(u, v) \text{ de } S$$

donde $\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ y $\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$.

(N) En lo que sigue, denotaremos el vector normal unitario por $\mathbf{n} = \vec{n} = N$.

Representación geométrica del producto vectorial fundamental

Sea S una superficie regular generada por la función

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v) \vec{i} + y(u, v) \vec{j} + z(u, v) \vec{k}; \quad (u, v) \in D$$

y consideremos en D , el i -ésimo rectángulo D_i de lados Δu_i y Δv_i .

En cada D_i , sea (u_i, v_i) el punto más cercano al origen. En el punto

$$(x_i, y_i, z_i) = (x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))$$

de la superficie S construimos el plano tangente T_i de lados $\Delta u_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ y $\Delta v_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$.

El área de la porción de S , $A(S_i) = \vec{r}(D_i) = \Delta S_i$ se puede aproximar por el

área del paralelogramo del plano tangente, es decir,

$$\begin{aligned} \text{Area}(\vec{r}(D_i)) \approx \Delta S_i \approx \Delta T_i &= \left\| \Delta u_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \Delta v_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \\ &= \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \Delta u_i \Delta v_i. \end{aligned}$$

Luego el área de S es

$$A(S) = \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \Delta u_i \Delta v_i,$$

es decir

$$A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv \quad (5.1)$$

Observación 12 Tengamos en cuenta que

- 1 Si S es la gráfica de la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, es decir,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), \text{ con } (x, y) \in D\}$$

entonces, como sabemos, S puede ser descrita por

$$\vec{r}(x, y) = x \vec{i} + y \vec{j} + f(x, y) \vec{k}$$

de donde se tiene

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x} x \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}$$

en consecuencia

$$\text{Area}(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right\| dx dy = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy \quad (5.2)$$

- 2 Existe otra forma de expresar la fórmula del área de la superficie $S : z = f(x, y)$.

El vector

$$\mathbf{n}(x, y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (5.3)$$

es llamado el vector normal unitario.

Sea $\gamma = \gamma(x, y)$ el ángulo entre $\mathbf{n}(x, y)$ y \vec{k} según la siguiente figura

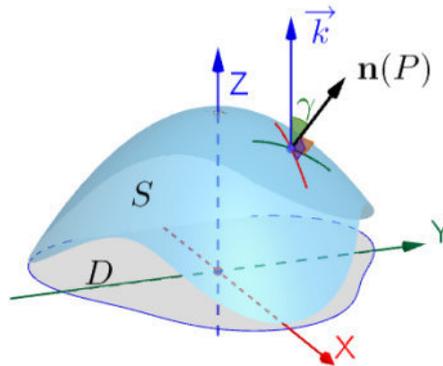


Figura 5.6: Ángulo entre los vectores \mathbf{n} y \vec{k}

Como $\mathbf{n}(x, y)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$ son vectores unitarios, entonces por el ángulo entre dos vectores, obtenemos

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{\mathbf{n}(x, y) \cdot \vec{k}}{\|\mathbf{n}(x, y)\| \|\vec{k}\|} = \mathbf{n}(x, y) \cdot \vec{k} \\ &= \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1\right) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} \end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$\sec \gamma = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

Por lo tanto, el área de S se puede escribir como

$$A(S) = \iint_D \sec \gamma \, dx \, dy.$$

- ③ Si S es el conjunto de nivel de la función $w = F(x, y, z)$ correspondiente a un valor c entonces, suponiendo que F satisface las condiciones del teorema de la función implícita, existe una función $f(x, y)$, tal que $F(x, y, f(x, y)) = c$, además

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

En consecuencia, S puede ser descrita mediante la función vectorial $\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k}$ y por lo tanto el área de S es

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\frac{(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2 + (\frac{\partial F}{\partial z})^2}{|\frac{\partial F}{\partial z}|}} dx dy$$

donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y, f(x, y)) = c\}$.

Ejemplo 5.1

Demuestre que el área de la superficie de la esfera de radio a es igual a $4\pi a^2$.

Solución.

La parametrización de la esfera es

$$\vec{r}(u, v) = (a \cos u \sen v, a \sen u \sen v, a \cos v), \text{ con } 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi$$

Entonces

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) = (-a \sen u \sen v, a \cos u \sen v, 0)$$

y

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) = (a \cos u \cos v, a \sen u \cos v, -a \sen v)$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) &= (-a^2 \cos u \sen^2 v, -a^2 \sen u \sen^2 v, -a^2 \cos v \sen v) \\ &= -a^2 \sen v (\cos u \sen v, \sen u \sen v, \cos v) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right\| &= a^2 \sen v \sqrt{\cos^2 u \sen^2 v + \sen^2 u \sen^2 v + \cos^2 v} \\ &= a^2 \sen v \sqrt{\sen^2 v (\cos^2 u + \sen^2 v) + \cos^2 v} = a^2 \sen v \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área de S es

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv = \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} a^2 \sen v du \right) dv \\ &= 2\pi a^2 \int_0^\pi \sen v dv = 2\pi a^2 (-\cos v) \Big|_0^\pi = 2\pi a^2 (1 + 1) \\ &= 4\pi a^2 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.2

Calcule el área del toro, cuya parametrización es

$$S : \begin{cases} x = (a + b \cos v) \cos u \\ y = (a + b \cos v) \sin u, \text{ con } 0 \leq u, v \leq 2\pi \\ z = b \sin v \end{cases}$$

Solución.

Sea

$$\vec{r}(u, v) = ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v),$$

con $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

Entonces

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) = (-(a + b \cos v) \sin u, (a + b \cos v) \cos u, 0),$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) = (-b \sin v \cos u, -b \sin v \sin u, b \cos v),$$

El producto vectorial de ambos vectores es igual a

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) = (a + b \cos v) (b \cos u \cos v, b \cos v \sin u, b \sin v)$$

y el módulo de este vector, o sea $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right\|$, sigue de

$$\begin{aligned} &= (a + b \cos v) \sqrt{b^2 \cos^2 u \cos^2 v + b^2 \cos^2 u \sin^2 v + b^2 \sin^2 v} \\ &= (a + b \cos v) b \sqrt{\cos^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \sin^2 v} \\ &= (a + b \cos v) b \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área de S es

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv = b \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} (a + b \cos v) du \right) dv \\ &= 2\pi b \int_0^{2\pi} (a + b \cos v) dv = 2\pi b (av + b \sin v) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi b (2\pi a + 0) \\ &= 4\pi^2 ab \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.3

Determine el área de la superficie S de ecuación $z = x^2 + y^2$ que se encuentra limitada por los planos $z = 1$, $z = 3$, $y = x$ y el plano $x = 0$.

Solución.

Sea $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ entonces $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ entonces

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy \\ &= \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \int_{r=1}^{r=\sqrt{3}} \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{4r^2 + 1} r dr \\ &= 12 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) (13\sqrt{13} - 5\sqrt{5}) = 3\pi (13\sqrt{13} - 5\sqrt{5}). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.4

Calcule el área de la superficie de la parte del paraboloides hiperbólico $z = xy$ que se encuentra en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

Solución.

La grafica de la porción del paraboloides hiperbólico $z = xy$ se aprecia en la figura

5.7.

Sea $S : z = f(x, y) = xy$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$

Luego

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy = \iint_D \sqrt{y^2 + x^2 + 1} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \sqrt{r^2 + 1} r dr \right) d\theta = \pi \int_0^a \sqrt{r^2 + 1} 2r dr \\ &= \pi \frac{2}{3} (r^2 + 1)^{3/2} \Big|_0^a = \frac{2\pi}{3} [(a^2 + 1)^{3/2} - 1] \end{aligned}$$

□

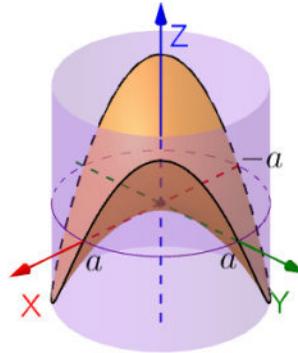


Figura 5.7: Gráfica de la superficie del ejemplo 5.4

Ejemplo 5.5

Calcule el área de la porción de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$ contenida en el cilindro $x^2 + y^2 = 2y$.

Solución.

Consideramos la parametrización

$$S : \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sen v \\ z = (4 - u^2)^{1/2} \end{cases} ; 0 \leq u \leq 2 \sen v, 0 \leq v \leq \pi$$

es decir

$$\vec{r}(u, v) = u \cos v \vec{i} + u \sen v \vec{j} + (4 - u^2)^{1/2} \vec{k}; \text{ con } 0 \leq u \leq 2 \sen v, 0 \leq v \leq \pi$$

entonces

$$\vec{r}_u(u, v) = \cos v \vec{i} + \sen v \vec{j} - \frac{u}{(4 - u^2)^{1/2}} \vec{k}$$

y

$$\vec{r}_v(u, v) = -u \sen v \vec{i} + u \cos v \vec{j} + 0 \vec{k}.$$

Además

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \frac{u^2 \cos v}{(4 - u^2)^{1/2}} \vec{i} + \frac{u^2 \sen v}{(4 - u^2)^{1/2}} \vec{j} + u \vec{k}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 A(S) &= \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dudv = \int_0^\pi \int_0^{2\sin v} \frac{2u}{(4-u^2)^{1/2}} dudv \\
 &= - \int_0^\pi \int_0^{2\sin v} (4-u^2)^{-1/2} (-2udu) dv = - \int_0^\pi 2(4-u^2)^{1/2} \Big|_0^{2\sin v} dv \\
 &= -2 \int_0^\pi (2\cos v - 2) dv = -4(\sin v - 2v) \Big|_0^\pi = -4(0 - 2\pi) \\
 &= 8\pi
 \end{aligned}$$

□

Observación 13 En relación al ejemplo 5.5, una forma alternativa de resolver la situación planteada se basa en considerar la superficie, que es parte de la esfera, descrita mediante la parametrización

$$\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + (4 - x^2 - y^2)^{1/2}\vec{k}$$

y dado que está dentro del cilindro entonces $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$ es la región de integración.

5.2 Integral de superficie de campos escalares

Como ya se ha mencionado al inicio de la sección anterior, las integrales de superficie son similares a las integrales de línea, de modo que, también se estudian dos tipos de integrales de superficie: integrales de superficie de funciones escalares, que se analizan en este apartado e integrales de superficie de campos vectoriales, que veremos posteriormente. La integral de superficie de un campo escalar es una generalización simple de una integral doble.

Definición 5.3 [Integral de superficie de un campo escalar]

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie continuamente diferenciable, regular e inyectiva, parametrizada por

$$S: \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}, \text{ para } (u, v) \in D$$

y sea $f: S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar acotado en S . La integral de superficie de f sobre S , denotada por $\iint_S f dS$, se define mediante

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| dudv$$

cuando la integral del segundo miembro existe.

Observación 14 Tener en cuenta que

- 1 Como sabemos, la gráfica de $z = g(x, y)$ es una superficie, donde

$$\text{graf}(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = g(x, y), (x, y) \in D\} = \vec{r}(D),$$

donde $\vec{r}(x, y) = (x, y, g(x, y)), \forall (x, y) \in D$, entonces

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS &= \iint_D f(\vec{r}(x, y)) \|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\| dA \\ &= \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1} dA \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned} \|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\| &= \|(1, 0, g_x) \times (0, 1, g_y)\| = \|(-g_x, -g_y, 1)\| \\ &= \sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1} \end{aligned}$$

- 2 Si la proyección D de la superficie $S : y = g(x, z)$, está en el plano XZ , entonces

$$\iint_S f dS = \iint_{D_{xz}} f(x, g(x, z), z) \sqrt{(g_x)^2 + (g_z)^2 + 1} dA.$$

- 3 Si la proyección D de la superficie $S : x = g(y, z)$, está en el plano YZ , entonces

$$\iint_S f dS = \iint_{D_{yz}} f(g(y, z), y, z) \sqrt{(g_y)^2 + (g_z)^2 + 1} dA.$$

Ejemplo 5.6

Evalúe $\iint_S f(x, y, z) dS$, donde

$$S : \vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 5$$

$$\text{y } f(x, y, z) = z(x^2 + y^2).$$

Solución.

Por un lado tenemos que

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (\cos v, \sin v, 1) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-u \sin v, u \cos v, 0).$$

En el mismo orden de las cosas, $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-u \cos v, -u \sin v, u)$ y

$$\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = \sqrt{u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v + u^2} = \sqrt{2u^2} = \sqrt{2}u$$

entonces

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS &= \iint_D f(\vec{r}(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv \\ &= \iint_D f(u \cos v, u \sin v, u) \sqrt{2}u du dv \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 \int_0^5 u (u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v) u dv du \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 \left(u^4 \int_0^5 dv \right) du = 5\sqrt{2} \int_0^1 u^4 du \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.7

Calcule $\iint_S (xy + 2z) dS$, donde S es la porción del triángulo de la figura 5.8.

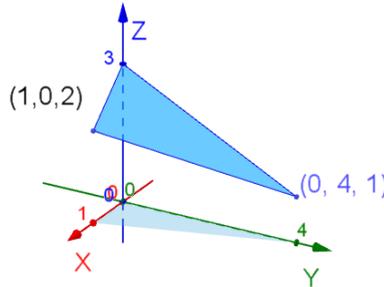


Figura 5.8: Superficie S del ejemplo 5.7

Solución.

Sean los vectores

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 0, 2) - (0, 0, 3) = (1, 0, -1), \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0, 4, 1) - (0, 0, 3) = (0, 4, -2)$$

y $\vec{u} \times \vec{v} = 2(2, 1, 2)$ entonces

$$\mathcal{P} : [(x, y, z) - (0, 0, 3)] \cdot (2, 1, 2) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{P} : 2x + y + 2z = 6$$

Sea $z = g(x, y) = 3 - x - \frac{1}{2}y$

$$\begin{aligned} \iint_S (xy + 2z) dS &= \iint_D f((x, y, g(x, y))) \|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\| dA \\ &= \iint_D (xy + 2g(x, y)) \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} dA \\ &= \iint_D \left(xy + 2 \left(3 - x - \frac{1}{2}y \right) \right) \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} dA \\ &= \frac{3}{2} \iint_D (xy + 6 - 2x - y) dA \end{aligned}$$

La región D se encuentra en el plano XY , según la figura $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 4 - 4x \end{cases}$.

Entonces

$$\begin{aligned}
 \iint_S (xy + 2z) dS &= \int_0^1 \left(\int_0^{4-4x} (xy + 6 - 2x - y) dy \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} + 6y - 2xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{4-4x} dx \\
 &= \int_0^1 (8x^3 - 16x^2 - 8x + 16) dx \\
 &= \left(2x^4 - \frac{16}{3}x^3 - 4x^2 + 16x \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{26}{3}.
 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.8

Evalúe $\iint_S (x + y + z) dS$, donde S es la superficie cuya parametrización está dada por $\vec{r}(u, v) = (2u + v, u - 2v, u + 3v)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2$.

Solución.

Como

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) = (2, 1, 1), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) = (1, -2, 3)$$

y

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (2, 1, 1) \times (1, -2, 3) = (5, -5, -5) = 5(1, -1, -1).$$

Luego, para $f(x, y, z) = x + y + z$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 \iint_S f(x, y, z) dS &= \iint_D f(\vec{r}(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv \\
 &= \iint_D f(2u + v, u - 2v, u + 3v) 5\sqrt{3} du dv \\
 &= 5\sqrt{3} \int_0^1 \left(\int_0^2 (4u + 2v) dv \right) du \\
 &= 5\sqrt{3} \int_0^1 \left(\int_0^2 (4uv + v^2) \Big|_0^2 du \right) du \\
 &= 5\sqrt{3} \int_0^1 (8u + 4) du = 5\sqrt{3} (8) = 40\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.9

Evalúe $\iint_S z dS$, donde S está compuesta por las caras del sólido limitado por $z = 1 + x$, $x^2 + y^2 = 1$ y el plano XY que se observa en la figura 5.9.

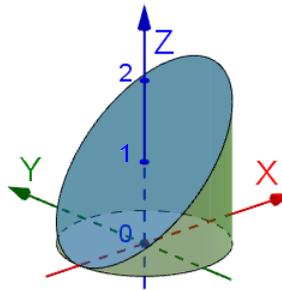


Figura 5.9: Superficie S del ejemplo 5.9

Solución.

Del enunciado se tiene el campo escalar $f(x, y, z) = z$ y, dado que la superficie total del sólido está compuesta por las porciones de los planos y del cilindro circular recto, definimos $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, donde S_1 representa la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, S_2 describe la parte del plano XY , mientras que S_3 personifica el pedazo del plano $z = 1 + x$.

Para S_1 : $x^2 + y^2 = 1$. Usamos θ y z como parámetros y escribimos sus ecuaciones paramétricas como

$$x = \cos \theta, \quad y = \text{sen } \theta, \quad z = z$$

luego $\vec{r}(\theta, z) = (\cos \theta, \text{sen } \theta, z)$, donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq z \leq 1 + x = 1 + \cos \theta$.

Entonces

$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos \theta \vec{i} + \text{sen } \theta \vec{j}$$

Así, la integral de superficie es

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} z dS &= \iint_D z \|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z\| dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} z dz d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi\end{aligned}$$

Para S_2 : $z = 0$. Tenemos que $\iint_{S_2} z dS = \iint_{S_2} 0 dS = 0$.

Para S_3 . Consideramos la parte del plano $z = g(x, y) = 1 + x$ que se encuentra en el disco unitario $x^2 + y^2 \leq 1$. Luego

$$\begin{aligned}\iint_{S_3} z dS &= \iint_D f(\vec{r}(x, y)) \|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\| dA = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} dA \\ &= \iint_D g(x, y) \sqrt{1 + 0 + 1} dA = \sqrt{2} \iint_D (1 + x) dA \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + r \cos\theta) r dr d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} \cos\theta \right) \Big|_0^1 d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos\theta \right) d\theta = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{3} \sin\theta \right) \Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\iint_S f(x, y, z) dS &= \iint_{S_1} f(x, y, z) dS + \iint_{S_2} f(x, y, z) dS + \iint_{S_3} f(x, y, z) dS \\ &= \frac{3}{2}\pi + 0 + \sqrt{2}\pi = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2} \right) \pi\end{aligned}$$

□

5.2.1. Masa de una lámina

Consideremos el problema del cálculo de la masa total de una lámina que adopta la forma de una porción de una superficie S . Supongamos que la lámina es muy delgada y que su densidad no es constante, es decir, imaginemos una función densidad $\rho: S \rightarrow \mathbb{R}$, definida sobre la superficie, de modo que a cada $(x, y, z) \in S$ le asocia el número real positivo $\rho(x, y, z)$, que proporciona el valor de la densidad de la lámina en el punto (x, y, z) , medida en unidades de masa por unidad de área. Entonces la masa total de la lámina se establece en la siguiente definición.

Definición 5.4 [Masa de una lámina]

Sean S una superficie parametrizada por la función

$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

y $\rho : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y positiva definida sobre la superficie S , llamada función densidad. Si S modela una lámina delgada, entonces la masa total de la lámina se define como

$$m(S) = \iint_S \rho(x, y, z) dS. \quad (5.4)$$

Ejemplo 5.10

Calcule la masa de la superficie S de la figura mostrada, si su densidad es dada

$$\text{por } \rho(x, y, z) = \frac{z + x^2}{\sqrt{1 + 4x^2}}.$$

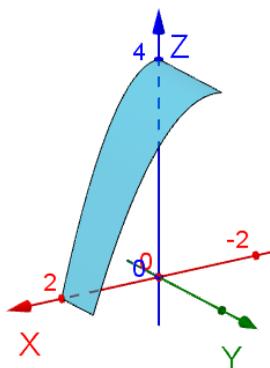


Figura 5.10: Superficie S del ejemplo 5.10

Solución.

De la figura tenemos que la superficie es $S : z = g(x, y) = 4 - x^2$.

Entonces

$$\begin{aligned} m(S) &= \iint_S \rho(x, y, z) dS = \iint_D \rho(x, y, g(x, y)) \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} dA \\ &= \iint_D \frac{(4-x^2) + x^2}{\sqrt{1+4x^2}} \sqrt{4x^2 + 0 + 1} dA = \iint_D 4 dA = 4 \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{4-x}{2}} dy \right) dx \\ &= 4 \int_0^2 \frac{4-x}{2} dx = 2 \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = 2(8-2) = 12 \end{aligned}$$

donde $D : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{4-x}{2}$.

□

Ejemplo 5.11

Calcule la masa de una lámina que adopta la forma de un hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, sabiendo que la densidad de masa es directamente proporcional a la distancia del punto $P(x, y, z)$ plano XY .

Solución.

La parametrización de la superficie es

$$\vec{r}(u, v) = a \cos u \cos v \vec{i} + a \sin u \cos v \vec{j} + a \sin v \vec{k}$$

con $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

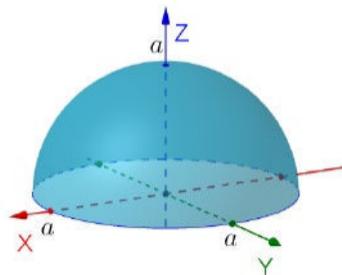


Figura 5.11: Hemisferio superior

Luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) &= (-a \sin u \cos v, a \cos u \cos v, 0) \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) &= (-a \cos u \sin v, -a \sin u \sin v, a \cos v) \end{aligned}$$

y el producto vectorial de ambos, es decir $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v)$, está dado por

$$(a^2 \cos u \cos^2 v, a^2 \cos^2 v \sin u, (\cos v \sin v) a^2 \cos^2 u + (\cos v \sin v) a^2 \sin^2 u)$$

para el cual $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right\| = a^2 \cos v$.

Por otro lado, se sabe que la densidad está dada por

$$\rho(x, y, z) = d(P, z = 0) = d(P(x, y, z), (x, y, 0)) = z.$$

Luego, la masa de la lámina discurre de

$$\begin{aligned} m(S) &= \iint_S \rho(x, y, z) dS = \iint_D \rho(\vec{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dA \\ &= \iint_D \rho(a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v) a^2 \cos v dA \\ &= a^3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \sin v \cos v dv \right) du = 2\pi a^3 \frac{\sin^2 v}{2} \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \pi a^3 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.12

Dada la superficie $S : x^2 + z^2 = 1$, limitada por los planos $y = 3 + z$ y $y = 0$.

- Calcule su área.
- Determine su masa, si S es una lámina delgada, cuya densidad en cada punto de ella está dada por

$$\rho(x, y, z) = x^2 + 2y + z^2.$$

Solución.

La superficie es un cilindro cuyo eje de simetría es el eje Y , y que es cortado por los planos $y = 0$ y $y = 3 + z$.

Entonces la parametrización de S es

$$\vec{r}(u, v) = (\cos u, v, \sin u) ; 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 3 + \sin u.$$

$$\text{a) } \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (-\operatorname{sen} u, 0, \cos u), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (0, 1, 0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-\cos u, 0, -\operatorname{sen} u)$$

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dudv = \iint_D dudv = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{3+\operatorname{sen} u} dv \right) du \\ &= \int_0^{2\pi} (3 + \operatorname{sen} u) du = (3u - \cos u) \Big|_0^{2\pi} = 6\pi \end{aligned}$$

b) La masa total de la lámina es

$$\begin{aligned} m(S) &= \iint_S \rho dS = \iint_D \rho(\vec{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dudv \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{3+\operatorname{sen} u} \rho(\cos u, v, \operatorname{sen} u) dv \right) du \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{3+\operatorname{sen} u} (1 + 2v) dv \right) du \\ &= \int_0^{2\pi} (v + v^2) \Big|_0^{3+\operatorname{sen} u} du = \int_0^{2\pi} \left(\frac{25}{2} + 7 \operatorname{sen} u - \frac{1}{2} \cos 2u \right) du \\ &= \left(\frac{25}{2} u - 7 \cos u - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2u) \right) \Big|_0^{2\pi} = 25\pi. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.13

Una lámina delgada S tiene la forma de la parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, con $y \geq 0$. Si su densidad en cada punto (x, y, z) de S es definida por $\delta(x, y, z) = xy$.

- Calcule el área de S
- Determine la masa de S .

Solución.

a) Como la superficie $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entonces el área de la superficie es

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dS = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dA \\ &= \sqrt{2} \iint_D dA = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2 \cos \theta} r dr \right) d\theta = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 2\sqrt{2} \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \end{aligned}$$

b) La masa de la superficie S es

$$\begin{aligned} m(S) &= \iint_S \delta(x, y, z) dS = \iint_D xy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dA = \sqrt{2} \iint_D xy dA \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \left(\int_0^{2 \cos \theta} r^3 dr \right) d\theta = 4\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta \sin \theta d\theta \\ &= 4\sqrt{2} \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{2}{3} \sqrt{2} \end{aligned}$$

□

5.2.2. Problemas propuestos

5.1 Sea $\vec{r}(u, v) = (2u + 1, u - v, 3u + v)$ y $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 1\}$

a) Demuestre que \vec{r} parametriza al plano $\mathcal{P} : 2x - y - z = 2$.

b) Encuentre el área de $S = \vec{r}(D)$.

c) Evalúe $\iint_S f(x, y, z) dS$, donde $f(x, y, z) = yz$

5.2 Dada la superficie de ecuación vectorial $\vec{r}(u, v) = (v^2, v \cos u, v \sin u)$.

a) Identifique y grafique la superficie S .

b) Calcule el área de la parte de S , cuando $0 \leq v \leq 2$.

5.3 Calcule el área de la porción de superficie

$$\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v); 0 \leq v \leq 2\pi, 0 \leq u \leq 1.$$

5.4 Evalúe $\iint_S (z - x) dS$, donde S es la porción del gráfico de $z = x + y^2$, donde $0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1$

5.5 Determine el área de la porción del plano $x + 2y + 2z = 5$ recortada por los cilindros $x = y^2$ y $x = 2 - y^2$.

5.6 Calcule $\iint_S (x^2 + z^2) dS$, donde S es la parte del paraboloido: $y = 1 - x^2 - z^2$ que se proyecta sobre $D = \{(x, z) : 0 \leq x^2 + z^2 \leq 1\}$.

5.7 Determine el área de la porción del plano $2x + 3y + 6z = 60$ ubicado en el interior del cilindro circular $x^2 + y^2 = 2x$.

5.8 Evalúe la integral de superficie $\iint_S \frac{dS}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$, donde S es la superficie del

elipsoide $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = 1$.

5.9 Calcule el área de superficie de la porción del paraboloido $z = x^2 + y^2$ definido sobre el conjunto

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

5.10 Determine el área de la parte

- a) del cono $\vec{r}(u, v) = (au \cos v, au \sin v, au)$ con $0 \leq u \leq b$, $0 \leq v \leq 2\pi$.
- b) del plano $P: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $a > 0$, $b > 0$; $c > 0$, que se encuentra en el primer octante.
- c) del paraboloido $x = y^2 + z^2$ que está dentro del cilindro $y^2 + z^2 = 9$.
- d) de la superficie $y = 4x + z^2$ que está entre los planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

5.11 Calcule la integral $\iint_S (x + y + z) dS$, donde S es la superficie parametrizada

$$\vec{r}(u, v) = (u + v, u - v, 1 + 2u + v); 0 \leq v \leq 1, 0 \leq u \leq 2.$$

5.12 Calcule la siguiente integral de superficie $\iint_S yz dS$, donde S está parametrizada por

$$r(u, v) = (u \cos v; u \sin v; v) \text{ para } 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi.$$

5.13 Evalúe la integral de superficie

$$\iint_S (x^4 y + y^2 z^2 + xz^2) dS,$$

donde S es toda la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

5.14 Calcule la siguiente integral de superficie

$$\iint_S \frac{1}{x + y + 1} dS,$$

donde S es una porción del plano $x + y + z = 5$ ubicada en el primer octante.

5.15 Sea S la porción de la gráfica $z = 4 - 2x^2 - 3y^2$ que se encuentra sobre el plano XY y delimitada por $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 1$. Si al modelar la integral de superficie $\iint_S (x^2 + y^2 + z) dS$ como una integral doble iterada se obtiene

$$\iint_S (x^2 + y^2 + z) dS = \int_a^b \int_a^{g(x)} h(x, y) \sqrt{cx^2 + dy^2 + 1} dy dx$$

entonces el valor de $\int_a^b \int_c^d h(x, y) dy dx$ es.

5.16 Calcule la siguiente integral de superficie $\iint_S (xy + z) dS$, donde S es la porción superior de la superficie cónica $z^2 = x^2 + y^2$, recortada por la superficie de ecuación $x^2 + y^2 = 4x$.

5.17 Calcule la integral $\iint_S x \, dS$, donde S es la gráfica de la función $z = x^2 + y$ definida sobre el conjunto

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$$

5.18 Calcule la integral de superficie $\iint_S (xyz^2) \, dS$, donde S es la porción del cilindro $y = 2x^2 + 1$, en el primer octante, limitado por los planos $x = 0$, $x = 2$, $z = 4$ y $z = 8$.

5.19 Calcule la integral $\iint_S x \, dS$, donde S es el triángulo, en el primer octante, cuyos vértices son $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

5.20 Dada la superficie S que es la parte del plano $\mathcal{P} : x + y + z = 3$ que está contenida en el cilindro $x^2 + y^2 = 25$. Si S es una lámina delgada, con densidad $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$. Calcule la masa de dicha lámina.

5.21 Una lámina metálica muy delgada adopta la forma de la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, definida para $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. Si la densidad de esta lámina, medida de gramos por centímetro cúbico, está dada por la función $\rho(x, y, z) = x^2 z$ determine la masa de dicha lámina.

5.22 Determine la masa total de la superficie dada por la parte del plano $z = 5 + y$, que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 16$, si la densidad superficial de la misma, está dada por la función $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

5.23 Una lámina metálica muy delgada adopta la forma de la porción del paraboloides $z = x^2 + y^2$, definido para $0 \leq z \leq 4$. Si la densidad de esta lámina, medida de gramos por centímetro cúbico, está dada por la función $\rho(x, y, z) = \frac{1}{1 + 4(x^2 + y^2)}$ determine la masa de dicha lámina.

5.24 Una placa metálica adopta la forma de la porción de una superficie S modelada por

$$\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v); \quad 0 \leq v \leq 2\pi, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Si la densidad, medida de gramos por centímetro cúbico, en cada punto $P(x, y, z)$ de S es numéricamente igual al doble de la distancia de P al eje Z , determine la masa de dicha lámina.

5.3 Integral de superficie de campos vectoriales

Una motivación bastante intuitiva para definir integrales de superficie de campos vectoriales es la inquietud de querer entender cómo encontrar la masa de un fluido que pasa a través de una superficie en una cierta dirección y por cada unidad de tiempo, por ejemplo la cantidad de agua que atraviesa una red de pesca. Si F es el campo de fuerza que está relacionado con la velocidad y la densidad del fluido que fluye a través de la superficie, entonces una medida del flujo total o flujo a través de la superficie viene dada por la integral de superficie de dicho campo.

5.3.1. Superficie orientable

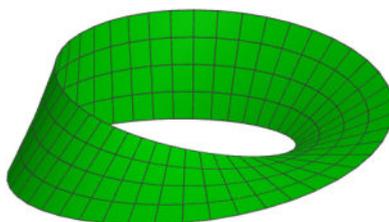
Una superficie en \mathbb{R}^3 es orientable si se puede definir un campo de vectores normales unitarios (en dirección perpendicular a la superficie) de forma continua en toda la superficie.

Así por ejemplo, la superficie de una esfera es orientable porque se puede definir una normal que apunte hacia afuera (o hacia adentro) de manera continua en todos sus puntos.

Por supuesto, existen superficies que no son orientables, por ejemplo la botella de Klein y la banda de Möbius son superficies no orientables.



(a) Botella de Klein



(b) Banda de Möbius

Figura 5.12: Superficies que no son orientables

Definición 5.5 [Superficie orientable]

Diremos que S es una superficie orientable, si en todo punto de S que no sea un punto frontera puede hallarse un vector normal unitario N de manera tal que los vectores normales varían continuamente sobre la superficie S .

Si la superficie S es suave y orientable cuya parametrización es dada por

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v) \vec{i} + y(u, v) \vec{j} + z(u, v) \vec{k},$$

los vectores unitarios normales a S son definidos por

$$N = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_v \times \vec{r}_u\|}.$$

En este caso, dichos vectores apuntan hacia arriba de S .

Una superficie orientable S tiene dos caras. Así, cuando se orienta una superficie, se elige uno de los dos vectores unitarios normales posibles. Si S es una superficie cerrada, como por ejemplo una esfera, se acostumbra escoger como vector unitario normal N , el que apunta hacia fuera de la esfera.

Las superficies más comunes, como esferas, paraboloides, elipses y planos, etc. son orientables. En una superficie orientable, el vector gradiente proporciona una manera adecuada de hallar un vector unitario normal. Es decir, en una superficie orientable S dada por

$$z = g(x, y)$$

se hace $G(x, y, z) = z - g(x, y)$. Entonces, S puede orientarse, ya sea por el vector unitario normal

$$N = \frac{\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|} = \frac{-g_x(x, y) \vec{i} - g_y(x, y) \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}$$

que es el vector normal unitario hacia arriba tal como se visualiza en la figura 5.13.

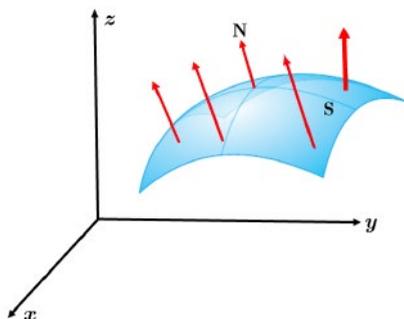


Figura 5.13: Orientación de S hacia arriba

o por el vector normal unitario

$$N = \frac{-\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|} = \frac{g_x(x, y)\vec{i} + g_y(x, y)\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}$$

que representa al vector normal unitario hacia abajo como se muestra en la figura 5.14.

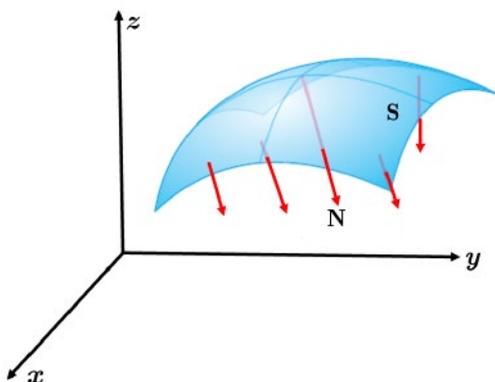


Figura 5.14: Orientación de S hacia abajo

5.3.2. Integrales de superficie de un campo vectorial

Con la idea de superficies orientables implementada, ahora estamos listos para definir una integral de superficie de un campo vectorial. La definición es análoga a la definición del flujo de un campo vectorial a lo largo de una curva plana. Asimismo, mostraremos un procedimiento para integrar campos vectoriales a lo largo de superficies.

Definición 5.6 [Integral de superficie de un campo vectorial]

Sea S contenido en \mathbb{R}^3 una superficie suave cuya parametrización es descrita por la función $\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde D es una región acotada en el plano, y sea \vec{F} un campo vectorial continuo cuyo dominio incluye a $S = \vec{r}(D)$. Entonces la integral de superficie del campo vectorial \vec{F} a lo largo de S , denotada por $\iint_S \vec{F} \cdot dS$, es definida por

$$\iint_S \vec{F} \cdot dS = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v \, dudv. \quad (5.5)$$

Al igual que con las integrales de línea, se recomienda tener cuidado con la notación de integrales de superficie. En la integral de superficie vectorial $\iint_S \vec{F} \cdot dS$, el término diferencial debe considerarse una cantidad vectorial, mientras que en la integral de superficie escalar $\iint_S f \, dS$, el término diferencial es una cantidad escalar (es decir, el diferencial de área de superficie).

Como es el caso de las integrales de línea de campos vectoriales y escalares, existe una conexión entre las integrales de superficie de campos vectoriales y escalares.

Supongamos que $\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización suave de la superficie y \vec{F} es continua en $S = \vec{r}(D)$. Sea $N = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ el vector normal y sea

$$\vec{n}(u, v) = \frac{N(u, v)}{\|N(u, v)\|} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$$

Es decir, \vec{n} es el vector unitario que apunta en la misma dirección que N .

Observemos que si S es dado por una función vectorial $\vec{r}(u, v)$, entonces de la definición 5.6 tenemos

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot dS &= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v \, dudv \\ &= \iint_S \vec{F} \cdot (\vec{n}(u, v) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|) \, dudv \\ &= \iint_D \left[\vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \right] \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, dudv, \end{aligned}$$

Es decir

$$\iint_S \vec{F} \cdot dS = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS. \quad (5.6)$$

Como \vec{n} es un vector unitario, la cantidad $\vec{F} \cdot \vec{n}$ es precisamente la componente de \vec{F} en la dirección de \vec{n} . En otras palabras, la fórmula (5.6) nos dice que la integral

de superficie vectorial de \vec{F} a lo largo de S es la integral de superficie escalar de la componente de \vec{F} normal a $S = \vec{r}(D)$.

Ejemplo 5.14

Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, 0)$, S es la superficie cuya parametrización es definida por

$$\vec{r}(u, v) = (u^2 - 2v, u + v, v^2 - u) ; 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2$$

y \vec{n} es la normal exterior a S .

Solución.

Como $\vec{r}_u = (2u, 1, -1)$, $\vec{r}_v = (-2, 1, 2v)$ y

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (2v + 1, 2 - 4uv, 2u + 2).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v \, dudv \\ &= \iint_D \vec{F}(u^2 - 2v, u + v, v^2 - u) \cdot (2v + 1, 2 - 4uv, 2u + 2) \, dudv \\ &= \int_0^2 \int_0^1 (u + v, v^2 - u, 0) \cdot (2v + 1, 2 - 4uv, 2u + 2) \, dudv \\ &= \int_0^2 \int_0^1 (4u^2v - 4uv^3 + 2uv - u + 4v^2 + v) \, dudv \\ &= \int_0^2 \left(4v^2 + \frac{10}{3}v - 2v^3 - \frac{1}{2} \right) dv = \frac{25}{3} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.15

Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot dS$, donde $\vec{F} = (x, y, z)$ y S es la elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Solución.

La parametrización del elipsoide es

$$\vec{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u), \text{ donde } 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi$$

Entonces

$$\begin{aligned}\vec{r}_u \times \vec{r}_v &= (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, -c \sin u) \times (-a \sin u \sin v, b \sin u \cos v, 0) \\ &= (bc \sin^2 u \cos v, ac \sin^2 u \sin v, ab \sin u \cos u)\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\iint_S \vec{F} \cdot dS = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v du dv.$$

El producto escalar de los vectores involucrados en la integral de superficie se calcula como sigue

$$\begin{aligned}(a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u) \cdot (bc \sin^2 u \cos v, ac \sin^2 u \sin v, ab \sin u \cos u) \\ = \sin^3 u \cos^2 v + \sin^3 u \sin^2 v + \sin u \cos^2 u.\end{aligned}$$

Así la integral queda como

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot dS &= \iint_D du dv \\ &= abc \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin^3 u \cos^2 v + \sin^3 u \sin^2 v + \sin u \cos^2 u) du dv \\ &= abc \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin^3 u + \sin u \cos^2 u) du dv \\ &= abc \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \sin u du \right) dv \\ &= 2\pi abc \left(\int_0^\pi \sin u du \right) = 4\pi abc\end{aligned}$$

□

Teorema 5.1

Sea S una superficie dada por $z = g(x, y)$ y sea D su proyección sobre el plano XY . Entonces

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot dS &= \iint_S \vec{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_D \vec{F}(x, y, g(x, y)) \cdot (\vec{r}_x \times \vec{r}_y) \, dA \\ &= \iint_D \vec{F}(x, y, g(x, y)) \cdot (-g_x, -g_y, 1) \, dA\end{aligned}$$

si los vectores normales apuntan hacia afuera. Además

$$\iint_S \vec{F} \cdot dS = \iint_D \vec{F}(x, y, g(x, y)) \cdot (g_x, g_y, -1) \, dA$$

si los vectores normales apuntan hacia el interior de S .

En la primera integral, la superficie está orientada hacia arriba, y en la segunda integral, la superficie está orientada hacia abajo.

Prueba 5.1 Como sabemos la gráfica de $z = g(x, y)$ es la superficie S , cuya parametrización canónica está dada por

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, g(x, y)), \quad (x, y) \in D.$$

De lo anterior sigue que $\vec{r}_x = (1, 0, g_x)$, $\vec{r}_y = (0, 1, g_y)$ y $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (-g_x, -g_y, 1)$. Luego, si $\vec{F} = (P, Q, R)$ entonces obtenemos

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot dS &= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(x, y)) \cdot \vec{r}_x \times \vec{r}_y \, dA \\ &= \iint_D (P, Q, R) \cdot (-g_x, -g_y, 1) \, dA \\ &= \iint_D [P(-g_x) + Q(-g_y) + R] \, dx dy.\end{aligned}$$

■

(N) Si $S : z = g(x, y) \leftrightarrow S : G(x, y, z) = 0$ entonces

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D \vec{F}(x, y, z) \cdot \frac{\nabla G}{G_z} \, dA$$

$$\text{donde } \nabla G = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right).$$

En forma análoga, tenemos el siguiente resultado

Teorema 5.2

- a) Si la proyección D de la superficie $S : y = g(x, z)$, está en el plano XZ , entonces

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(x, z)) \cdot \vec{r}_x \times \vec{r}_z dA \\ &= \iint_D [P(g_x) - Q + R(g_z)] dx dz,\end{aligned}$$

donde $\vec{r}(x, z) = (x, g(x, z), z)$, $\vec{r}_x = (1, g_x, 0)$, $\vec{r}_z = (0, g_z, 1)$ y $\vec{r}_x \times \vec{r}_z = (g_x, -1, g_z)$.

- b) Si la proyección D de la superficie $S : x = g(y, z)$, está en el plano YZ , entonces

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(g(y, z), y, z) \cdot \vec{r}_y \times \vec{r}_z dA$$

Ejemplo 5.16

Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (4xz, yz^3, z^2)$ y $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$, para $1 \leq z \leq 2$ y $x, y \geq 0$.

Solución.

De la ecuación de S definimos $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ para la cual $\nabla G = (2x, 2y, 2z)$

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint_D \vec{F}(x, y, z) \cdot \frac{\nabla G}{G_z} dA = \iint_D (4xz, yz^3, z^2) \cdot \frac{(2x, 2y, 2z)}{2z} dA \\ &= \iint_D (4x, yz^2, z) \cdot (x, y, z) dA \\ &= \iint_D (4x^2 + y^2(4 - x^2 - y^2) + 4 - x^2 - y^2) dA.\end{aligned}$$

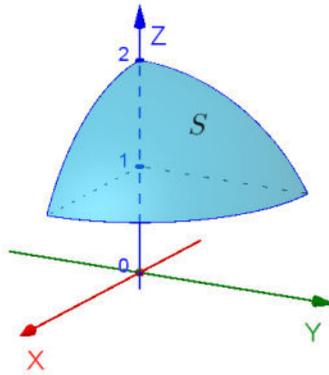


Figura 5.15: Porción de esfera del ejemplo 5.16

Al expresar la integral doble en coordenadas polares se tiene

$$\begin{aligned}
 \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{3}} (4r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta (4 - r^2) + 4 - r^2) r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{3}} (4r^3 \cos^2 \theta + (4r^3 - r^5) \sin^2 \theta + 4r - r^3) \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \left(9 \cos^2 \theta + \frac{9}{4} \sin^2 \theta + \frac{15}{4} \right) d\theta \\
 &= \left[\frac{9}{2} \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + \frac{9}{4} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + \frac{15}{4} \theta \right] \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{21}{4} \pi
 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.17

Sea S la parte de la superficie $z = x^2 + y^2$ abajo del disco unitario, y sea $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$

Solución.

La parametrización de la superficie $S : z = g(x, y) = x^2 + y^2$ está dada por

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, g(x, y)) = (x, y, x^2 + y^2).$$

Además, $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z) = (P, Q, R)$ y $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D [P(-g_x) + Q(-g_y) + R] \, dx \, dy \\ &= \iint_D [x(-2x) + y(-2y) + x^2 + y^2] \, dx \, dy = - \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2) \, r \, dr \, d\theta = -2\pi \left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.18

Evalúe $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (y, x, z)$, y S es la frontera de la región sólida E encerrada por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.

Solución.

La superficie $S = S_1 \cup S_2$ se visualiza en la siguiente figura

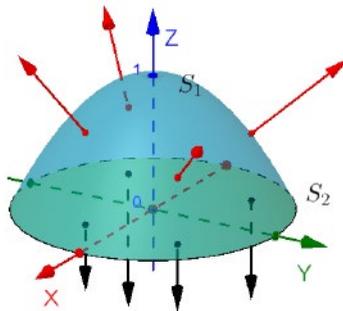


Figura 5.16: Porción del paraboloide S

Sobre $S_1 : z = g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ entonces $g_x(x, y) = -2x$ y $g_y(x, y) = -2y$.
Luego

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_D [P(-g_x) + Q(-g_y) + R] \, dA \\
 &= \iint_D [y(2x) + x(2y) + 1 - x^2 - y^2] \, dA \\
 &= \iint_D [y(2x) + x(2y) + 1 - x^2 - y^2] \, dA \\
 &= \iint_D (1 + 4xy - x^2 - y^2) \, dA \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 4r^2 \sin \theta \cos \theta - r^2) r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \sin \theta \cos \theta \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{4} (2\pi) + 0 = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Sobre $S_2 : z = 0$, el vector normal unitario es $\vec{n} = -\vec{k}$, entonces

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot (-\vec{k}) \, dS = \iint_{S_2} (y, x, z) \cdot (0, 0, -1) \, dS = \iint_D (-z) \, dA = 0.$$

Finalmente

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

□

5.3.3. Integrales de flujo

Una de las aplicaciones principales que emplean la forma vectorial de una integral de superficie se refiere al flujo de un fluido a través de una superficie S .

Supóngase que una superficie orientada S se sumerge en un fluido que tiene un campo de velocidad continua \vec{F} . Sea ΔS el área de una pequeña porción de la superficie S sobre la cual \vec{F} es casi constante. Entonces la cantidad de fluido que atraviesa esta región por unidad de tiempo se aproxima mediante el volumen de la columna de altura $\vec{F} \cdot N$, que se muestra en la figura siguiente. Es decir,

$$\Delta V = (\text{altura}) (\text{área de la base}) = (\vec{F} \cdot N) \Delta S.$$

Por consiguiente, el volumen del fluido que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo, llamada el *flujo de \vec{F} a través de S* , está dado por la integral de superficie de la definición siguiente.

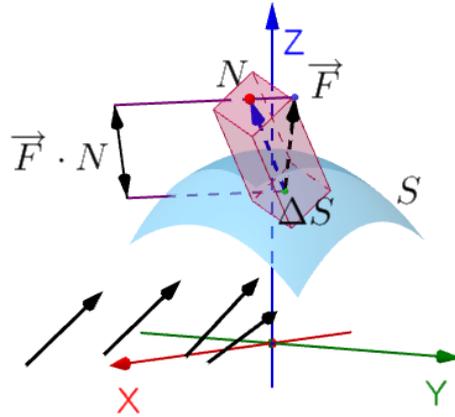


Figura 5.17: Dirección de flujo del fluido dado por el campo de velocidad

Definición 5.7 [Integral de flujo]

Sea $\vec{F}(x, y, z) = (P, Q, R)$, donde P, Q y R tienen primeras derivadas parciales continuas sobre la superficie S orientada mediante un vector unitario normal N . La **integral de flujo de \vec{F} a través de S** está dada por

$$\iint_S \vec{F} \cdot N dS. \quad (5.7)$$

Geoméricamente, una integral de flujo es la integral de superficie sobre S de la componente normal de \vec{F} . Si $\rho(x, y, z)$ es la densidad del fluido en (x, y, z) , la integral de flujo $\iint_S \vec{F} \cdot N dS$ representa la masa del fluido que fluye a través de S por unidad de tiempo.

Otra forma equivalente es decir que la *razón de flujo a través de una superficie*, para un fluido con velocidad el campo vectorial \mathbf{v} es:

$$\text{La razón de flujo a través de } S = \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

medido en unidades de volumen por unidad de tiempo que se interpreta físicamente como la razón de flujo a través de S .

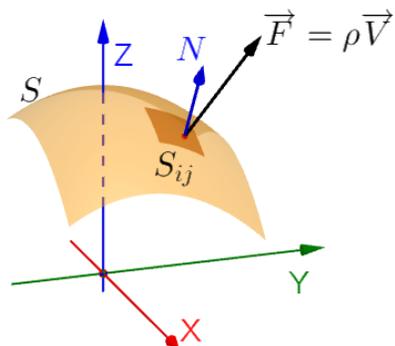


Figura 5.18: Razón de fluido

Ejemplo 5.19

Encuentre el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (z, y, x)$ que cruza la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solución.

Usamos la parametrización de la esfera

$$\vec{r}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u), \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Entonces

$$\vec{F}(\vec{r}(u, v)) = \vec{F}(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) = (\cos u, \sin u \sin v, \sin u \cos v)$$

y

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (\sin^2 u \cos v, \sin^2 u \sin v, \sin u \cos u).$$

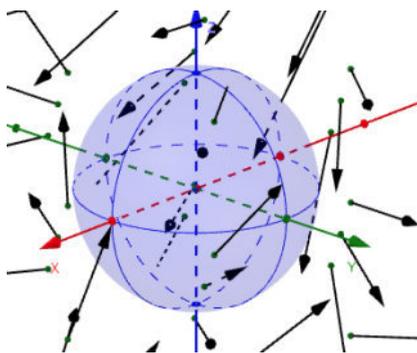


Figura 5.19: Esfera unitaria

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v \, dudv \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\cos u, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \cos v) \cdot (\operatorname{sen}^2 u \cos v, \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \cos u) \, dudv \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\operatorname{sen}^2 u \cos u \cos v + \operatorname{sen}^3 u \operatorname{sen}^2 v + \operatorname{sen}^2 u \cos u \cos v) \, dudv \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (2 \operatorname{sen}^2 u \cos u \cos v + \operatorname{sen}^3 u \operatorname{sen}^2 v) \, dudv \\
 &= \int_0^\pi 2 \operatorname{sen}^2 u \cos u \, du \int_0^{2\pi} \cos v \, dv + \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 u \, du \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 v \, dv \\
 &= 0 + \int_0^\pi (1 - \cos^2 u) \operatorname{sen} u \, du \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2v}{2} \, dv \\
 &= \frac{4\pi}{3}
 \end{aligned}$$

□

5.3.4. Problemas propuestos

5.25 Si S representa el disco $x^2 + y^2 \leq 25$ que localizado en el plano $z = 12$, calcule la integral $\iint_S (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) dS$.

5.26 Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, 0)$, S es la superficie cuya parametrización es definida por $\vec{r}(u, v) = (u^2 - 2v, u + v, v^2 - u)$, para $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2$ y \vec{n} es la normal exterior a S .

5.27 Calcule la integral $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (2x, 2y, 1)$ y S está compuesta por el paraboloides $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$. Además, \vec{n} es el vector normal unitario que apunta hacia afuera.

5.28 Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde n es la normal exterior a S , $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, x)$ y S es la parte del plano $3x - 4y + z = 1$, $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$.

5.29 Calcule la integral $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, z)$, S tiene orientación hacia abajo y está parametrizada por

$$\vec{r}(u, v) = (2u, 2v, 5 - u^2 - v^2); u^2 + v^2 \leq 1.$$

5.30 Calcule la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(y, -y, z)$$

y $S: z = 1 - x^2 - y^2$ para $0 \leq z \leq 1$ está orientada con el vector normal hacia adentro.

5.31 Evalúe la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ para el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (ze^{xy}, -3ze^{xy}, xy)$$

y la superficie S orientada hacia arriba y parametrizada por

$$\vec{r}(u, v) = (u + v, u - v, 1 + 2u + v); 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 1.$$

5.32 Calcule la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (y, x, z^2)$, S está parametrizada por $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ para $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2\pi$ y está orientada con el vector normal hacia arriba.

5.33 Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 3z)$ sobre el hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ orientado con el vector normal apuntando hacia afuera.

5.34 Considere el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $\vec{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$. Calcule el flujo de F a través de la porción del paraboloido $z = 4 - x^2 - y^2$, que se encuentra situado encima del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ y tiene orientación dada por la normal exterior.

5.35 Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ sobre la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ que se encuentra entre los planos $z = 0$ y $z = 2$ con el vector normal apuntando hacia afuera desde el origen de coordenadas.

5.36 Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{j},$$

a través de la superficie $S : y = 1 + x^2 + z^2$, para $1 \leq y \leq 5$, que está orientada con vectores normales que apunten en la dirección negativa del eje Y .

5.37 Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$ sobre la parte del paraboloido $z = 4 - x^2 - y^2$ limitado inferiormente por el plano $z = 0$ orientado con el vector normal apuntando hacia afuera.

5.38 Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde n es la normal exterior a S , $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ y S la elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

5.39 Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde \vec{n} es la normal exterior a S , $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z + 1)$ y S es el disco unitario $x^2 + y^2 \leq 1$ sobre el plano XY .

5.40 Evalúe $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, x)$ y S es la parte del elipsoide

$$4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36, \text{ donde } z \geq 3, x \geq 0, y \geq 0.$$

Indicación: Use la parametrización $\vec{r}(u, v) = (3u \cos v, 2u \sin v, 6\sqrt{1 - u^2})$

5.41 Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde \vec{n} es la normal exterior a S , $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z + 1)$ y S es la porción del plano $z = 2 + y$ que se encuentra en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

5.42 Calcule la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot N dS$, donde F es el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (xe^{zy}, -3ze^{zy}, xz)$$

y S es la porción del plano con ecuaciones paramétricas $x = u + v$, $y = u - v$, $z = 1 + 2u + v$; $0 \leq u \leq 1$ y $0 \leq v \leq 2$.

5.43 Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde \vec{n} es la normal exterior a S , $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, x)$ y S es la porción del plano $3x - 4y + z = 1$ con $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$.

5.44 Considere el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x + y, yz, zx)$. Calcule el flujo de \vec{F} a través de la porción del paraboloido $z = 1 - x^2 - y^2$, que se encuentra situado encima del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ y tiene orientación dada por la normal exterior.

5.45 Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde \vec{n} es la normal exterior a S , $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

5.46 Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = \vec{j} - y^2 \vec{i}$, a través de la superficie $S : y = 2x^2 + z^2$, para $1 \leq y \leq 4$. Oriente S con vectores normales que apunten en la dirección positiva del eje Y .

5.47 Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (xy, 4x^2, yz)$, a través de la superficie $S : z = xe^y$, con $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$, que está orientada con el vector normal hacia arriba.

5.48 Calcule la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot N dS$ donde $\vec{F}(x, y, z) = (y, x, z^2)$ y S está parametrizada por $r(u; v) = (u \cos v; u \sin v; v)$ para $0 \leq u \leq 1$ y $0 \leq v \leq \pi$ y orientada con el vector normal hacia arriba.

5.49 Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z^4)$, a través de la superficie cónica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitada por el plano $z = 1$, que está orientada con el vector normal hacia afuera.

5.50 Calcule la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot N dS$ donde $\vec{F}(x, y, z) = (y, -y, z)$ y S está orientada con el vector normal hacia adentro y cuya ecuación es $S : z = 2 - x^2 - y^2$ para $0 \leq z \leq 2$.

5.4 Teorema de Stokes

El teorema de Stokes establece la relación entre una integral de superficie sobre una superficie orientada S y una integral de línea a lo largo de una curva cerrada C en el espacio que forma la frontera o el borde de S , como se muestra en la figura del lado izquierdo. La dirección positiva a lo largo de C es la dirección en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al vector normal N . Es decir, si se imagina que se toma el vector normal N con la mano derecha, con el dedo pulgar apuntando en la dirección de N , los demás dedos apuntarán en la dirección positiva de C , como se muestra en la figura del lado derecho

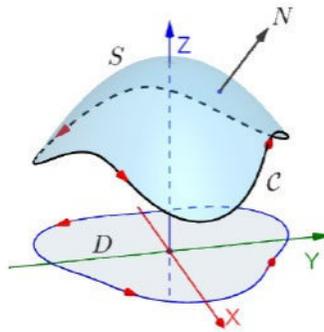


Figura 5.20: Teorema de Stokes

Teorema 5.3 [Teorema de Stokes]

Sea S una superficie orientada con vector normal N , acotada por una curva cerrada simple C , suave a trozos con orientación positiva que es la frontera de S . Si \vec{F} un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas sobre una región abierta que contiene a S y a C , entonces

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\alpha = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot N dS. \quad (5.8)$$

Más explícitamente, se tiene

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\alpha = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot N dS = \iint_D \text{rot } \vec{F} \cdot (-f_x, -f_y, 1) dA, \quad (5.9)$$

donde $S : z = f(x, y)$.

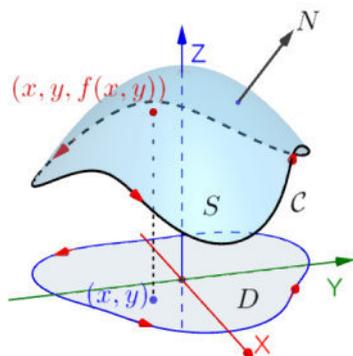


Figura 5.21: Teorema de Stokes de $S : z = f(x, y)$

El teorema de Stokes afirma que la medida colectiva de esta tendencia rotacional considerada sobre toda la superficie S , o sea la integral de superficie es igual a la tendencia de un fluido a circular alrededor de la frontera C , es decir la integral de línea.

Ejemplo 5.20

Evalúe $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$ y C es la curva de intersección del plano $y + z = 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ considerando la orientación de C es contraria al movimiento de las agujas del reloj cuando es vista desde arriba.

Solución.

La curva C es la elipse mostrada en la figura, utilizamos el teorema de Stokes, primero calculamos

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 1 + 2y)$$

Aunque hay tres superficies con frontera C , la opción más conveniente es la región elíptica S en el plano $y + z = 2$ que está limitado por C . Si nos orientamos hacia arriba, entonces tiene la orientación positiva inducida.

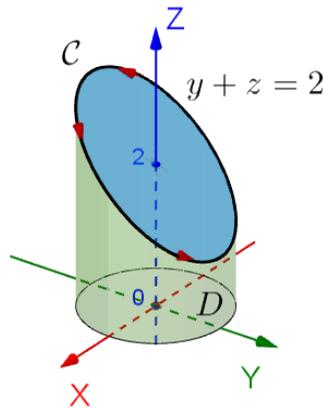


Figura 5.22: Superficie S del ejemplo 5.20

La proyección de $S : z = g(x, y) = 2 - y$ sobre el plano XY es el disco

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

por tanto

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} &= \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D \text{rot } \vec{F} \cdot (-g_x, -g_y, 1) dA \\ &= \iint_D (0, 0, 1 + 2y) \cdot (0, 1, 1) dA = \iint_D (1 + 2y) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \sin \theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{2}{3} r^3 \sin \theta \right) \Big|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin \theta \right) d\theta = \frac{1}{2} (2\pi) + 0 = \pi. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.21

Use el teorema de Stokes para calcular la integral $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, xy)$, S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y arriba del plano XY .

Solución.

Para encontrar la curva frontera \mathcal{C} resolvemos la ecuación

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

restando, conseguimos $z^2 = 3$ y como $z \geq 0$ entonces $z = \sqrt{3}$.

Por lo que \mathcal{C} es el círculo dado por las ecuaciones

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = \sqrt{3} \end{cases}$$

Una parametrización de \mathcal{C} es

$$\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \sqrt{3}), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Así, $\alpha'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$ y $\vec{F}(\alpha(t)) = (\sqrt{3} \cos t, \sqrt{3} \operatorname{sen} t, \cos t \operatorname{sen} t)$.

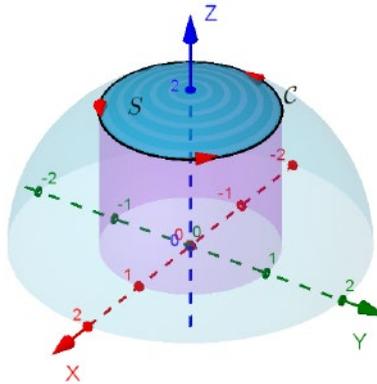


Figura 5.23: Superficie S del ejemplo 5.21

Por lo tanto, por el teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sqrt{3} \cos t, \sqrt{3} \operatorname{sen} t, \cos t \operatorname{sen} t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{3} \cos t \operatorname{sen} t + \sqrt{3} \operatorname{sen} t \cos t) \, dt = \int_0^{2\pi} 0 \, dt = 0. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.22**

Use el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea

$$\oint_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz,$$

donde C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$, y la orientación de C corresponde al movimiento en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj, en el plano XY .

Solución.

Sea $\vec{F}(x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3) = (P, Q, R)$, entonces

$$\text{rot } \vec{F} = (0, 0, 3x^2 + 3y^2)$$

y $S : z = f(x, y) = 1 - x - y \Rightarrow f_x = -1, f_y = -1$.

Luego

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint_D (0, 0, 3x^2 + 3y^2) \cdot (-f_x, -f_y, 1) dA \\ &= \iint_D (0, 0, 3x^2 + 3y^2) \cdot (1, 1, 1) dA \\ &= 3 \iint_D (x^2 + y^2) dA = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r dr d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \right) d\theta = \frac{3}{4} (2\pi) = \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

Otra forma, es utilizando la curva

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1 - \cos t - \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} &= \oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \oint_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz \\
&= \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^3 \theta \cdot (-\operatorname{sen} \theta) d\theta + \cos^3 \theta \cdot \cos \theta d\theta \\
&\quad - \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta - \operatorname{sen} \theta)^3 (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^4 \theta + \cos^4 \theta) d\theta - \\
&\quad \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta - \operatorname{sen} \theta)^3 (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 \right] d\theta \\
&\quad - \frac{(1 - \cos \theta - \operatorname{sen} \theta)^4}{4} \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (2 + 2 \cos^2 2\theta) d\theta - 0 \\
&= \pi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right) d\theta \\
&= \pi + \frac{1}{4} (\theta + \operatorname{sen} 4\theta) \Big|_0^{2\pi} \\
&= \pi + \frac{1}{4} (2\pi + 0) = \frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.23

Calcule $\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (3z, 5x, -2y)$, S es la parte del paraboloides $z = x^2 + y^2$, que se encuentra debajo del plano $z = 4$ y \vec{n} es el vector normal unitario exterior a S .

Solución.

Tanto la gráfica de la superficie como la de su proyección sobre el plano XY se ponen a disposición en la figura 5.24.

Por otro lado, se tiene que $\operatorname{rot} \vec{F} = (-2, 3, 5)$, sea $S : z = f(x, y) = x^2 + y^2$ para la cual $f_x = 2x$, $f_y = 2y$, también

$$\vec{n} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} = \frac{(-2x, -2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

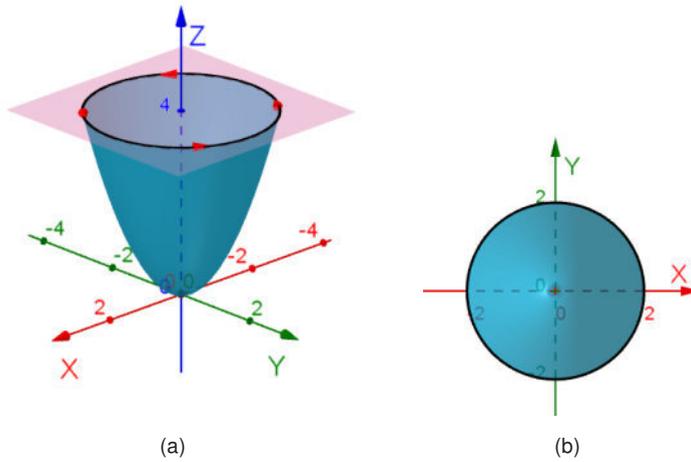


Figura 5.24: Superficie S del ejemplo 5.23

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint_D \operatorname{rot} \vec{F} \cdot (-f_x, -f_y, 1) dA \\
 &= \iint_D (-2, 3, 5) \cdot (-2x, -2y, 1) dA = \iint_D (4x - 6y + 5) dA \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r \cos \theta - 6r \operatorname{sen} \theta + 5) r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{3} r^3 \cos \theta - 2r^3 \operatorname{sen} \theta + \frac{5}{2} r^2 \right) \Big|_0^2 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{32}{3} \cos \theta - 16 \operatorname{sen} \theta + 10 \right) d\theta \\
 &= \left(\frac{32}{3} \operatorname{sen} \theta + 16 \cos \theta + 10\theta \right) \Big|_0^{2\pi} = 20\pi
 \end{aligned}$$

Otra forma de resolver el problema surge de considerar la frontera de S , es decir, la curva

$$C : \begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 2 \operatorname{sen} \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ z = 4 \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \oint_C \vec{F} d\alpha = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\alpha(\theta)) \cdot \alpha'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(2 \cos \theta, 2 \operatorname{sen} \theta, 4) \cdot (-2 \operatorname{sen} \theta, 2 \cos \theta, 0) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (12, 10 \cos \theta, -4 \operatorname{sen} \theta) \cdot (-2 \operatorname{sen} \theta, 2 \cos \theta, 0) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-24 \operatorname{sen} \theta + 20 \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-24 \operatorname{sen} \theta + 10(1 + \cos 2\theta)) d\theta \\ &= 24 \cos \theta + 10 \left(\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0 + 20\pi = 20\pi\end{aligned}$$

□

5.4.1. Problemas propuestos

5.51 Use el teorema de Stokes para calcular la integral $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$, donde

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y) \vec{i} + (x^2 + 2y) \vec{j} + 2z^3 \vec{k} \text{ y } C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}.$$

5.52 Calcule la integral $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde la superficie S está definida por las ecuaciones $2z = x^2 + y^2$ y $0 \leq z \leq 2$, en tanto que el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tiene regla de correspondencia $\vec{F}(x, y, z) = (2x + y, x - yz, zy)$.

5.53 Use el teorema de Stokes para evaluar la integral $\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$, donde es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$.

5.54 Calcule la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$ donde $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 z, xy^2, z^2)$ y C es la curva de intersección entre el plano $x + y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ con orientación antihoraria vista desde arriba.

5.55 Sean S la superficie definida como la gráfica de la función $z = 4 - 4x^2 - y^2$, con $z \geq 0$, orientada hacia arriba y

$$\vec{F}(x, y, z) = (x - y, x + y, ze^{xy}).$$

Calcule $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS$.

5.56 Considere el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (2xy^2z, 2x^2yz, x^2y^2 - 6x)$. Calcule la integral de superficie $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ donde S es la porción del plano $z = y$ que se encuentra ubicada dentro del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

5.57 Aplique el teorema de Stokes para calcular la integral

$$\int_C (y^2 + z^2) dx + (y^2 + x^2) dy + (x^2 + z^2) dz$$

a lo largo del borde C del rectángulo cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$ y $(0, 1, 0)$ orientado en sentido antihorario.

5.58 Aplique el teorema de Stokes para evaluar la integral

$$\int_C y^2 dx + xy dy + xz dz,$$

donde $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ z = 2y \end{cases}$.

5.59 Sean el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(-y^3x + 2zx^2, \frac{y^4}{4}, \sqrt{3}z - 2z^2x \right),$$

la superficie S de ecuación $x + y = 4$, con vector normal apuntando hacia afuera visto desde el origen de coordenadas y la curva $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, donde C_1 es la intersección de las superficies S con $x^2 + z^2 = 4$, C_2 resulta de intersectar S con el cilindro $x^2 + (z - 1)^2 = 1$ y C_3 se origina de la intersección de S con el plano $z = 0$.

Calcule la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$.

5.60 Evalúe la integral $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$ donde

$$\vec{F}(x, y, z) = -y^3\vec{i} + x^3\vec{j} - z^3\vec{k}$$

y C resulta de intersectar el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 1$.

5.61 Sean B el sólido ubicado en el primer octante y limitado por las superficies

$$x^2 + z^2 = 4; y + x = 2; z = 4; y = 0 \text{ y } x = 0$$

y el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x^2z, y^2z, x + y)$. Determine el flujo saliente del campo rotacional de \vec{F} a través de la superficie que limita lateral e inferiormente al sólido B .

5.62 Calcule $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot N dS$ donde S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ situada por encima del plano XY , orientada con vector normal que apunta hacia arriba, y

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y - 4, 3xy, 2xz + z^2).$$

5.63 Calcule la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$, donde

$$\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + x\vec{j} + x^2z\vec{k}$$

y la curva C se define como la unión de los arcos C_1 , C_2 y C_3 que se originan como sigue: C_1 es la intersección de las superficies $z = \sin(xy)$ con $y = x$; C_2 resulta de intersectar $z = \sin(xy)$ con $x = \frac{\pi}{2}$ y C_3 es el segmento de recta que va desde el punto $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ hasta el origen de coordenadas.

5.64 Evalúe $\oint_C \vec{F} \cdot d\alpha$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (\sin(x^2), e^{y^2} + x^2, 2x^2 + z^4)$ y C es el triángulo de vértices $(3, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 1)$, en sentido antihorario.

5.65 Calcule $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x + y + 2z, x + 2y)$, S es la porción del plano $z = y$ acotada por el cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ arriba del plano XY y es la normal exterior a S .

5.66 Halle el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x, y, z) = (\text{sen}(x^2) - z, e^{y^2}, x + z^4)$ sobre la curva

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases},$$

recorrida en sentido antihorario; vista desde el eje positivo z hacia el origen.

5.67 Usando el teorema de Stokes, calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^x + \arctan x + z^2, y^y + \arccos y + x^2, z^z + \text{arcsec } z + y^2)$$

cuando una partícula se mueve bajo la influencia alrededor de la orilla de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que esta en el primer octante, y que está orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, vista desde el eje positivo z .

5.68 Use el teorema de Stokes para evaluar $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 y^3 z, \text{sen}(xyz), xyz)$$

y S es la parte del cono $y^2 = x^2 + z^2$ que se encuentra entre los planos $y = 0$ e $y = 3$, orientado en la dirección de la eje Y positivo.

5.69 Use el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (e^{-x}, e^x, e^z)$ y C es el borde de la parte del plano $2x + y + 2z = 2$ en el primer octante, y está orientado en sentido antihorario visto desde arriba.

5.70 Sea la curva C , que es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $z \geq 0$, con el cono $z^2 = x^2 + (y - 1)^2$. Use el teorema de Stokes, para evaluar la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\alpha$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 z, xy, yz)$.

5.71 Calcule $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 z, xy, x^2 y^2)$, S es la porción del paraboloido $z = x^2 + y^2$ acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con vector normal exterior a S .

5.72 Use el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea

$$\int_C (y + \operatorname{sen} x) dx + (z^2 + \operatorname{cos} y) dy + x^3 dz$$

donde C es la curva parametrizada por $\alpha(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{cos} t, \operatorname{sen}(2t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

5.73 Calcule $\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (xy, e^z, xy^2)$, S consta de los cuatro lados de la pirámide cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 0)$ con vector normal que apunta en la dirección positiva del eje Y .

5.74 Calcule $\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, 2x, z^2)$, S es la porción del plano XY delimitada por el interior de la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ con vector normal que apunta hacia arriba.

5.5 Teorema de la divergencia de Gauss

Dentro del cálculo vectorial, el teorema de la divergencia se erige como uno de los más importantes, ya sea por que se utiliza para resolver muchas integrales difíciles así como por sus aplicaciones en el campo de las ecuaciones diferenciales parciales que permiten modelar ecuaciones relacionadas con el flujo de calor y la conservación de masa. En resumen, este teorema relaciona la integral de superficie con la integral de volumen, es decir, establece que la integral de superficie de la componente normal de un campo vectorial \vec{F} sobre una superficie cerrada S es igual a la integral de volumen de la divergencia calculada sobre el volumen V encerrado por la superficie S .

Forma vectorial del teorema de Green

Sea C una curva cerrada, simple y suave del plano XY , denotada por

$$C : (x, y) = (x(s), y(s)),$$

y parametrizada por su longitud de arco, entonces el vector tangente unitario es dado por $T = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$ y el vector normal $\vec{n} = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right)$.

Observe que los vectores tangente y normal satisfacen $T \cdot \vec{n} = 0$.

Si $\vec{F} = (P, Q)$ es un campo vectorial, entonces usando el teorema de Green obtenemos

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds &= \oint_C (P, Q) \cdot \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right) ds \\ &= \oint_C (P \, dy - Q \, dx) = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D \nabla \cdot \vec{F} \, dA = \iint_D \operatorname{div} \vec{F} \, dA. \end{aligned}$$

(N) El resultado anterior es, muchas veces, llamado el teorema de la divergencia de Gauss en el plano.

Teorema 5.4 Teorema de la divergencia

Sea E una región sólida acotada por una superficie cerrada S , orientada por vectores normales unitarios dirigidos hacia el exterior de E . Si \vec{F} es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en E , entonces

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} dV. \quad (5.10)$$

En el caso particular, en que $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ y

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \wedge f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$$

entonces

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_D \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \operatorname{div} \vec{F} dz \right) dA.$$

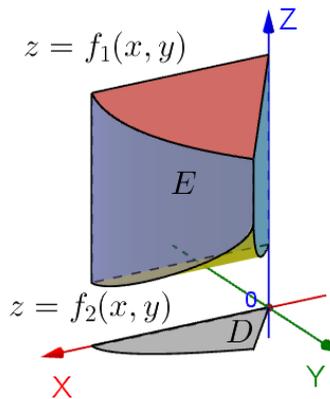
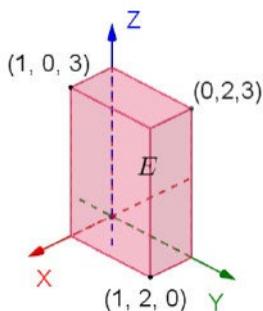


Figura 5.25: Región sólida E acotada por una superficie cerrada S

Ejemplo 5.24

Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x^2y, 2xz, yz^3)$ a través de la superficie que es la frontera de la región E de la siguiente figura.

Solución.

Figura 5.26: Sólido E

Como

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2y) + \frac{\partial}{\partial y} (2xz) + \frac{\partial}{\partial z} (yz^3) = 2xy + 0 + 3yz^2 = 2xy + 3yz^2$$

Y del cubo tenemos que: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$.

Luego, aplicamos el teorema de la divergencia

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (2xy + 3yz^2) \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^2 (6xy + 27y) \, dy \, dx = \int_0^1 (12x + 54) \, dx \\ &= 6 + 54 = 60 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.25

Evalúe $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (xy, y^2 + e^{xz^2}, \operatorname{sen}(xy))$ y S es la superficie de la región E acotada por cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$ y $y + z = 2$.

Solución.

Es difícil evaluar directamente la integral de superficie directamente, dado que S consta de 4 partes, según la siguiente figura.

Por eso utilizamos el teorema de la divergencia para transformar la integral de superficie en una integral triple.

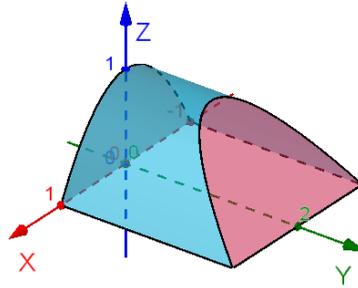


Figura 5.27: Solido E del ejemplo 5.25

Como

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^{xz^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{sen} xy) = y + 2y + 0 = 3y$$

Para evaluar la integral triple, expresamos

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2, 0 \leq y \leq 2 - z\}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_E 3y \, dV = 3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} y \, dy \, dz \, dx \\ &= 3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \frac{(2-z)^2}{2} \, dz \, dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \left[-\frac{(2-z)^3}{3} \right] \Big|_0^{1-x^2} \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 [(x^2 + 1)^3 - 8] \, dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 [x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 7] \, dx \\ &= -\int_0^1 [x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 7] \, dx = -\left(\frac{x^7}{7} + \frac{3}{5}x^5 + x^3 - 7x \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{184}{35}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.26

Un fluido con densidad igual a 300 fluye con una velocidad

$$\vec{v} = (xy, y^2 + \ln(2 + xz^3), \arctan(x^5 + y^5)).$$

Determine la razón de fluido a través de la superficie S de la región E acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$, y los planos $z = 0$, $y = 0$, $y + z = 2$.

Solución.

Tenemos que

$$\vec{F} = 300\vec{v} = 300(xy, y^2 + e^{xz^2}, \text{sen}(xy)),$$

$$\text{y } \text{div } \vec{F} = 300(y + 2y) = 900y.$$

Luego, aplicando el teorema de la divergencia

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_E 900y \, dV = 900 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} y \, dy \, dz \, dx \\ &= 450 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} (2-z)^2 \, dz \, dx = 450 \int_{-1}^1 \frac{(z-2)^3}{3} \Big|_0^{1-x^2} \, dx \\ &= 150 \int_0^1 [(1+x^2)^3 + 8] \, dx = 150 \int_0^1 (x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 9) \, dx \\ &= 150 \left(\frac{x^7}{7} + \frac{3}{5}x^5 + x^3 + 9x \right) \Big|_0^1 = 150 \left(\frac{376}{35} \right) = \frac{11\,280}{7}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.27

Un fluido con densidad igual a 250 fluye con una velocidad

$$\vec{v} = \left(\frac{x^3}{3} + e^{y+z}, \frac{y^3}{3} + z^2 + \ln(3x + xz^3), x - y + \frac{z^3}{3} + \arctan(x^2 + y^3) \right).$$

Determine la razón de fluido a través de la superficie S , que es la frontera de la región sólida E de la siguiente figura 5.28.

Solución.

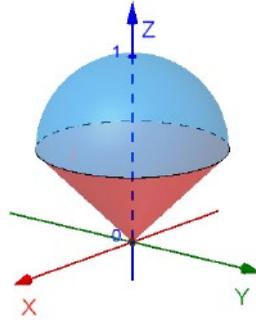


Figura 5.28: Sólido E del ejemplo 5.27

Observe que la esfera pasa por el origen, su centro está en el punto $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ y su representación en coordenadas esféricas

$$x^2 + y^2 + z^2 = z \Leftrightarrow \rho^2 = \rho^2 \cos^2 \phi \Leftrightarrow \rho = 0 \text{ o } \rho = \cos \phi \geq 0.$$

La ecuación del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, en coordenadas esféricas es

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta} = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}$$

de donde sigue que

$$\rho \cos \phi = \rho \sin \phi \Leftrightarrow \tan \phi = 1 \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}.$$

Por lo tanto, la descripción del sólido E en coordenadas esféricas es

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/4, 0 \leq \rho \leq \cos \phi\}$$

Además

$$\begin{aligned} \vec{F}(x, y, z) &= 250 \vec{v} \\ &= 250 \left(\frac{x^3}{3} + e^{y+z} \right) \vec{i} + \left(\frac{y^3}{3} + z^2 + \ln(3x + xz^3) \right) \vec{j} \\ &\quad + 250 \left(x - y + \frac{z^3}{3} + \arctan(x^2 + y^3) \right) \vec{k}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= 250 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^3}{3} + e^{y+z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y^3}{3} + z^2 + \ln(3x + xz^3) \right) \right] + \\ &\quad 250 \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(x - y + \frac{z^3}{3} + \arctan(x^2 + y^3) \right) \right] \\ &= 250 (x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

El flujo de \vec{F} a través del sólido E es

$$\begin{aligned}
 \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} dV = 250 \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2) dV \\
 &= 250 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \cdot \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta \\
 &= 500\pi \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\rho^5}{5} \Big|_0^{\cos \phi} \right) \operatorname{sen} \phi d\phi \\
 &= 100\pi \int_0^{\pi/4} \cos^5 \phi \operatorname{sen} \phi d\phi = 100\pi \left(-\frac{\cos^6 \phi}{6} \right) \Big|_0^{\pi/4} \\
 &= 100\pi \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{100\pi}{6} \left(\frac{7}{8} \right) \\
 &= \frac{175}{12}\pi.
 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.28

Un fluido con densidad igual a 200 fluye con una velocidad

$$\vec{v} = (x^3 + e^{y+z}, y^3 + z^2 + \ln(3x + xz^3), x - y + \arctan(x^2 + y^3)).$$

Determine la razón de fluido a través de la superficie S , que es la frontera de la región del sólido

$$E : (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2z(x^2 + y^2)$$

Solución.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
 \vec{F}(x, y, z) &= 200\vec{v} \\
 &= 200(x^3 + e^{y+z}, y^3 + z^2 + \ln(3x + xz^3), x - y + \arctan(x^2 + y^3))
 \end{aligned}$$

$$\text{entonces } \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 200(3x^2 + 3y^2 + 0) = 600(x^2 + y^2)$$

Escribimos la ecuación de la superficie en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}
 \rho^4 &= 2\rho \cos \phi (\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta) = 2\rho \cos \phi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \\
 \Leftrightarrow E : \rho &= 2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi
 \end{aligned}$$

y como $\rho \geq 0 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi \geq 0$ de donde

$$S : 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq 2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi$$

El flujo de \vec{F} a través de E es

$$\begin{aligned}
 \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iiint_E \operatorname{div} F dV = 600 \iiint (x^2 + y^2) dV \\
 &= 600 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi} \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cdot \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta \\
 &= 1200\pi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\rho^5}{5} \Big|_0^{2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi} \right) \operatorname{sen}^3 \phi d\phi \\
 &= 240\pi (32) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{13} \phi \cos^5 \phi d\phi = 240\pi (16) \beta(7, 3) \\
 &= 3840\pi \left(\frac{\Gamma(7) \Gamma(3)}{\Gamma(10)} \right) = 3840\pi \left(\frac{6! 2!}{9!} \right) \\
 &= \frac{320}{21} \pi
 \end{aligned}$$

donde hemos usado la función beta con $m = 7$ y $n = 3$:

$$\beta(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1} \phi \cos^{2n-1} \phi d\phi$$

□

5.5.1. Problemas propuestos

5.75 Evalúe la integral $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + \operatorname{sen}(yz)) \vec{i} + (y - xe^{-z}) \vec{j} + z^2 \vec{k}$$

y S es la superficie de la región del espacio acotada por $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = 0$ y $z + x = 2$.

5.76 Calcule la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde \vec{F} es el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (3xy^2, xe^z, z^3)$$

y S es la superficie que limita al sólido acotado por el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ y los planos $x = -1$ y $x = 2$. Considere que la superficie S está orientada con la normal interior.

5.77 Evalúe la integral $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde

$$\vec{F}(x, y, z) = xy^2 \vec{i} + x^2y \vec{j} + y \vec{k}$$

y S es la superficie de la región cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ delimitada por los planos $z = 1$ y $z = -1$.

5.78 Considere el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = (2x + y, z - y, 5z + x)$$

y la superficie del cubo S en el primer octante limitado por los planos $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ y los planos coordenados. Calcule el flujo de F hacia afuera a través de la superficie S .

5.79 Use el teorema de divergencia para evaluar $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(z^2x, \frac{y^3}{3} + \tan z, x^2z + y^2 \right)$$

donde S y S es la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientado hacia arriba.

5.80 Evalúe la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ si $\vec{F}(x, y, z) = (2zx, -xy, -z^2)$, S es la frontera del sólido B limitado por $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $4x^2 + y^2 = 16$ y $z + y = 4$, y \vec{n} es el vector normal exterior.

5.81 Evalúe la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ para el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2),$$

donde S es la superficie del sólido

$$B = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq z \leq \sqrt{1 - y^2}, 0 \leq x \leq 2 \right\}$$

con vector normal apuntando hacia afuera.

5.82 Sea S superficie con vector normal exterior que limita al sólido acotado por la porción de la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$, comprendida entre los planos $z = 1$ y $z = 4$. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, si $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z - 1)$.

5.83 Sean el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(-y^3x + 2zx^2, \frac{y^4}{4}, \sqrt{3}z - 2z^2x \right).$$

Determine el flujo saliente del campo vectorial \vec{F} a través de la superficie S que encierra al sólido limitado por $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 4$, $x^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + z^2 = 2z$.

5.84 Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, si $\vec{F}(x, y, z) = (x, 2y, -z)$, S es la frontera del sólido B limitado por $z^2 = x^2 + y^2$ y $z = x^2 + y^2$, y \vec{n} es el vector normal exterior.

5.85 Sean B el sólido ubicado en el primer octante y limitado por las superficies

$$x^2 + z^2 = 4; y + x = 2; z = 4; y = 0 \text{ y } x = 0$$

y el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x^2z, y^{2z}, x + y)$. Determine el flujo entrante del campo vectorial \vec{F} a través de la superficie S que limita al sólido B .

5.86 Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ si \vec{n} es el vector normal exterior a la superficie S que es la frontera del sólido B limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$, y

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(xz, x \arctan(xz), \frac{z^2}{2} \right).$$

5.87 Determine el flujo saliente del campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = y \vec{i} + x \vec{j} + x^2z \vec{k}$$

a través de la superficie S que limita al sólido acotado por la superficie $z = \sin(xy)$ y los planos $z = 0$, $y = x$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

5.88 Calcule el flujo de $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2 + \sin z, 2yz + \ln z, x^2z + e^y)$, que pasa a través del sólido E que se encuentra entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$; y entre los planos $z = 1$, $z = 3$.

5.89 Sea S la superficie del sólido que esta entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$, entre los planos $z = 1$ y $z = 3$. Calcule el flujo de $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, yz, x^2z)$ que pasa a través del sólido.

5.90 Use el teorema de la divergencia de Gauss para evaluar $\iint_S \vec{F} \cdot n dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, xy, z)$, S es la porción del paraboloido $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano XY orientada con vector normal unitario exterior a S .

5.91 Un fluido con densidad igual a 800 fluye con una velocidad $\vec{v} = (y, 1, z)$. Determine la razón de fluido hacia arriba a través del paraboloido

$$z = 9 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2), \text{ si } x^2 + y^2 \leq 36.$$

5.92 Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x^2z^3, 2xyz^3, xz^4)$ a través de S que es la superficie de la caja con vértices $(\pm 1, \pm 2, \pm 3)$ orientada con vector normal unitario exterior.

5.93 Use el teorema de la divergencia de Gauss para evaluar $\iint_S \vec{F} \cdot n dS$, donde

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{5}{3}x^3 + \ln(8 + 3y^2 + z^4), \frac{5}{3}y^3 + x^{3+z}, x - 2y + 3z \right),$$

S es la porción del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ comprendida dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, y \vec{n} es el vector normal unitario exterior a S .

5.94 Sea E el sólido ubicado en el primer octante y limitado por el plano $x + y + z = 1$ y los tres planos coordenados, orientado con vector unitario normal exterior. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (x + y + z - 1, xy, x + y + z)$.

5.95 Sea E el sólido limitado por las semiesferas

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$$

y el plano XY . Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = \left(\ln\left(y^2 + \frac{z^2}{4} + 2\right), x, z^2 \right)$ y \vec{n} es el vector unitario normal exterior a la superficie S que es la frontera de E .

6

Respuestas a los ejercicios con números impares

Capítulo 1

Problemas propuestos 1.4.2 \sphericalangle página 62

- 1.1 a) 12.
b) 100.51.
c) 1.1036.
d) $\frac{4}{3}$
e) 4.863.
- 1.3 a) $\frac{56}{3}$.
b) 2.988.
c) 39.837.
d) 1.11.
e) $\frac{128}{15}$.
f) $\frac{1024}{3}$.
- 1.5 a) π .
- b) 1.
c) $\frac{241}{8}$.
d) 96.
e) 0,293.
f) 993.32.
g) 0.722
h) $\frac{8}{3}\pi$.
- 1.7 $\frac{9}{2}\sqrt{2}$.
- 1.9 $\frac{1}{2}\pi$.
- 1.11 $\frac{1}{4}$.
- 1.13 $-\frac{5}{4}a$.
- 1.15 0.

$$1.17 \frac{164}{9}.$$

$$1.19 0.915$$

$$1.21 18.$$

Problemas propuestos 1.5.6 \sphericalangle página 95

$$1.23 \text{ a) } \frac{9}{2}u^2.$$

$$\text{b) } 0.285u^2.$$

$$\text{c) } 0.193u^2.$$

$$\text{d) } \frac{280}{3}u^2.$$

$$\text{e) } \frac{49}{6}u^2.$$

$$\text{f) } 3\pi u^2.$$

$$\text{g) } 0.684u^2.$$

$$\text{h) } \frac{\pi}{4}u^2.$$

$$\text{i) } 30.485u^2.$$

$$1.25 d\frac{8}{5}u^3.$$

$$1.27 \frac{3\pi}{2}u^3.$$

$$1.29 36u^3.$$

$$1.31 \frac{63}{2}u^3.$$

$$1.33 12u^3.$$

$$1.35 \pi u^3.$$

$$1.37 1280u^3.$$

$$1.39 \frac{ba}{6} (a + b) \text{ gramos.}$$

$$1.41 \frac{2}{3}\pi a^3 \text{ gramos.}$$

$$1.43 (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{6}{7}, 0\right).$$

$$1.45 (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{21}{10}, \frac{96}{25\pi}\right).$$

$$1.47 (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{3a}{8}, \frac{3\pi a}{16}\right).$$

$$1.49 \frac{\pi}{8}.$$

$$1.51 (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{18}{5}, \frac{9}{4}\right).$$

$$1.53 (\bar{x}, \bar{y}) = (1.183, 0).$$

$$1.55 I_x = I_y = 0,313 a^5.$$

$$1.57 I_x = 144; I_y = 256.$$

$$1.59 24u^2.$$

$$1.61 2.76u^2.$$

$$1.63 6\sqrt{6}u^2.$$

$$1.65 36.177u^2.$$

$$1.67 2.88\pi u^2.$$

$$1.69 30.85u^2.$$

$$1.71 4.44u^2.$$

Capítulo 2

Problemas propuestos 2.3.4 <> página 136

2.1 $\frac{27}{4}$.

2.9 0.

2.3 a) 18.

2.11 a) $\frac{4}{7}$.

b) 1.

b) $\frac{1}{24}$.

c) $e - e^{-1} - 1$.

c) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 8$.

d) -8.

d) $\frac{8\sqrt{2}}{15}$.

e) $\frac{36}{5} + 2 \ln 2 \approx 8.5863$.

e) $\frac{1}{2} (2 - 3 \sin 3 + 2 \cos 3)$.

f) $\frac{15}{4} (e^2 - e) \approx 17.515$.

f) 12.

2.5 2212. 6π .

g) $\frac{1}{96}$.

2.7 $\frac{1}{24}$.

2.13 $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} \int_0^{3-z} xyz dx dy dz$ y $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_0^{3-z} xyz dx dz dy$.

2.15 $a = 3, b = 0, g(y) = 3 - \sqrt{9 - y^2}$ y $h(x, y) = 3 - x$.

2.17 $\int_0^3 \int_0^{3-z} \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{3}} 2x^2 y z^3 dx dy dz, \int_0^3 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{3}} \int_0^{3-y} 2x^2 y z^3 dz dx dy$ y $\int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{3-x^2} \int_0^x 2x^2 y z^3 dy dz dx + \int_0^{\sqrt{3}} \int_{3-x^2}^3 \int_0^{3-z} 2x^2 y z^3 dy dz dx$.

2.19 a) $B = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 3; 0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq z \leq 5\}$.

b) $B = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 2; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; r^2 \leq z \leq 4\}$.

c) $B = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 1; 0 \leq \theta \leq 2\pi; 1 - r^2 \leq z \leq 4\}$.

d) $B = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 2; 0 \leq \theta \leq 2\pi; r \leq z \leq \sqrt{8 - r^2}\}$.

e) $B = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 2; 0 \leq \theta \leq 2\pi; 1 + r^2 \leq z \leq 9 - r^2\}$.

2.21 a) $\frac{243}{4}\pi$.

b) $\frac{\pi}{40}$.

c) $\frac{\pi}{6}$.

2.23 a) $B = \{(\rho, \theta, \phi) : 1 \leq \rho \leq 2; 0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq \phi \leq \pi\}$.

b) $B = \{(\rho, \theta, \phi) : 1 \leq \rho \leq 2; 0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq \phi \leq \pi\}$.

c) $B = \{(\rho, \theta, \phi) : 0 \leq \rho \leq 2; 0 \leq \theta \leq 2\pi; \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi\}$.

2.25 a) $\frac{4}{3}\pi(e-1)$.

b) $\frac{9}{2}\pi^2$.

2.39 $\left(\frac{4}{15}, \frac{8}{15}, \frac{2}{5}\right)$.

2.41 $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

2.27 $\frac{1}{3}$.

2.43 $M_{yz} = 24; M_{xz} = 96; M_{xy} = \frac{256}{5};$

2.29 $\frac{4}{5}$.

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{3}{4}, 3, \frac{8}{5}\right)$.

2.31 18.

2.45 $-\frac{3}{4}$.

2.33 36π .

2.47 $\frac{243}{4}\pi$.

2.35 32.

2.49 $I_z = \frac{512}{35}\pi$.

2.37 6π .

Capítulo 3

Problemas propuestos 3.1.8 <> página 201

3.1 a) $Dom(\alpha) :]1, +\infty[$.

b) $\alpha(2) = (0, 1, 10)$.

3.3 a) $Dom(f) :]0, 1] - \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

b) $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \left(1, 16 \operatorname{sen}^2(0,25), -\frac{1}{2}\right)$.

3.5 a) $Dom(f) :]0, +\infty[$.

b) $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = (1, 0, 0)$.

3.7 la función α no es regular, pues $\alpha'(0) = \alpha'(2\pi) = \vec{0}$.

3.9 13π .

3.11 $\mathcal{L} : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

3.13 $\mathcal{L}_T : P = (1, 1, 1) + \lambda(1, -2, 1); \lambda \in \mathbb{R}$.

3.15 $\mathcal{L}_T : P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, e^{\pi/6}\right) + \lambda\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, e^{\pi/6}\right); \lambda \in \mathbb{R}$.

3.17 $\mathcal{L} : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2 \\ z = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

3.19 $\|\beta'(t)\| = \sqrt{\frac{9 - \cos(4t)}{2}}$.

3.21 a) $\mathcal{C} : \begin{cases} x = -1 + 2 \cos t \\ y = -1 + 2 \operatorname{sen} t \\ z = 5 - 4(\cos t + \operatorname{sen} t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$.

b) $L : P = (1, -1, 1) + \lambda(0, 1, -2); \lambda \in \mathbb{R}$.

c) La curva \mathcal{C} está contenida en el plano $2x + 2y + z = 1$, al igual que sus rectas tangentes. No obstante, el plano no pasa por el origen, entonces no existe tal punto.

3.23 a) $P_0 = \alpha(1) = (\ln 2, \sqrt{2}, 1)$.

b) $\alpha''(1) = \left(0, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -1\right)$.

3.25 a) $t = \sqrt{2}$.

b) $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$.

c) La trayectoria descrita por la partícula corresponde a una parábola en el plano $y = x$.

3.27 a) $t = 5; (10, 15, 100)$.

b) $t = 0; t = 10; v = \sqrt{113}$ cm/s.

c) $t = 5; v = \sqrt{13}$ cm/s.

3.29 $\alpha(t) = \left(\frac{1}{6}t^3 + 1, \frac{1}{12}t^4 + 2, \frac{4}{15}t^{5/2}\right)$.

3.31 Su velocidad está dada por $\vec{v}(t) = (2t^2 + 1, 3t^2 - 1, t + 1)$ y su posición es $r(t) = (\frac{2}{3}t^3 + t, t^3 - t, \frac{1}{2}t^2 + t)$.

Problemas propuestos 3.2.1 <> página 228

3.33 $C : \begin{cases} x = 3 + 3 \cos t \\ y = 2 + 3 \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$

3.35 La curva es un arco cerrado, porque el punto inicial coincide con el punto final.



3.37 $C : \begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 2t^3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

3.39 $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1.$

3.41 $y^2(x-1)^2 = x^4.$

3.43 $\alpha(t) = (\cos t, 2 \sin t - 1, \cos^2 t + 4 \sin t - 2); t \in [0, 2\pi].$

3.45 La curva C tiene 2 puntos múltiples. El primero en $t_1 = -\pi$ y $t_2 = \pi$, para los cuales $\alpha(-\pi) = \alpha(\pi) = (-\frac{1}{2}, 0)$ y el segundo en $t_3 = -\frac{\pi}{6}$ y $t_4 = \frac{\pi}{6}$, para los cuales $\alpha(-\frac{\pi}{6}) = \alpha(\frac{\pi}{6}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.

3.47 a) $\alpha(t) = (\cos t - 1, \sin t - 1, 3 - \sin t); t \in [0, 2\pi].$

b) $\alpha''(\frac{\pi}{2}) = (0, -1, 1).$

3.49 $\alpha(t) = (t, \sqrt{t}, \sqrt{t^2 + t}); t \in [0, 1].$

$$3.51 \quad C : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{3}t - 1 \\ z = 4 - 0,5t^2 \end{cases}, 0 \leq t \leq 2.$$

Capítulo 4

Problemas propuestos 4.1.2 <> página 253

$$4.1 \quad \frac{\pi^2}{4} (2 + 5\pi^2).$$

$$4.3 \quad 7.327.$$

$$4.5 \quad \frac{4}{5}\sqrt{2} + \frac{8}{3}.$$

$$4.7 \quad \sqrt{3}/2.$$

$$4.9 \quad 2\pi.$$

$$4.11 \quad = 2.995 \text{ gramos.}$$

$$4.13 \quad 2\sqrt{2}.$$

$$4.15 \quad 2.$$

$$4.17 \quad 4.$$

$$4.19 \quad 6.163 \text{ m}^2.$$

$$4.21 \quad \text{a) } 13.57 \text{ cm}^2.$$

$$\text{b) } 141.45 \text{ cm.}$$

$$4.23 \quad 7.64 \text{ u.}$$

$$4.25 \quad \text{a) } 43.611 \text{ cm}^2.$$

$$\text{b) } 11.945 \text{ cm.}$$

Problemas propuestos 4.3.2 <> página 291

$$4.27 \quad 5/2.$$

$$4.29 \quad 1/35.$$

$$4.31 \quad \frac{80}{3}.$$

$$4.33 \quad 0.$$

$$4.35 \quad \frac{89}{60}.$$

$$4.37 \quad \frac{3}{2}\pi - 2.$$

$$4.39 \quad 256.$$

$$4.41 \quad 2.$$

$$4.43 \quad \ln\left(\frac{3}{4}\right).$$

$$4.45 \quad 0.$$

$$4.47 \quad 0.$$

$$4.49 \quad \text{a) } a = 2, b = 1.$$

$$\text{b) } f(x, y, z) = x^2y + xz + z^2 + C.$$

$$\text{c) } 22.$$

$$4.51 \quad \text{a) } a = -4, b = -2.$$

$$\text{b) } f(x, y, z) = -x^4y^2z + yz^3 + C.$$

Problemas propuestos 4.4.1 <> página 304

$$4.53 \quad \frac{16}{15}.$$

$$4.55 \quad m\pi/2.$$

$$4.57 \quad 8/5.$$

$$4.59 \quad a = 8, b = 1/2.$$

$$4.61 \quad \frac{15}{16}ab^3\pi.$$

$$4.63 \quad \frac{57}{280}.$$

$$4.65 \quad 1/2.$$

$$4.67 \quad 32/3.$$

$$4.69 \quad -5.7485 \times 10^5.$$

$$4.71 \quad \frac{32}{3}.$$

$$4.73 \quad 0.95.$$

$$4.75 \quad -273.35.$$

$$4.77 \quad 1.213 \text{ J.}$$

Capítulo 5

Problemas propuestos 5.2.2 <> página 335

$$5.1 \quad \text{b) } 4\sqrt{6}.$$

$$\text{b) } \frac{32}{3}\sqrt{6}.$$

$$5.3 \quad \pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \approx 2.296\pi.$$

$$5.5 \quad 4.$$

$$5.7 \quad \frac{7}{6}\pi.$$

$$5.9 \quad 36.177.$$

$$5.11 \quad 11\sqrt{14}.$$

$$5.13 \quad \frac{4\pi}{15}.$$

$$5.15 \quad -28300.$$

$$5.17 \quad \sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{3} = 1.978.$$

$$5.19 \quad \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$5.21 \quad 9.05 \text{ g.}$$

$$5.23 \quad 3.270 \text{ g.}$$

Problemas propuestos 5.3.4 <> página 352

5.25 300π .

5.39 π .

5.27 2π .

5.41 3π .

5.29 -18π .

5.43 -4 .

5.31 4 .

5.45 4π .

5.33 128π .

5.47 $1 - e$.

5.35 16π .

5.49 $\frac{1}{6}$.

5.37 $\frac{713}{180}$.

Problemas propuestos 5.4.1 <> página 363

5.51 -4π .

5.63 $0,738$

5.53 $\frac{3\pi}{2}$.

5.65 3π .

5.55 4π .

5.67 36 .

5.57 2 .

5.69 $2e - 4$.

5.59 $\frac{5\pi}{2}$.

5.71 π .

5.61 0 .

5.73 0 .

Problemas propuestos 5.5.1 <> página 375

5.75 20π .

5.87 $0,921$

5.77 π .

5.89 27π .

5.79 $\frac{13\pi}{20}$.

5.91 $129\ 600\pi$.

5.81 $2\pi + \frac{8}{3} \approx 8.949$.

5.93 $\frac{224}{5}$.

5.83 7.419 .

5.85 $-\frac{512}{13}$.

5.95 12π .

Fórmulas de derivación

En la siguiente tabla de derivadas, C es una constante arbitraria.

Función f	Dominio de f	Derivada
a) $f(x) = C$	$x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
b) $f(x) = x^n; n \in \mathbb{N}$	$x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
c) $f(x) = Cx$	$x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = C$
d) $f(x) = e^x$	$x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$
e) $f(x) = a^x;$ $a > 0, a \neq 1$	$x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a^x \ln a$
f) $f(x) = \ln x$	$x \in]0, +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
g) $f(x) = \log_a x;$ $a > 0, a \neq 1$	$x \in]0, +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
h) $f(x) = \operatorname{sen} x$	$x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$
i) $f(x) = \operatorname{cos} x$	$x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
j) $f(x) = \operatorname{tan} x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;$ $k \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = \sec^2 x$
k) $f(x) = \operatorname{cot} x$	$x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = -\operatorname{csc}^2 x$
l) $f(x) = \operatorname{sec} x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;$ $k \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = \operatorname{sec} x \operatorname{tan} x$
m) $f(x) = \operatorname{csc} x$	$x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = -\operatorname{csc} x \operatorname{cot} x$
n) $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$	$x \in [-1, 1]$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
o) $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{cos} x$	$x \in [-1, 1]$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
p) $f(x) = \operatorname{arctan} x$	$x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Fórmulas de integración inmediata

En las fórmulas considere $u = u(x)$ una función diferenciable, y C denota una constante arbitraria.

$$a) \int du = u + C.$$

$$k) \int \csc u \cot u du = -\csc u + C.$$

$$b) \int u^p dx = \frac{1}{p+1} u^{p+1} + C$$

donde $p \neq -1$.

$$l) \int \tan u du = -\ln |\cos u| + C$$

$$= \ln |\sec u| + C.$$

$$c) \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C.$$

$$m) \int \cot u du = \ln |\sen u| + C.$$

$$d) \int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + C.$$

donde $a > 0, a \neq 1$.

$$n) \int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + C.$$

$$e) \int e^u du = e^u + C.$$

$$o) \int \csc u du = \ln |\csc u - \cot u| + C.$$

$$f) \int \sen u du = -\cos u + C.$$

$$p) \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{u}{a} \right) + C.$$

$$g) \int \cos u du = \sen u + C.$$

$$q) \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{a-u} \right| + C$$

donde $u \neq a \neq 0$.

$$h) \int \sec^2 u du = \tan u + C.$$

$$r) \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

donde $a > 0$.

$$i) \int \csc^2 u du = -\cot u + C.$$

$$s) \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \left(\frac{u}{a} \right) + C.$$

donde $a > 0$.

$$j) \int \sec u \tan u du = \sec u + C.$$

$$t) \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Bibliografía

- [1] APOSTOL, T. (2002). Análisis matemático. Reverté S.A.
- [2] BARTLE, R. y SHERBERT, D. (2004) Introducción al análisis matemático de una variable. Segunda edición. Limusa Wiley.
- [3] BORDEN, R. (1998) A course in advanced calculus. Dover Publications, Inc.
- [4] DO CARMO, M. (2017) Differential Geometry of Curves and Surfaces: Second Edition. Dover Books on Mathematics.
- [5] HOFFMAN, K. y KUNZE, R. (1994). Álgebra lineal. Prentice Hall, Inc.
- [6] GHORPADE, S. y LIMAYE, B. (2010) A Course in Multivariable Calculus and Analysis. First edition. Springer.
- [7] JANICH, K. (1984) Topology. Springer-Verlag.
- [8] LAGES, E. (2015). Curso de análise vol. 2. Instituto Nacional de Matematica Pura e Aplicada.
- [9] LACZKOVICH, M. y SÓS, V. (2015) Real Analysis: Foundations and Functions of One Variable. First edition. Springer.
- [10] LANG, S. (1973) Calculus of several variables. Addison-wesley Publishing Company.
- [11] LARSON, R. y HOSTETLER, R. (2006). Cálculo, octava edición. McGraw-Hill. Interamericana.
- [12] LEHMANN, Ch. (1967). Geometría analítica. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.
- [13] MCCALLUM, W. ; HUGHES-HALLETT, D. et al. (2017) Multivariable calculus. Seventh edition. Wiley
- [14] MARSDEN, J. y WEINSTEIN, A. (1985) Calculus III. Springer.

-
- [15] MIKLAVCIC, S. (2020) *An Illustrative Guide to Multivariable and Vector Calculus*. Springer.
- [16] PITA, C. (1995). *Cálculo vectorial*. Prentice Hall Hispanoamericana S.A.
- [17] PRIETO, C. (2003). *Topología básica*. Fondo de Cultura Económica.
- [18] ROBBIN, J. y SALAMON, D. (2022) *Introduction to Differential Geometry*. Springer.
- [19] SANTISTEBAN, E. y MENDOZA, A. (2022). *Cálculo diferencial de varias variables*. Fondo Editorial UNALM.
- [20] SHURMAN, J. *Multivariable Calculus*. Reed College.
- [21] SILVA, A. y MATOS, M. (2016). *Cálculo de várias variáveis*. UFPB-CCEN.
- [22] TAPP, K. (2016) *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Springer.
- [23] ZORICH, V. (2008) *Mathematical Analysis II*. Springer. <https://www.springer.com>

Autores



EDGAR OVIDIO SANTISTEBAN LEÓN

Profesor auxiliar en el Dpto. Académico de Matemática en la Universidad Nacional Agraria La Molina. Cursó sus estudios en Matemática y se tituló en la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo. Obtuvo el grado de Magister en Matemáticas en la Pontificia Universidad Católica del Perú. Es autor de los libros *Cálculo Integral* y *Varietades Riemannianas de curvatura media paralela*.

Apasionado profesor interesado en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y en implementar mejoras factibles en la enseñanza de la matemática.



ALDO ALCIDES MENDOZA URIBE

Matemático de profesión con grado de Magíster en Matemática pura obtenido en la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Profesor Principal del Dpto. Académico de Matemática de la Facultad de Ciencias de la UNALM, tiene a cargo el dictado de los cursos de Cálculo Avanzado I, Cálculo Avanzado II y Ecuaciones Diferenciales.

“Las Matemáticas son el lenguaje con el que el Dios ha escrito el universo”

GALILEO GALILEI

El libro que tienes en tus manos no es un texto más de cálculo vectorial, es un texto que te hará sentir la experiencia de transitar por el mundo multi dimensional inmerso usando el más universal de los lenguajes: las matemáticas.

Todos los tópicos que se desarrollan son presentados con la formalidad que todo estudiante de ingeniería requiere en su formación durante su estancia en el pregrado, no obstante, apelamos a la sencillez de lenguaje para abstraer el mundo que nos rodea y plasmarlo en términos de las funciones reales y vectoriales de varias variables.

Descubrirás que las destrezas y herramientas adquiridas en el cálculo diferencial e integral de una variable son perfectamente viables en este nuevo mundo n-dimensional, sin embargo, requieren ciertas adaptaciones para que se acoplen al lenguaje del cálculo multivariable.



Fondo Editorial
Universidad Nacional Agraria La Molina