Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para Ciencias

RAQUEL SERNA DÍAZ

ALFREDO VELÁSQUEZ FLORES

UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA
LA MOLINA

Raquel Inés Serna Díaz - Alfredo Velásquez Flores
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para Ciencias

Lima: 2024; 211 p.

ISBN: N° 978-612-5086-28-0
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2024-08105

Primera edición digital: agosto de 2024
Disponible en: https://fondoeditorialunalm.com/ebooks/

Diseño y diagramación:
Daniella Luna Barrios

Índice general

Prólogo

El presente libro, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para Ciencias, tiene como base los contenidos más importantes que se dictan en los cursos de Cálculo Avanzado II y de Ecuaciones Diferenciales en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Agraria La Molina, así mismo, será de gran utilidad para los alumnos que lleven el curso de Análisis Matemático IV en la Facultad de Industrias Alimentarias y en general resultará muy práctico y provechoso para estudiantes que cursen las diversas carreras de ciencia e ingeniería.

Este trabajo, ha sido realizado con el objetivo de guiar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje hacia las ecuaciones diferenciales considerando los aspectos formales como definiciones y teoremas donde nos centramos en la parte práctica y aplicativa dando una diversidad de ejemplos desde casos inmediatos hasta casos que requieren de un análisis más detallado, realizamos algunas demostraciones básicas pero no profundizamos en las demostraciones que requieren de más herramientas matemáticas por ahora no es nuestra prioridad.

Preocupados que los estudiantes se pregunten en donde aplicar lo aprendido, en este texto les presentamos una diversidad de problemas que son modelados a través de las ecuaciones diferenciales ordinarias considerando el contexto en el que se presentan con la finalidad que usted amigo lector pueda dar respuesta a algunos problemas reales en el cual está trabajando o en caso contrario que sea este libro un punto de partida para generarle mayor inquietud y ánimos de seguir investigando.

Los Autores

Introducción

Una ecuación diferencial ordinaria es una igualdad de expresiones matemáticas que relacionan una función que depende de una variable independiente, con sus respectivas derivadas. Se presentan con frecuencia en casi cualquier rama de la matemática aplicada, sirven para modelar y resolver problemas en física, ingeniería, economía, biología, entre otras áreas. La construcción de estos modelos tienen entre sus objetivos predecir comportamientos futuros.

Esta obra ha sido desarrollada en siete capítulos con el fin de lograr un aprendizaje adecuado de una introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias. En el capítulo 1 se introducen los conceptos teóricos básicos. En el capítulo 2 se presentan algunos modelos de ecuaciones diferenciales de primer orden. En el capítulo 3 estudiamos las ecuaciones diferenciales de primer orden, sus métodos de solución y presentamos varios ejemplos. En el capítulo 4 se desarrollan las ecuaciones diferenciales de segundo orden y de orden superior así como sus métodos resolutivos y ejemplos. En el capitulo 5 se estudia la transformada de Laplace como un nuevo método para resolver ecuaciones diferenciales. El capítulo 6 está dedicado al estudio de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales y en el capítulo 7 se da una introducción a la teoría de la estabilidad. Destacamos que cada capítulo consta de ejemplos y aplicaciones, una sección de ejercicios resueltos y ejercicios propuestos.

Desarrollados los contenidos matemáticos, presentamos algunas referencias bibliográficas que esperamos sean útiles para los lectores interesados en profundizar en el estudio de las ecuaciones diferenciales o de conocer otras aplicaciones.

Al finalizar, para dar respuesta a la pregunta ¿cómo saber si la ecuación diferencial ordinaria está bien resuelta? en el apéndice A se brindan los códigos necesarios para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en el programa Python que es de acceso libre y el estudiante podrá comprobar sus soluciones utilizando la tecnología.

Capítulo 1

Conceptos Básicos

Recordemos que en el estudio del cálculo diferencial de funciones en una variable, dada una función f derivable en x_0 nos preguntamos ¿quien es $f'(x_0)$?. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ entonces $f'(1) = 2$ geométricamente representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(1, 1)$ y si el punto a evaluar es cualquier $x \in \mathbb{R}$ se tiene $f'(x) = 2x$. Ahora si intentamos seguir el camino inverso, una pregunta natural surge al respecto. ¿ Cuál es la función $y = f(x)$ que cumpla $\frac{dy}{dx} = 2x$? sin lugar a duda este hecho nos lleva a entender las ecuaciones diferenciales.

En este capítulo presentamos los tópicos introductorios necesarios para el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición Ecuación Diferencial

Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables dependientes respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial (ED). En este caso las variables dependientes vendrían a ser las incógnitas de la ecuación.

- Si consideramos una variable independiente x y una variable dependiente $y = f(x)$ son ecuaciones diferenciales:

  a) $\frac{dy}{dx} = 2x$

  b) $\frac{d^2y}{dx^2} + sen(x)$

  c) $\frac{dy}{dx} = x^2$

- Si consideramos dos variables independientes x, y y una variable dependiente $z = f(x, y)$ son ecuaciones diferenciales.

  a) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

  b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + sen(xy)$

  c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + cos(xy)$

  d) $\frac{\partial z}{\partial y} = xy$

Para saber el tipo de ecuaciones diferenciales a desarrollar veamos su clasificación:

1.1. Clasificación de las Ecuaciones diferenciales

CLASIFICACIÓN POR TIPO

Si una ecuación contiene las derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria (EDO).**

Ejemplo 1.1

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad y \quad \frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 2x + y$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias.

Una ecuación que involucra derivadas parciales de una o más variables dependientes respecto de dos o más variables independientes se llama **ecuación diferencial parcial (EDP).**

Ejemplo 1.2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

son ecuaciones diferenciales parciales.

CLASIFICACIÓN POR ORDEN

El orden de una ecuación diferencial (ya sea EDO o EDP) es el orden de la derivada de mayor orden en la ecuación.

Ejemplo 1.3

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-4y=e^x$$

es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

Simbólicamente por lo general podemos expresar una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden con una variable dependiente y de la forma

$$F(x,y,y^{'},\ldots,y^{(n)})=0, \tag{1.1}$$

donde F es una función real de $n+2$ variables : $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$. Por razones tanto prácticas como teóricas, de ahora en adelante supondremos que de la ecuación (1.1) es posible despejar la mayor derivada $y^{(n)}$ en términos de las $n+1$ variables restantes, es decir podemos reescribir la ecuación (1.1) en la forma

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f\left(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}\right) \tag{1.2}$$

donde f es una función con $n+1$ variables independientes, la ecuación (1.2) se conoce como la forma normal de la ecuación (1.1). Así, cuando sea adecuado para nuestros propósitos, usaremos las formas normales

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=f(x,y,y')$$

para representar en general las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden.

Por ejemplo, la forma normal de la ecuación de primer orden

$$4xy'+y=x$$

es $y'=\frac{(x-y)}{4x}$; la forma normal de la ecuación de segundo orden

$$y''-y'+6y=0$$

es

$$y''=y'-6y.$$

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden algunas veces son escritas en su forma diferencial

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0.$$

Ejemplo 1.4

Si suponemos que $y=y(x)$ denota la variable dependiente en la ecuación

$$(y-x)dx+4xdy=0,$$

entonces su forma alterna es

$$4xy'+y=x$$

donde $y'=\frac{dy}{dx}$.

CLASIFICACIÓN POR LINEALIDAD

Una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden como (1.1) se dice que es lineal si F es lineal en las variables $y, y', \cdots, y^{(n)}$. Esto significa que una EDO de n-ésimo orden es lineal si tiene la forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y - g(x) = 0$$

donde cada coeficiente $a_i(x)$ sólo depende de la variable independiente x (puede tomar valor constante). Note que en una EDO lineal la variable dependiente y sus derivadas sólo aparecen elevadas a la potencia uno sin componerse con otra función.

Ejemplo 1.5

$$4xy' + y = x, \quad y''-2y' + y = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.

Ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales son

$$(1-y)y' + 2y = e^x \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} + sen(y) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$$

Definición Solución de una EDO

La solución de una EDO es cualquier función $y = \phi(x)$, definida en un intervalo abierto $I =]a, b[$ que tiene al menos n derivadas en I, las cuales al sustituirse en la ecuación (1.1) satisfacen dicha ecuación, es decir

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \tag{1.3}$$

para toda x en I en tal caso decimos que ϕ satisface la ecuación diferencial en el intervalo I.

Para nuestros propósitos suponemos que la solución ϕ es una función real de variable real. Por otro lado no podemos pensar en la solución de una ecuación diferencial ordinaria sin simultáneamente pensar en un intervalo que forma parte del dominio de la solución.

Definición INTERVALO DE DEFINICIÓN

Al mayor de los intervalos I que pueda ser dominio de la solución de una EDO también se le conoce como intervalo de definición, intervalo de existencia, intervalo de validez, o dominio de la solución y puede ser un intervalo abierto $]a, b[$, un intervalo cerrado $[a, b]$, un intervalo ilimitado $]a, \infty[$, etcétera.

Ejemplo 1.6

Notemos que la función ϕ definida por $\phi(x) = e^{0,1x^2}$ es una solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = 0,2xy$ en el intervalo $]-\infty, +\infty[$, pues $\forall x \in \mathbb{R}$ $\phi'(x) = \frac{d\phi}{dx} = 0,2xe^{0,1x^2}$, además como $\phi(x) = e^{0,1x^2}$ se tiene

$$\frac{d\phi}{dx} = 0,2x\phi(x),$$

es decir ϕ satisface la ecuación $\frac{dy}{dx} = 0,2xy$.

Por lo general denotaremos una solución de (1.1) como $y(x)$.

La solución de una EDO, puede ser dada en forma explícita o implícita como se define a continuación

Definición Solución Explícita de una EDO

Una solución explícita de la ecuación (1.1) es una función $y = \phi(x)$ que satisface (1.1) donde ϕ es explícitamente descrita en términos de x.

Definición Solución Implícita de una EDO

Se dice que una función ϕ es una solución implícita de la ecuación diferencial (1.1) en un intervalo I, si satisface la relación (1.1) para todo $x \in I$ y su regla de correspondencia no puede ser expresada de forma explícita en función de la variable independiente.

Ejemplo 1.7

La ecuación diferencial $xy' = \dfrac{1}{1+cosy}$ tiene como solución implícita a la curva:

$$y + seny = ln(Cx).$$

donde $y = y(x)$, pues al derivar implícitamente $y + seny = ln(Cx)$ respecto a x, se tiene que $y' + cos(y)y' = \dfrac{1}{x}$ de donde $(1 + cos(y))y' = \dfrac{1}{x}$ es decir $y(x)$ satisface la ecuación diferencial.

Definición Condiciones iniciales para una EDO

Las condiciones iniciales son un conjunto de n datos conocidos $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ que acompañan a una ecuación diferencial ordinaria de orden n, se espera que la función incógnita y junto con sus derivadas tomen estos valores en un punto $x = x_0$, es decir

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

1.2. Problema de Cauchy o de valor inicial.

Se entiende por problema de valor inicial a una ecuación diferencial ordinaria de una variable dependiente y de orden n, es decir

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0,$$

que además satisfaga, las siguientes n condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

para algún $x_0 \in I$ donde $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ son constantes dadas. La terminología de condiciones iniciales provienen de la física, más específicamente de la mecánica.

Ejemplo 1.8

El problema de valor inicial

$$(P) = \begin{cases} y''' + y'' + y' + y = senx \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

donde

$$F(x, y, y', y'', y''') = y''' + y'' + y' + y - senx,$$

con datos iniciales $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = -1$ y $y_2 = 1$, tiene por solución:

$$y(x) = \frac{3}{4}e^{-x} - \frac{3}{4}cosx - \frac{xsenx}{4} - \frac{xcosx}{4}$$

se deja para el lector comprobar que $y(x)$ satisface (P), mas adelante veremos como hallar esa solución.

Definición Solución general de la ecuación diferencial

La solución general de la EDO (1.1) de orden n, es una función que depende de n constantes arbitrarias las cuales al tomar cualquier valor real siguen generando soluciones de la EDO (1.1), podemos decir que este tipo de soluciones corresponden a toda una familia de funciones.

La ecuación diferencial $y''' + y'' + y' + y = senx$ tiene por solución general a:

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2cosx + c_3senx - \frac{xsenx}{4} - \frac{xcosx}{4}$$

donde c_1, c_2, c_3 son constantes arbitrarias.

Definición Solución particular de la ecuación diferencial

Una solución particular de la ecuación diferencial ordinaria (1.1) de orden n, es la que se obtiene a través de información adicional que permita asignar valores específicos a las n constantes arbitrarias que aparecen en la solución general.

En el caso del PVI (P) su solución $y(x) = \frac{3}{4}e^{-x} - \frac{3}{4}cosx - \frac{xsenx}{4} - \frac{xcosx}{4}$ es una solución particular de la ecuación $y''' + y'' + y' + y = senx$ ya que las constantes c_1, c_2 y c_3 toman los valores particulares $c_1 = 3/4, c_2 = -3/4$ y $c_3 = 0$.

Definición Solución singular de la EDO

Una solución singular es una solución que no puede extraerse de la solución general, es decir no puede obtenerse asignándole valores a las constantes arbitrarias de la solución general.

Ejemplo 1.9

Dada la EDO $y' = (y-3)^2$ se tiene:
Solución General $y(x) = 3 - \frac{1}{x+C}$ donde C es una constante arbitraria.
Solución Singular $y(x) = 3$

1.3. Ejercicios Resueltos

1. Dada la ecuación diferencial $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} = tan(x)$ establezca su orden y determine si la ecuación es lineal o no lineal.
   Solución:
   El orden es 3 debido al termino $\frac{d^3y}{dx^3}$ y la ecuación no es lineal ya que $\frac{d^2y}{dx^2}$ aparece elevado a la potencia tres, para ser lineal debería de tener de potencia uno o cero.

2. Dada la ecuación diferencial $\frac{d^4y}{dt^4} + 3t\frac{d^2y}{dt^2} + cos(t)\frac{dy}{dt} + 5y = e^{3t}$ establezca su orden y determine si la ecuación es lineal o no lineal.
   Solución:

   El orden es 4 debido al termino $\frac{d^4y}{dt^4}$, además la ecuación es lineal pues la incógnita $y = y(x)$ y sus derivadas aparecen elevadas a la potencia uno.

3. Compruebe que la función definida por $y(x) = 1 + \frac{1}{4}(x^2 + C)^2, \forall C > 0$ es solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{y-1}$.

Solución:
Al derivar la función y con respecto a x tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(x^2+C\right)(2x)}{2} = x\left(x^2+C\right),$$

por otro lado $2x\sqrt{y-1} = 2x\sqrt{\left[1+\frac{1}{4}\left(x^2+C\right)^2\right]-1} = 2x\left(\frac{x^2+C}{2}\right)$, consecuentemente $\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{y-1}$ entonces $y(x)$ satisface la ecuación diferencial dada.

4. Compruebe que la función definida por $y(x) = tan(x) - x - 3$ es solución del PVI $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = (x+y+3)^2 \\ y(0) = -3 \end{cases}$.

   Solución:

   Al derivar la función y con respecto a x tenemos

$$\frac{dy}{dx} = sec^2(x) - 1 = tan^2(x),$$

   por otro lado $(x+y+3)^2 = (x+[tan(x)-x-3]+3)^2 = tan^2(x) = \frac{dy}{dx}$, consecuentemente $\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{y-1}$ entonces y satisface la ecuación diferencial dada, además $y(0) = tan(0) - 0 - 3 = -3$.
   Por lo tanto y satisface el PVI.

5. Compruebe que la función definida por $y(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)^2}{4} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$ es solución del PVI $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

   Solución:
   Al derivar la función y con respecto a x tenemos que

   - Si $x > 2$ enonces $\frac{dy}{dx} = \frac{(x-2)}{2}$, por otro lado $\sqrt{y} = \sqrt{\frac{(x-2)^2}{4}} = \frac{x-2}{2}$.
   - Si $x < 2$ enonces $\frac{dy}{dx} = 0$, por otro lado $\sqrt{y} = 0$.
   - Si $x = 2$ analizamos las derivadas laterales
     - $y'_+(2) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{y(2+h)-y(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{\frac{(2+h-2)^2}{4}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{h^2}{4h} = 0$
     - $y'_-(2) = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{y(2+h)-y(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{0-0}{h} = 0$

     luego $y'(2) = 0$, por otro lado $\sqrt{y(2)} = 0$, consecuentemente

$$\frac{dy(x)}{dx} = \sqrt{y(x)}$$

   para todo $x \in \mathbb{R}$ e $y(0) = 0$. Por lo tanto, $y(x)$ es solución del PVI dado.

6. Sea la ecuación diferencial: $3y^2y' = 2x - 2$.

   a) Clasififique la EDO .

   b) ¿Es la función definida por $y(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x + c}$ solución de la EDO ? c es una constante arbitraria.

   Solución:

   a) La ecuación diferencial $3y^2y' = 2x - 2$ es:
   De primer orden, pues la máxima derivada que aparece es la primera derivada, no lineal, ya que la variable dependiente $y = y(x)$ está elevado al cuadrado, además como el segundo miembro de la igualdad $f(x) = x - 2 \neq 0$ es no homogénea.
   Por lo tanto, la EDO es una ecuación de primer orden, no lineal y no homogénea.

b) Siendo c una constante arbitraria, $y(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x + c}$ si es una solución, en efecto, al derivar respecto de x se tiene

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3}\left(x^2 - 2x + c\right)^{-2/3}(2x-2) = \frac{1}{3}\frac{1}{(\sqrt[3]{x^2-2x+c})^2}(2x-2) \\ &= \frac{2x-2}{3y^2} \end{aligned}$$

Luego, $3y^2\,y' = 2x - 2$.

7. Verifique si la función definida por

$$y(x) = c_1 cos(x) + c_2 sen(x) + c_3 e^{-x} + c_4 e^x - x$$

es solución de la ecuación diferencial $y^{(4)} - y = x$.

Solución:

Al derivar $y(x)$ cuatro veces respecto de x se tiene

$$\begin{aligned} y &= c_1 cos(x) + c_2 sen(x) + c_3 e^{-x} + c_4 e^x - x \\ y' &= -c_1 sen(x) + c_2 cos(x) - c_3 e^{-x} + c_4 e^x - 1 \\ y'' &= -c_1 cos(x) - c_2 sen(x) + c_3 e^{-x} + c_4 e^x \\ y''' &= c_1 sen(x) - c_2 cos(x) - c_3 e^{-x} + c_4 e^x \\ y^{(4)} &= c_1 cos(x) + c_2 sen(x) + c_3 e^{-x} + c_4 e^x \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} y^{(4)} - y &= \left(c_1 cos(x) + c_2 sen(x) + c_3 e^{-x} + c_4 e^x\right) - \\ &\quad \left(c_1 cos(x) + c_2 sen(x) + c_3 e^{-x} + c_4 e^x - x\right) \\ &= x \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y(x) = c_1 cos(x) + c_2 sen(x) + c_3 e^{-x} + c_4 e^x - x$ si es solución de la EDO.

8. Verifique si la función definida por

$$y(x) = -3x + e^{-2x} + 3e^{2x}$$

es solución del problema de valor inicial $y'' - 4y = 12x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$.

Solución:

Notemos que

$$\begin{aligned} y(x) = -3x + e^{-2x} + 3e^{2x} &\quad\rightarrow\quad y(0) = -3(0) + e^{-2(0)} + 3e^{2(0)} = 4, \\ y'(x) = -3 - 2e^{-2x} + 6e^{2x} &\quad\rightarrow\quad y'(0) = -3 - 2e^{-2(0)} + 6e^{2(0)} = 1 \end{aligned}$$

es decir la solución dada cumple con las condiciones iniciales $y(0) = 4, y'(0) = 1$. Además, $y''(x) = 4e^{-2x} + 12e^{2x}$ y al reemplazar en la EDO y simplificando términos semejantes, se tiene:

$$y'' - 4y = 4e^{-2x} + 12e^{2x} - 4\left(-3x + e^{-2x} + 3e^{2x}\right) = 12x$$

Luego, $y(x) = -3x + e^{-2x} + 3e^{2x}$ satisface el PVI dado.

9. Verifique si la familia de curvas $3x^2 + 4y^2 = c$ donde $0 < c$, es solución implícita de la EDO

$$4yy' = -3x.$$

Solución:

Para verificar si la familia de curvas $3x^2 + 4y^2 = c$ es solución de EDO derivemos implícitamente considerando $y = y(x)$, así tenemos:

$$
\begin{aligned}
3x^2 + 4y^2 = c \rightarrow 6x\frac{dx}{dx} + 8y\frac{dy}{dx} &= 0 \\
6x + 8yy' &= 0
\end{aligned}
$$

de la última igualdad se tiene, $4yy' = -3x$.
Por lo tanto, $3x^2 + 4y^2 = c$ es una familia de soluciones implícitas de la EDO $4yy' = -3x$.

1.4. Ejercicios Propuestos

1. Establezca el orden de la ecuación diferencial ordinaria, luego determine si la ecuación es lineal o no lineal.

   a) $(1-y)y'' - 4xy' + 5y = cos(x)$
   b) $x\frac{d^3y}{dx^3} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$
   c) $t^5y^{(4)} - t^3y'' + 6y = 0$
   d) $\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} + u = cos(r+u)$
   e) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$
   f) $\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{k}{R^2}$
   g) $(sen\theta)y''' - (cos\theta)y' = 2$
   h) $\ddot{x} - \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{3}\right)\dot{x} + x = 0$

2. Compruebe que la función dada es una solución de la ecuación diferencial .

   a) $2y' + y = 0;\ y = e^{-x/2}$
   b) $\frac{dy}{dt} + 20y = 24;\ y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$
   c) $y'' - 6y' + 13y = 0;\ y = e^{3x}cos(2x)$
   d) $y'' + y = tan(x);\ y = -(cos(x))\,ln(secx + tanx)$

3. Sea la ecuación diferencial: $x^2y'' - 2y = 0$.

   a) Clasifique la EDO.
   b) ¿Es la función definida por $y(x) = c_1x^2 + \dfrac{c_2}{x}$ solución de la EDO ? c_1 y c_2 constantes arbitrarias.

4. Compruebe que la función definida por

$$
y(x) = \begin{cases} -x^2 & si \ \ x < 0 \\ x^2 & si \ \ x \geq 0 \end{cases}
$$

es una solución de la ecuación diferencial $xy' - 2y = 0$ en $]-\infty, +\infty[$.

Capítulo 2

Modelos Matemáticos

Con frecuencia, es necesario expresar matemáticamente el comportamiento de diversos sistemas o fenómenos de la vida real, los cuales se manifiestan en tiempo continuo. Estos fenómenos pueden abarcar desde situaciones físicas hasta aspectos sociológicos o económicos, entre otros. La descripción matemática de un sistema o fenómeno se conoce como modelo matemático y su construcción se realiza con objetivos específicos.

Dentro de las herramientas matemáticas utilizadas para describir situaciones reales, se encuentran las ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales modelan problemas de razones de cambio en tiempo continuo. Los científicos a menudo recurren a ellas para representar cambios en distintos fenómenos, buscando que sus modelos se aproximen de manera precisa a la realidad.

Los pasos recomendados para la construcción de estos modelos son los siguientes:

1. Identificación del problema a resolver.
2. Comenzar con un modelo simple, estableciendo un conjunto de suposiciones razonables o hipótesis sobre el sistema que se está describiendo. Estas hipótesis incluyen las leyes empíricas aplicables al sistema y se centran en aspectos específicos del fenómeno a modelar.
3. Identificación de variables y constantes importantes, así como determinación de sus relaciones.
4. Determinación de una ecuación que exprese las relaciones entre las variables y constantes identificadas en el paso anterior.
5. Verificación y perfeccionamiento del modelo.

En caso de que las predicciones obtenidas sean deficientes, se tiene la opción de modificar las hipótesis con el fin de obtener un modelo que refleje de manera más exacta la realidad observada en el fenómeno a describir.

Observación Razón de cambio

Si $y(t)$ denota una cantidad física, entonces $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ denota la razón de cambio de y respecto a la variable t . Esta razón de cambio determina que tan rápido o lento cambia y con respecto a la variable t . Mas precisamente dada la función derivable f la razón o rapidez de cambio instantánea con respecto a la variable t cuando $t = t_0$ se obtiene calculando

$$\frac{df(t_0)}{dt} = f'(t_0).$$

- Si $\dfrac{df(t_0)}{dt} > 0$ diremos que cuando $t = t_0$ la función f aumenta o crece a una razón de $\left|\dfrac{df(t_0)}{dt}\right|$.
- Si $\dfrac{df(t_0)}{dt} < 0$ diremos que cuando $t = t_0$ la función f disminuye o decrece a una razón de $\left|\dfrac{df(t_0)}{dt}\right|$.

2.1. Dinámica Poblacional

Modelo maltusiano: Uno de los primeros intentos para modelar el crecimiento de la población humana por medio de las matemáticas fue realizado en 1798 por el economista inglés Thomas Malthus. Básicamente la idea detrás del modelo de Malthus es la suposición de que la razón con la que la población de un país cambia en un cierto tiempo es proporcional a la población total del país en ese tiempo. En otras palabras, entre más personas estén presentes al tiempo t, habrá más personas en el futuro. En términos matemáticos, si $P(t)$ denota la población en el tiempo t, entonces esta suposición se puede expresar como

$$P'(t) = kP$$

donde k es una constante de proporcionalidad. En condiciones ideales este modelo se ajusta, al menos durante cortos períodos de tiempo, al estudio de algunas poblaciones.
Modelo logístico: El modelo de crecimiento maltusiano para una población tiene carencias importantes ya que no tiene en cuenta los posibles factores limitantes del mismo. En dicho modelo se supone que la tasa de crecimiento intrínseca (k) es constante; lo usual es que dicha tasa no sea constante y dependa de la población y de las condiciones ambientales. Es razonable esperar que el habitat tenga una capacidad de alojamiento, M, que representa la cantidad máxima de individuos que puede albergar. Inicialmente, cuando hay pocos individuos y muchos recursos, la población tendrá un crecimiento exponencial que se irá amortiguando hasta llegar a M, y por encima de dicho valor decrecerá. La siguiente ecuación, propuesta por el matemático y biólogo belga P. F. Verhulst hacia 1840, tiene en cuenta estas observaciones.

$$P'(t) = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right).$$

Esta ecuación diferencial se conoce como ecuación logística. Observe que para valores pequeños de la población $P(t)$ se tiene que $P'(t) \cong rP(t)$, además para $0 < P(t) < M$ se tiene que $P'(t) > 0$, lo que indica que la población crece, y para $P(t) > M$ se tiene que $P'(t) < 0$ lo que indica que la población decrece. Se ha comprobado que la ecuación logística predice con bastante exactitud el crecimiento de ciertos tipos de bacterias, protozoarios, pulgas de agua y moscas de la fruta.

2.2. Dinámica de crecimiento restringido de un individuo:

Se trata de un modelo de crecimiento individual que suele aplicarse a peces de distintas especies. Fue propuesto por el biólogo austriaco L. von Bertalanffy (1901-1972). Sea $L(t)$ la longitud de un pez de edad t, y A la talla máxima de su especie. En este modelo se supone que la tasa de crecimiento es proporcional a la diferencia entre la longitud actual y la longitud máxima.

$$L'(t) = k(A - L(t))$$

siendo $k > 0$, la constante de proporcionalidad, propia de cada especie. La velocidad de crecimiento es siempre positiva pero disminuye también con el tiempo. Curiosamente, este modelo tiene la misma estructura que la ley de enfriamiento/calentamiento de Newton, que dice que la rapidez con la que cambia la temperatura, T , de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura ambiente T_a. Es decir,

$$T'(t) = r\,(T(t) - T_a)$$

Esta ley, fue determinada experimentalmente por Isaac Newton.

2.3. Ley de Mezclas

En los problemas de mezclas se desea calcular la cantidad de sustancia $x(t)$ que hay en un recipiente en cualquier instante t. La tasa de cambio de la sustancia presente en la mezcla satisface la relación

$$\frac{dx}{dt} = R_1 - R_2$$

Donde
R_1 = Tasa de entrada de la sustancia.
R_2 = Tasa de salida de la sustancia.

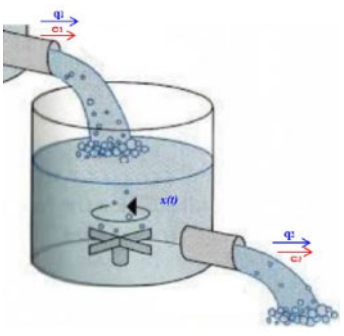


Figura 2.1: Mezcla de sustancias en un tanque.

Estas cantidades se definen por $R_1 = q_1 c_1$ y $R_2 = q_2 c_2$ donde

- $q_1 =$ velocidad del flujo entrante
- $c_1 =$ Concentración de la sustancia en la entrada.
- $q_2 =$ velocidad del flujo saliente.
- $c_2 =$ Concentración de la mezcla que sale y esta dado por $\frac{x}{V}$ donde $V = V(t)$ es el volumen total de la mezcla en el tiempo t

Ejemplo 2.1

Un tanque que tiene capacidad para 4000 L, contiene inicialmente 1 000 L de agua con 5 kg de sal disuelta. Se bombea salmuera al tanque a razón de 20 L/min y la solución uniformemente mezclada se bombea hacia afuera a razón de 12 L/min. Considerando que la concentración de la solución que entra es de 0.02 kg/L, determinar el PVI que permite calcular la cantidad de sal que hay en el tanque después de t minutos.
Solución: Sea $Q(t)$ la cantidad de sal que hay en el tanque en el instante t, entonces

$$\frac{d}{dt}Q(t) = \text{(rapidez con que entra la sal) - (rapidez con que sale la sal)}$$

- La rapidez del flujo entrante es $20L/min$ entonces $q_1 = 20L/min$.
- La concentración de sal que entra es $0{,}02kg/L$ entonces $c_1 = 0{,}02kg/L$.
- La rapidez con que sale la solución del tanque es $12L/min$ entonces $q_2 = 12L/min$.

Ya que entra solución a razón de $20L/min$ y sale solución a razón de $12L/min$, entonces quedan en el tanque $8L$ de solución en cada minuto que transcurre. Después de t minutos habrán quedado almacenados en el tanque $8t$ L de solución, los cuales se sumarán a los $1000L$ de solución iniciales. Es decir, después de t minutos habrá en el tanque $(1000 + 8t)$ L de solución en los que estarán disueltos $Q(t)$ kg de sal, por lo cual la concentración de salida de sal c_2 en la solución es $\dfrac{Q(t)}{1000 + 8t}$ kg/L entonces la tasa de cambio de la cantidad de sal que hay en el tanque en el instante t es

$$\frac{d}{dt}Q(t) = (20)(0{,}02) - 12\frac{Q(t)}{1000 + 8t}.$$

Además, por dato del problema inicialmente (t=0) se tiene 5Kg de sal, es decir

$$Q(0) = 5$$

Las dos últimas expresiones constituyen un PVI que permite calcular la cantidad de sal en el tanque en el instante t.

$$(PVI)\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = 0{,}4 - 12Q \\ Q(0) = 5 \end{cases}$$

2.4. Un cuerpo cayendo verticalmente

Consideremos un objeto de masa m que cae de una altura H y sea v la velocidad del objeto, si las únicas fuerzas que actúan sobre el cuerpo son la gravedad g y la resistencia del aire f_r, la fuerza total F sobre la masa m, de acuerdo a la segunda ley de Newton es $F = m.a$, donde a es la aceleración del objeto, entonces

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

pues $\frac{dv}{dt}$ es la aceleración del objeto en caída libre.

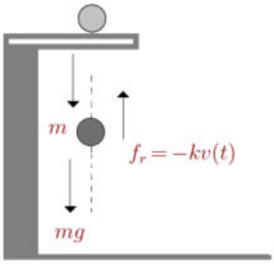


Figura 2.2: Cuerpo en caída libre.

Por otro lado, la resistencia del aire en contra del objeto f_r, es proporcional a la velocidad del objeto, es decir

$$f_r = -kv,$$

donde k es una constante positiva (el signo menos es porque la resistencia actúa en sentido contrario a la dirección del movimiento) entonces la fuerza total F a considerar sobre el objeto es

$$F = mg - kv,$$

por lo que

$$mv' = gm - kv$$

reescribiendo esta ecuación obtenemos la ecuación diferencial de primer orden

$$v' = g - \frac{kv}{m}$$

donde la incógnita es la velocidad v del objeto cayendo.

Ejemplo 2.2

Una pequeña gota de aceite de $0,2g$ de masa cae en el aire desde el reposo. La resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea y es de 160 dinas (din) cuando la gota cae a 40 cm/s. Determine el PVI que permita calcular la velocidad de la gota en el instante t.

Solución:

Para resolver este problema , recordemos que

$$1dina = 1gr \cdot cm/s^2 \quad y \quad g = 9,8m/s^2 = 980cm/s^2$$

Luego ya que la gota cae con una fuerza de resistencia del aire f_r proporcional a la velocidad instantánea tenemos que

$$f_r = kv \quad \text{y} \quad v' = g - \tfrac{kv}{m}$$

Además, dado que $f_r = 160dinas$ cuando $v = 40cm/s$ tendremos que $k = 4$, entonces la EDO generada para poder calcular la velocidad de la gota será

$$v' = 980 - \frac{4v}{0,2}$$

y dado que la gota parte del reposo tenemos la condición inicial $v(0) = 0$. Consecuentemente, el PVI que nos permite calcular la velocidad de la gota en el instante t viene dado por

$$\begin{cases} v' = 980 - 20v \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

2.5. Un Modelo de Ajuste de Precios

Sea $S(p)$ el número de unidades de un cierto producto suministrado al mercado a un precio de p dólares por unidad y sea $D(p)$ el número correspondiente de unidades demandadas por el mercado al mismo precio. Definiremos

- Escasez: cuando la cantidad demandada es mayor que la cantidad ofrecida, es decir

$$D(p) - S(p) > 0$$

- Excedente: cuando la cantidad demandada es menor que la cantidad ofrecida, es decir

$$D(p) - S(p) < 0$$

En circunstancias estáticas, el equilibrio del mercado ocurre en el precio donde la demanda iguala la oferta. Sin embargo, ciertos modelos económicos consideran un tipo de economía más dinámica en la que se supone que el precio de un bien puede variar según los excesos de oferta y demanda (escasez, excedente).

Notemos que cuanto mayor sea la escasez o el excedente en el mercado, mayor será la respuesta en el cambio de precio y viceversa. Por ejemplo, si la $D(p)$ es mucho mayor que $S(p)$, entonces definitivamente el precio aumentará rápidamente y será en dirección ascendente, y si $S(p)$ es mucho mayor que $D(p)$, entonces en este caso el precio caerá bruscamente. Es decir, los ajustes de precios son directamente proporcionales al exceso de demanda. Consecuentemente, deducimos que la tasa de cambio del precio del producto con respecto al tiempo, es directamente proporcional a la disparidad entre $S(p)$ y $D(p)$ lo que será expresado a través de la ecuación

$$\frac{dp}{dt} = k\,(D - S)$$

donde k es una constante positiva. Este modelo es llamado Modelo de ajustes de precios de Evans.

Ejemplo 2.3

Supongamos que el precio $p(t)$ de fresas por kg. varía de tal manera que su tasa de cambio con respecto al tiempo es proporcional a la escasez $D - S$, donde $D(p)$ y $S(p)$ son las funciones de demanda y oferta lineales $D = \frac{1}{2} + \frac{(1-t)^2}{(1+t^2)} - \frac{p}{2}$ y $S = \frac{1}{2} + \frac{p}{2}$. Determine el PVI que permita calcular el precio del bien en cualquier instante t, si el precio inicial por kilo es de $\$1$.

Solución:

Tenemos que

$$\frac{dp}{dt} = k(D - S)$$

luego

$$\frac{dp}{dt} = k\left[\frac{1}{2} + \frac{(1-t)^2}{(1+t^2)} - \frac{p}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{2}\right)\right]$$

así el PVI es

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = k\left(\frac{(1-t)^2}{(1+t^2)} - p\right) \\ p(0) = 1 \end{cases}$$

2.6. Un modelo de crecimiento económico - Modelo básico de Solow

El modelo que examinaremos se denomina “Modelo de Solow”, en honor al economista y premio nobel Robert Solow, que lo creó en 1956. El modelo de Solow es un marco teórico en economía que explora los determinantes del crecimiento económico a largo plazo de una economía y se centra en la cantidad de capital físico que tiene cada trabajador. Este modelo se relaciona con las ecuaciones diferenciales a través de su enfoque dinámico para analizar el crecimiento económico a lo largo del tiempo.

El crecimiento económico se refiere al aumento a largo plazo en la producción de bienes y servicios de una economía. Se puede medir de varias formas, pero comúnmente se utiliza el Producto Bruto Interno (PBI) real per cápita como indicador de crecimiento económico que es una medida que ajusta el PBI nominal por inflación y lo divide por la población total. Esto permite comparar el nivel de producción de una economía en diferentes períodos de tiempo, teniendo en cuenta los cambios en los precios y la población. La fórmula para calcular el PIB real per cápita es la siguiente:

$$\text{PBI real percapita} = \frac{\text{PBI real}}{Población}$$

Donde:

- PBI real es el valor total de la producción de bienes y servicios de una economía ajustado por inflación.
- Población es el número total de habitantes en la economía.

El modelo de crecimiento económico de Solow intenta prever la tendencia del producto potencial en el largo plazo, analizándolo mediante la relación entre la acumulación de capital, el ahorro, la fuerza de trabajo y el crecimiento. Para su mejor comprensión, se definen las variables con las cuales se trabaja:

- Tiempo (variable continua): t
- Fuerza de trabajo: L
- Producto total: Q
- Producto per cápita: $q = Q/L$
- Acumulación de capital: K
- Capital per cápita: $k = K/L$
- Inversión: I
- Ahorro: S
- Propensión marginal al ahorro: s

Todas las variables definidas son funciones del tiempo t , aunque ello será omitido en la notación, por razones de simplicidad. A seguir se construirá el modelo Solow básico (usando ecuaciones diferenciales) que permita describir como cambian las variables económica claves, como el capital K, la producción Q y la inversión I, en función del tiempo t para esto tendremos en cuenta los siguientes supuestos (simplificados):

1. La existencia de un equilibrio dinámico, o sea no existe desequilibrio y ni desempleo.
2. El punto de partida es la función de producción Q definida por

   $$Q = F(K, L)$$

   Con una función de producción F que nos dice como se transforman el trabajo L y el capital K en producción.
3. La población y la fuerza de trabajo L son iguales. Hay una relación constante entre tasa de crecimiento y fuerza de trabajo, es decir: $L'(t) = nL(t)$. Se la supone independiente de otras variables del modelo, y determinada por factores biológicos y otros factores exógenos.

4. La función de producción Q tiene rendimientos constantes a escala. Esto significa que la función de producción global es homogénea de grado uno, es decir:

$$Q = F(K, L) = LF(K/L, 1) = Lf(k).$$

Así se tiene que

$$q = f(k),$$

donde valores crecientes de k deben producir valores crecientes de q , pero a una tasa decreciente.

5. La economía es cerrada al comercio con otros países, y no existe sector público. Así, en condiciones de equilibrio, la inversión interna I será igual al ahorro nacional S

$$I = S.$$

6. La variación del stock de capital K es la diferencia entre la cantidad de inversión (I) y la cantidad de depreciación (D), es decir

$$\frac{dK}{dt} = I(t) - D(t)$$

A su vez, suponemos que se ahorra S una parte constante de la producción entonces

$$I(t) = S(t) = sQ(t),$$

también suponemos que en cada periodo se deprecia una porción constante del stock de capital entonces $D(t) = \delta K(t)$. Combinando las tres ecuaciones anteriores, podemos formular una ecuación que represente la evolución del capital :

$$\frac{dK}{dt} = sQ(t) - \delta K(t)$$

puesto que $Q = F(K, L)$ entonces obtenemos

$$\frac{dK}{dt} = sF(K, L) - K$$

ahora vamos a obtener la relación entre las variables en términos per capita dividiento la anterior ecuación entre L:

$$\frac{K'}{L} = \frac{sQ}{L} - \frac{\delta K}{L}$$

ya que $k' = \dfrac{K'L - KL'}{L^2}$ tenemos que

$$k' = \frac{K'}{L} - \frac{K}{L}\frac{L'}{L} = \frac{K'}{L} - kn$$

luego $k' + kn = \dfrac{K'}{L} = sq - \delta k$, consecuentemente se obtiene

$$k' = sf(k) - (n + \delta)k$$

Esta es la ecuación fundamental de la acumulación de capital, es una ecuación diferencial de primer orden de incógnita k, cuya solución $k(t)$ describe la trayectoria temporal del capital per capita. Notese que finalmente la solución de esta EDO dependerá de la función de producción global F que se use.

Ejemplo 2.4

Investigaciones efectuadas por un equipo de analistas permiten admitir que la función de producción Q de una economía esta dada por $Q = K^{3/4}L^{1/4}$ donde K es la acumulación de capital y L la fuerza

de trabajo . La tasa de crecimento de la fuerza laboral es n =0.05; la propensión al ahorro es $s = 0,2$ y la depreciación de capital es δ =0.03. Utilizando el modelo de crecimiento de Solow modele el PVI que permita hallar la trayectoria temporal de acumulación de capital per capita k si inicialmente la acumulación de capital per capita es $k_0 = 25$, además clasifique la EDO obtenida según su linealidad.
Solución:
Usando el modelo de crecimiento de Solow tenemos que

$$k' = 0,2f(k) - 0,08k$$

Además

$$f(k) = \frac{F(K,L)}{L} = \frac{K^{3/4}L^{1/4}}{L} = \left(\frac{K}{L}\right)\left(\frac{L}{K}\right)^{1/4} = kk^{-1/4} = k^{3/4}$$

la EDO queda en la forma $k' = 0,2k^{3/4} - 0,08k$ y dado que el capital inicial percapita es 25 tenemos que el PVI correspondiente tiene la forma

$$\begin{cases} k' = 0,2k^{3/4} - 0,08k \\ k(0) = 25 \end{cases}$$

Observamos que la EDO obtenida es una EDO de primer orden no lineal.

2.7. Modelo de concentración de fármacos de un compartimento

La farmacodinámica engloba la relación entre la concentración del fármaco en el punto de acción y el consiguiente efecto, abarcando tanto la duración como la intensidad de los efectos terapéuticos y adversos. Esta relación está influenciada por diversas variables, entre las cuales se destaca la duración, entendida como el lapso durante el cual el fármaco permanece en el sitio receptor, determinando así la persistencia de su efecto. Asimismo, la tolerancia juega un papel crucial al indicar que una concentración creciente con el tiempo en el receptor puede conllevar a una disminución en la eficacia del fármaco.

Por otro lado, la ciencia médica nos revela que los organismos humanos experimentan un aumento en su metabolismo, lo que conlleva a una eliminación más rápida del fármaco y por ende, a una reducción en su permanencia en el organismo. Además, la manera en que los fármacos son metabolizados por el cuerpo varía según el tipo y el modo de acción de cada uno.

Con este entendimiento de la farmacodinámica, se nos abre la posibilidad de analizar sistemas matemáticos que permitan predecir la concentración de fármacos en la sangre y los tejidos en cualquier momento dado, así como determinar su tasa de eliminación. Esto se logra a través de modelos de compartimentos . Los compartimentos en un modelo matemático representan los lugares donde el fármaco viaja por todo el cuerpo, por ejemplo, el torrente sanguíneo, los tejidos de los órganos o la orina. La forma más simple será el modelo de un compartimento, en este caso, el fármaco se administra en el compartimento es decir entra en el plasma (torrente sanguíneo) y luego se elimina de este.

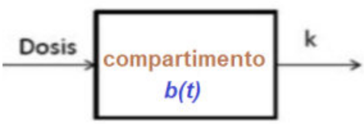


Figura 2.3: Concentración de una fármaco.

La eliminación de muchos fármacos del cuerpo sigue una cinética de primer orden ideal, lo que significa que su tasa de eliminación es proporcional a su la cantidad actual, por lo que consideramos la ecuación

$$\frac{db}{dt} = -kb$$

donde

- k es la tasa de decrecimiento ($k > 0$),
- b es la cantidad actual del fármaco en el torrente sanguíneo , y
- db/dt es la tasa de cambio de la concentración de fármaco respecto al tiempo.

Utilizando este modelo, podemos determinar la cantidad del fármaco en la sangre en cualquier momento dado cuando el fármaco pasa un compartimento(torrente sanguíneo). En este caso, se espera que el fármaco se elimine por completo del torrente sanguíneo.

Por otro lado, múltiples inyecciones del fármaco pueden ser modeladas a lo largo del tiempo utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). En estos casos, un paciente recibiría dosis de fármaco a intervalos regulares y entre cada inyección, el fármaco sería metabolizado. Esto crea un modelo en el que una función discreta es parte de una función continua . Es decir consideramos la ecuación,

$$\frac{db}{dt} = f(t) - kb(t)$$

donde

$f(t)$ = patrón de dosificación de inyecciones en el tiempo t (Este es un valor discreto ya que las dosis permanecerán constantes)

Es interesante destacar que en ausencia de otra inyección, es decir $f(t) = 0$, el modelo funcionará de la misma manera que el modelo anterior. Sin embargo, si $f(t) \neq 0$ las inyecciones constantes hacen que la concentración del fármaco vuelva a aumentar hasta el valor inicial $b(0) = b_0$ y el ciclo de decaimiento se reinicia.

2.8. Modelo de Plaga de Insectos

Considera una plaga de insectos, que está sujeta a la depredación por parte de aves. Es un hecho muy conocido y bien documentado que es posible observar los llamados brotes de la población de insectos, cuando el número de insectos aumenta desde casi indetectable hasta extremadamente alto. Es posible sugerir un modelo matemático minimalista en forma de una EDO de primer orden, que exhiba este fenómeno definiendo $N(t)$ como la población de insectos en el instante t, vamos a suponer que la dinámica de la población de insectos está gobernada por la EDO de la forma

$$\frac{dN}{dt} = F(N) - P(N)$$

donde $F(N)$ es la tasa de crecimiento de la población en ausencia de depredadores y $P(N)$ describe la muerte de los insectos debido al efecto de las aves. Somos libres de elegir cualquier forma funcional razonable para $F(N)$ y $P(N)$. Dado que estamos buscando un modelo lo más simple posible, tomemos la ecuación logística para $F(N)$, es decir

$$F(N) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

donde $r > 0$ es la tasa de crecimiento per cápita cuando N está cerca de cero y K es la capacidad de carga poblacional. Sabemos que si no hay depredadores, entonces $\lim_{t\to+\infty} N(t) = K$ para cualquier condición inicial.

Por otro lado, los biólogos tienen ciertos argumentos sobre la forma de $P(N)$ que es una función no lineal de N pues no es solo que cuanto más insectos hay, más rápido son asesinados por las aves, las aves suelen tener un comportamiento un poco más complicadas que eso. Es decir, si N es un número pequeño las aves están volando buscando comida y les es difícil encontrar insectos. Es como si los insectos estuvieran pasando desapercibidos. Así que simplemente las aves deciden, bueno, voy a comer algo más y lo hacen. Entonces, la depredación no es muy alta. Pero luego, una vez que aumenta el número de insectos, van allí y comienzan a comer. Y entonces, una vez que hay una cierta densidad crítica de insectos, que se traduciría en esta imagen en este número A, entonces comienzan a ir tras ellos.

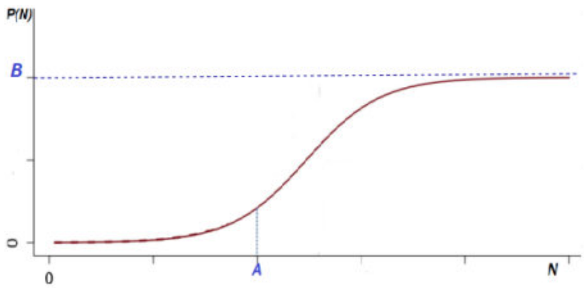


Figura 2.4: Función $P(N)$ no lineal.

Así la tasa de mortalidad aumenta, cuanto mas insectos hay morirán más rápido hasta que en algún momento los pájaros están comiendo tan rápido como pueden que se saturan en algún nivel que vamos a llamar B.

Notemos que si alalizamos la gráfica de $P(N)$ versus N, tiene esta forma no lineal interesante, que comienza siendo muy pequeño y permanece muy pequeño hasta llegar a un número típico, al que llamaremos A, donde se enciende bruscamente. Después de eso, en algún punto, se satura y alcanza un nivel que llamaremos B. Luego, hay varias funciones que tienen este tipo de forma, pero por conveniencia algebraica, lo escribiremos así,

$$P(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2}.$$

Se puede ver que $P(N)$ tiene las propiedades que mencionamos. Por lo tanto, el modelo que describe el comportamiento de crecimiento de insectos estará dado por

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{BN^2}{A^2 + N^2}.$$

2.9. Ejercicios Resueltos

1. Un tanque inicialmente contine 200 litros de agua con 6 kg de sal. Una mezcla de agua conteniendo sal entra al tanque con una concentración de $0{,}2t + 0{,}4sen\,(4t)\,kg/l$ y una velocidad de $10l/min$ y la mezcla sale del tanque a la misma velocidad, considerando $Q\,(t)$ la cantidad de sal en el tanque en el instante t. Modele el PVI que permita calcular $Q\,(t)$.

   Solución:

   Siendo $Q\,(t)$ la cantidad de sal que hay en el tanque en el instante $t,$ se tiene

   $$\frac{dQ}{dt} = R_1 - R_2,$$

   donde
   R_1 : rapidez con que entra la sal.

   R_2 : rapidez con que sale la sal.

   Además, note que la velocidad del fluido que entra es la misma con la que sale el fluido, consecuentemente el volumen de la mezcla en el tanque permanece constante en cada instante de tiempo t. Así

   $$R_1 = (0{,}2t + 0{,}4sen\,(4t))\,10 = 2t + 4sen\,(4t) \quad \text{y} \quad R_2 = 10 \cdot \tfrac{Q(t)}{200} = \tfrac{Q(t)}{20},$$

Además, por condición del problema inicialmente hay $6kg$ de sal luego $Q(0) = 6$. Luego el PVI que nos permite calcular la cantidad de sal en el tanque en el instante t estará dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = 2t + 4sen(4t) - \dfrac{Q(t)}{20} \\ \\ Q(0) = 6 \end{cases}$$

2. Un tanque contiene $120L$ de agua y $260gr$ de sal. El agua conteniendo una concentración de $2 + e^t cos(5t)\,gr/L$ fluye al tanque a una razón de $5L/min$, la solución uniformemente mezclada en el tanque fluye hacia afuera a la misma razón. Modele el PVI para encontrar la cantidad de sal $Q(t)$ en el tanque en instante t.
   Solución:
   La razón de cambio de la cantidad de sal en el tanque en el instante t, es

   $$\frac{dQ}{dt} = R_1 - R_2$$

   donde
   R_1 : rapidez con que entra la sal.

   R_2 : rapidez con que sale la sal.
   Así

   $$Q'(t) = 5\left(2 + e^t cos(5t)\right) - 5\frac{Q(t)}{120},$$

   además por dato del problema en el instante $t = 0$, $Q(0) = 160$. Luego el PVI que hay que resolver para encontrar $Q(t)$ es

   $$\begin{cases} Q'(t) = 5\left(2 + e^t cos(5t)\right) - \frac{Q(t)}{24} \\ Q(0) = 260 \end{cases}$$

3. Un cuerpo que pesa 8 kg cae desde el reposo, suponiendo que la resistencia del aire es numéricamente igual a $2v(t)$, donde $v(t)$ es la velocidad instantánea en m/s. Modele el PVI que permite calcular la velocidad del cuerpo en cualquier instante. Considere $g = 9{,}8m/s^2$.
   Solución:

   Por dato del problema la resistencia del aire es $f_r = 2v$, luego la fuerza total F a considerar sobre el objeto es $F = mg - f_r$ luego

   $$mv' = gm - 2v$$

   al reemplazar $m = 8$ y $g = 9{,}8$ tenemos

   $$8v' = (9{,}8)(8) - 2v$$

   Así, $v' = 9{,}8 - \left(\frac{1}{4}\right)v$. Por lo tanto, el PVI que nos permite calcular la velocidad v esta dado por

   $$\begin{cases} v' = 9{,}8 - \left(\frac{1}{4}\right)v \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

4. El área de la superficie de un globo aumenta a una razón inversamente proporcional a la raíz cuadrada del volumen del globo. Modele el PVI que permita calcular el radio del globo en cualquier instante, si se sabe que a los 5 segundos de comenzar a inflarse el radio del globo es de 7cm.
   Solución:
   Sean A : área superficial del globo y V : el volumen del globo, entonces por condición del problema

   $$A' = \frac{k}{\sqrt{V}}$$

si r es el radio del globo entonces $A = 4\pi r^2$ y $V = \frac{4\pi r^3}{3}$, luego al derivar A con respecto del tiempo t, obtenemos $A' = 8\pi r r'$ entonces

$$8\pi r r' = \frac{k}{\sqrt{\frac{4\pi r^3}{3}}} \Longrightarrow r' = \frac{k\sqrt{3}}{16\sqrt{\pi} r^{5/2}}$$

entonces el PVI es

$$\begin{cases} r' = \frac{k\sqrt{3}}{16\sqrt{\pi} r^{5/2}} \\ r(5) = 7 \end{cases}$$

5. Un gran tanque está parcialmente lleno con $100gal$ de agua en los cuales hay $10lb$ de sal disuelta, luego una salmuera que contiene $\frac{1}{2}lb$ de sal por galón se bombea al tanque con una rapidez de $6gal/min$, la solución uniformemente mezclada se bombea hacia afuera del tanque con una rapidez de $4gal/min$. Modele el PVI que permita calcular la cantidad de sal(en libras) en cualquier instante de tiempo t.
Solución:
Sea $A(t)$: la cantidad de libras de sal que hay en el tanque en el instante t, luego

$$\frac{dA}{dt} = R_1 - R_2$$

donde
R_1 : rapidez con que entra la sal.
R_2 : rapidez con que sale la sal.
Así

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{1}{2}\right)(6) - (4)\left(\frac{A}{100+2t}\right)$$

Por dato del problema en el instante inicial hay 10 lb de sal disuelta, es decir $A(0) = 10$, por tanto tenemos un PVI

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = 3 - \frac{4A}{100+2t} \\ A(0) = 10 \end{cases}$$

6. Ana deposita 20 000 soles en una cuenta en la que se acumula interés a una tasa de 4% anual, capitalizado continuamente. Plantee el problema de valor inicial que permite determinar el saldo $S(t)$ de la cuenta t años después del depósito inicial.
Solución:

Para determinar el saldo $S(t)$, seguimos el principio financiero que, el ritmo de crecimiento del capital es directamente proporcional al capital existente en cada momento. Así $S'(t) = rS(t)$.
Luego el PVI está dado por

$$\begin{cases} S'(t) = 0{,}04S \\ S(0) = 20000 \end{cases}$$

7. El precio de cierta mercancía es actualmente de 4 soles por unidad. Se estima que dentro de t semanas, el precio $p(t)$ estará aumentando a razón de $0,06p(t) + e^{0,1t}$ soles por semana. Plantee el problema de valor inicial que permite obtener el precio de la mercancía en cualquier semana.
Solución:

Por la condición dada de la razón de cambio del precio se tiene que el problema de valor inicial a resolver es:

$$\begin{cases} p'(t) = 0,06p(t) + e^{0,1t} \\ p(0) = 4 \end{cases}$$

2.10. Ejercicios Propuestos

1. Suponga que un alumno es portador del virus de la gripe y regresa al apartado campus de su universidad de 1000 estudiantes. Determine la ecuación diferencial para el número de personas $x(t)$ que contraerán la gripe si la razón con la que la enfermedad se propaga es proporcional al número de interacciones entre el número de estudiantes que tiene gripe y el número de estudiantes que aún no se han expuesto a ella.

2. En la teoría del aprendizaje, se supone que la rapidez con que se memoriza un tema es proporcional a la cantidad que queda por memorizar. Suponga que M denota la cantidad total de un tema que se debe memorizar y que $A(t)$ es la cantidad memorizada al tiempo t. Determine la ecuación diferencial que permita determinar la cantidad $A(t)$.

3. El número de ratones de campo en una pastura está dado por la función $200 - 10t$, donde el tiempo t se mide en años. Determine una ecuación diferencial que gobierne una población de búhos que se alimentan de ratones si la razón a la que la población de búhos crece es proporcional a la diferencia entre el número de búhos al tiempo t y el número de ratones al mismo tiempo t.

4. Para un movimiento de gran rapidez en el aire, como el de un paracaidista que está cayendo con una velocidad instantánea $v(t)$, antes de que se abra el paracaídas, la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea. Determine la ecuación diferencial para la velocidad $v(t)$ de un cuerpo de $80kg$ de masa (constante de proporcionalidad 10). Considere $g = 9,8m/s^2$.

   Rpta. $v' + \frac{v^2}{8} = 9,8$

5. Suponga que un tanque grande contiene inicialmente 300 galones de agua en los que se disolvieron 50 libras de sal. Entra agua pura a una razón de 3 gal/min y cuando la solución está bien revuelta, sale a la misma razón. Determine una ecuación diferencial que exprese la cantidad $A(t)$ de sal que hay en el tanque al tiempo t.

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales Ordinarias de primer Orden.

En aplicaciones de la matemática a la física se define la velocidad de un objeto como la variación instantánea de la posición x con respecto al tiempo es decir $v(t) = \frac{dx}{dt}$, ahora es natural preguntarnos ¿ Cuál es la posición del móvil en un instante dado si conocemos tal variación? , esto nos lleva al estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden.
Una EDO de primer orden se puede expresar como sigue:

$$\text{Forma implícita} \quad G(x, y, y') = 0$$

$$\text{Forma explícita} \quad y' = F(x, y)$$

donde $y = y(x)$ es la función incógnita y x es la variable independiente.

Observación

a) La solución general o familia de soluciones de una EDO de primer orden es una solución que depende de un parámetro. Fijando los valores del parámetro en la solución general, se obtiene una **solución particular** de la ecuación, la solución general de una EDO puede expresarse de forma explicita o implícita. Cuando existe alguna solución que no pertenece a dicha familia, esta recibe el nombre de **solución singular**.

b) Si la expresión $F(x, y)$ dada en la forma explícita no depende de x entonces la EDO se llama autónoma y escribimos
$$y' = F(y)$$

Definición Curva Integral

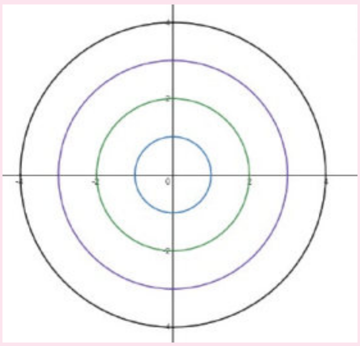
La gráfica de la solución de una EDO se denomina curva integral.

Ejemplo 3.1

Hallar las curvas integrales de la ecuación diferencial $yy' = -x$.
Solución:
Las soluciones de esta ecuación son dadas de forma implícita por la ecuación

$$x^2 + y^2 = K$$

donde K es una constante arbitraria; algunas curvas integrales (K=1,4,9,16) se presentan en la siguiente figura .



3.1. Problema de valor Inicial (PVI)

En el caso de EDOs de primer orden, un (PVI) presenta una sola condición inicial y lo podemos expresar de la siguiente manera

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Resulta importante saber cuándo un (PVI) tiene solución y también si ésta es única, aunque no podamos conseguir explícitamente la solución.

Definición Solución de un PVI

Una función $y = \phi(x)$ es llamada una solución del PVI (3.1) si existe un intervalo abierto alrededor del punto x_0, es decir $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tal que

$$\phi(x_0) = y_0 \quad \text{y} \quad \phi'(x) = F(x, \phi(x)), \text{ para todo } x \in I$$

El intervalo I es llamado el dominio de la solución del PVI.

Ejemplo 3.2

1. El PVI $y' = -y, y(0) = 2$
   tiene por solución a $y(x) = 2e^{-x}$ donde $x \in]-\infty, +\infty[$
2. El PVI $y' = 1 + y^2, y(0) = 0$
   tiene por solución $y = tan(x)$ pero su dominio es solo $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

A continuación se presenta un teorema que garantiza la existencia y unicidad de una solución para una EDO de primer orden con una condición inicial.

Teorema 3.1 Teorema Picard (de existencia y unicidad local)

Sea el problema de valor inicial

$$(PVI) \begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

donde $(x_0, y_0) \in]a, b[\times]c, d[$. Si la función F y la derivada parcial de F respecto de y, son funciones continuas en $[a, b] \times [c, d]$ entonces existe un intervalo abierto I con centro en x_0 contenido en el intervalo $]a, b[$ y una única función φ definida en I que satisface el problema (PVI).

☞ **Observación**

En el teorema anterior si F fuese continua y F_y no, entonces solo se garantizaría la existencia (y no la unicidad) de solución en un intervalo abierto I.

Ejemplo 3.3

En el caso del PVI

$$\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La función F definida por $F(x, y) = 2xy^2$ es continua en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, por lo tanto continua en cualquier rectángulo que contenga el punto $(0, 1)$ lo que garantiza la existencia de la solución del PVI , por ejemplo

$$y = \frac{1}{1 - x^2}$$

es una solución del PVI con dominio $]-1, 1[$.
Luego también notamos que $F_y(x, y) = 4xy$ es una función continua en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, por tanto continua en cualquier rectángulo que contenga el punto $(0, 1)$ lo que garantiza la unicidad de solución del PVI luego por el Teorema de Picard considerando el rectángulo $[-1, 1] \times [0, 2]$ donde el dominio de la solución es $I =]-1, 1[$ $(I \subset [-1, 1])$.

Ejemplo 3.4

En el caso del PVI

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La función F definida por $F(x,y) = y^{\frac{2}{3}}$ es continua en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, por lo tanto continua en cualquier rectángulo que contenga el punto $(0,0)$ lo que garantiza la existencia de solución del PVI.

Además, $F_y(x,y) = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$ es decir, F_y no es continua en cualquier rectángulo que contenga el punto $(0,0)$. Luego el Teorema de Picard no garantiza que la solución sea única, por ejemplo se puede verificar que $y = 0$ e $y = \frac{x^3}{27}$ son dos soluciones del PVI dado.

Sabemos que no siempre es posible encontrar una solución de forma explicita, sin embargo un teorema que permite garantizar la existencia de una solución de forma explicita es el siguiente

Teorema 3.2

Considere la ecuación $f(x,y) = 0$ y supongamos que f es continua, con derivadas parciales continuas respecto de (x,y), si existe el par (x_0,y_0) tal que $f(x_0,y_0) = 0$ y $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$, entonces existe el intervalo abierto $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ y una función continua $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y(x)) = 0$ para todo $x \in I$.

Ejemplo 3.5

Dado el PVI

$$\begin{aligned} xy' &= \frac{1}{1+cosy} \\ y(1) &= 0 \end{aligned}$$

la solución implícita $y + seny = lnx$ satisface el PVI. Considerando

$$f(x,y) = y + seny - lnx,$$

tal solución satisface la ecuación $f(x,y) = 0$, además tenemos que $\frac{\partial}{\partial y}f(1,0) = 2 \neq 0$, entonces existe una función $y = y(x)$ en un intervalo abierto alrededor de $x = 1$ tal que $f(x, y(x)) = 0$.

3.2. Resolución de EDOs de primer Orden

3.2.1. Ecuaciones de variables separables

Una ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{3.3}$$

es de variables separables si $f(x,y)$ se puede expresar como el producto de dos funciones en la que una depende solamente de la variable x y la otra depende solo de y. De esta manera la ecuación diferencial se puede expresar como

$$\frac{dy}{dx} = p(x)q(y) \tag{3.4}$$

Ejemplo 3.6

- $\dfrac{dy}{dx} = yxe^{2x+y}$ es una ecuación separable, pues $\dfrac{dy}{dx} = xe^{2x}ye^{y} = p(x)q(y)$
- $\dfrac{dy}{dx} = y + cosx$ es una ecuación no separable, pues no se puede expresar de la forma $p(x)q(y)$

3.3. Solución de ecuaciones de variable separable

La ecuación separable (3.4) puede ser expresada como

$$\frac{1}{q(y)}dy = p(x)dx,$$

Integrando

$$\int h(y)dy = \int p(x)dx$$

donde $h(y) = \frac{1}{q(y)}$ entonces

$$H(y) = P(x) + C$$

donde H y P son las antiderivadas de h y p respectivamente y C es una constante arbitraria.

Ejemplo 3.7

Resolver $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2$
Solución:
Factorizando obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x)\left(1 + y^2\right)$$

luego $\dfrac{dy}{1 + y^2} = (1 + x)\, dx$, al integrar

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int (1 + x)\, dx$$

se tiene $arctan\,(y) = x + \frac{x^2}{2} + C$ donde C es una constante arbitraria, luego

$$y = tan\left(x + \frac{x^2}{2} + C\right)$$

Ejemplo 3.8

Resolver $ysenx.e^{cosx}dx + y^{-1}dy = 0$
Solución:
Note que la EDO se puede escribir como

$$y^{-1}dy = -ysen\,(x)\, e^{cos(x)}dx$$

de donde $\frac{dy}{y^2} = -sen\,(x)\, e^{cos(x)}dx$ integrando obtenemos

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int sen\,(x)\, e^{cos(x)}dx$$

entonces $-\frac{1}{y} = e^{cos(x)} + C.$
Por lo tanto, la solución es

$$y = -\frac{1}{e^{cos(x)} + C}.$$

Ejemplo 3.9

Resolver el PVI $\dfrac{dy}{dx} = cos^2\,(x)\, cos^2\,(2y)$ con $y\,(0) = \frac{\pi}{8}$
Solución:

Note que la EDO se puede escribir como

$$\frac{dy}{cos^2(2y)} = cos^2(x)\,dx$$

integrando ambos lados de la igualdad

$$\int \frac{dy}{cos^2(2y)} = \int cos^2(x)\,dx$$

se obtiene

$$\int sec^2(2y)\,dy = \int \frac{1+cos(2x)}{2}dx$$

luego

$$\frac{tan(2y)}{2} = \frac{1}{2}\left[x + \frac{sen(2x)}{2}\right] + C$$

donde C es una constante arbitraria, luego la solución general de la EDO es

$$tan(2y) = x + \frac{sen(2x)}{2} + C$$

Usando la condición inicial tenemos que $tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 + \frac{sen(0)}{2} + C$ entonces $1 = C$. Por lo tanto, la solución del PVI es

$$tan(2y) = x + \frac{sen(2x)}{2} + 1$$

3.3.1. Ecuaciones Reducibles a Separables

La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \tag{3.5}$$

se reduce a una ecuación diferencial de variables separables si hacemos el cambio de variable

$$z = ax + by + c$$

pues, derivando respecto a x se tiene

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx},$$

de donde, resulta la EDO de variable separable

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z)$$

luego de resolver

$$\frac{dz}{bf(z)+a} = dx.$$

se debe retornar a la variable original.

Ejemplo 3.10

Resolver $\frac{dy}{dx} = x + y - 3.$

Solución:
Aplicando el cambio de variable $z = x + y - 3$, y derivando con respecto a x obtenemos

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

entonces

$$\frac{dz}{dx} = 1 + z.$$

Observamos que esta EDO es separable, luego $\frac{dz}{1+z} = dx$ integrando

$$\int \frac{dz}{1+z} = \int dx$$

obtenemos $ln|1+z| = x + C$, luego $1 + z = Ke^x$ $(K \neq 0)$, siendo K y C constantes arbitrarias la solución general de la EDO es

$$y = Ke^x - x + 2.$$

Ejemplo 3.11

Resolver $\frac{dy}{dx} = (8x + 2y + 1)^2$

Solución:
Haremos el cambio de variable $z = 8x + 2y + 1$, luego derivando con respecto a x obtenemos

$$\frac{dz}{dx} = 8 + 2\frac{dy}{dx}$$

entonces $\frac{dz}{dx} = 8 + 2\left[z^2\right]$. Observamos que esta EDO es separable, luego $\frac{dz}{4+z^2} = 2dx$ seguidamente integramos indefinidamente

$$\int \frac{dz}{4+z^2} = \int 2dx$$

y obtenemos

$$\frac{1}{2}arctan\left(\frac{z}{2}\right) = 2x + C,$$

luego

$$arctan\left(\frac{8x+2y+1}{2}\right) = 4x + C$$

es una solución general de la EDO dada.

3.3.2. EDOs lineales reducibles a variable separable

Ciertas ecuaciones diferenciales de primer orden no son separables, pero se pueden llevar a esa forma por medio de un sencillo cambio de variable; esto se cumple para la ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.6}$$

la cual sugiere se haga el cambio de variable

$$u = \frac{y}{x} \Longleftrightarrow y = ux,$$

derivando respecto a x

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

y reemplazando en (3.6) se obtiene

$$u + x\frac{du}{dx} = g(u) \Longleftrightarrow x\frac{du}{dx} = g(u) - u$$

luego

$$\frac{du}{g(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

como se observa, esta última expresión es una ecuación diferencial de variables separables, así que se integra, y a continuación se obtendrá la solución general retornando a la variable original.

Ejemplo 3.12

Resolver $\frac{dy}{dx} = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

Solución:

Aplicando el cambio de variable $z = \frac{y}{x}$, se tiene $zx = y$, derivando con respecto a x obtenemos

$$\frac{dz}{dx}x + z = \frac{dy}{dx}$$

consecuentemente

$$\frac{dz}{dx}x + z = e^z + z$$

$$\frac{dz}{dx}x = e^z$$

la cual es una EDO separable, para resolver aplicamos la integral indefinida

$$\int e^{-z}dz = \int \frac{dx}{x}$$

y obtenemos $-e^{-z} = ln\,|x| + C$, es decir

$$-\frac{1}{ln\,|x| + C} = e^{\frac{y}{x}}$$

es una solución general de la EDO.

Ejemplo 3.13

Resolver $x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2+y^2}$ con $y(1) = 0$ y $x > 0$

Solución:

Aplicando el cambio de variable $z = \frac{y}{x}$, se tiene $zx = y$, derivando con respecto a x obtenemos

$$\frac{dz}{dx}x + z = \frac{dy}{dx}$$

consecuentemente $x\left(\frac{dz}{dx}x + z\right) = x\frac{dy}{dx} = zx + \sqrt{x^2 + z^2x^2}$ entonces

$$x^2\frac{dz}{dx} + xz = zx + x\sqrt{1+z^2}$$

luego $x^2\frac{dz}{dx} = x\sqrt{1+z^2}$, observamos que esta última ecuación es de variable separable, integrando

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

obtenemos

$$ln\left|\sqrt{z^2+1} + z\right| = ln\,|x| + C$$

volviendo a las variables originales, obtenemos la solución general

$$ln\left|\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}+\frac{y}{x}\right| = ln\,|x| + C$$

Usando la condición inicial $y(1) = 0$ tenemos que $ln\left|\sqrt{\frac{0}{1}+1}+\frac{0}{1}\right| = ln\,|1| + C$, entonces $C = 0$. Luego la solución del PVI dado es

$$ln\left|\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}+\frac{y}{x}\right| = ln\,|x|\,.$$

3.4. EDOs de primer orden Homogéneas

Antes de ver este tipo de ecuaciones, definiremos lo que es una función homogénea.

Definición

La función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es denominada homogénea de grado p si

$$f\,(tx, ty) = t^p f(x, y), \text{ para todo } (x, y) \in \Omega, t > 0$$

donde p es un número real.

Definición

La EDO de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

es llamada homogénea si la función f es homogénea de grado cero, equivalentemente este tipo de EDO puede reescribirse en la forma

$$P\,(x, y)\,dx + Q\,(x, y)\,dy = 0$$

donde las funciones P y Q son funciones homogéneas del mismo grado.

Teorema 3.3

Si la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ es homogénea, entonces el cambio de variable $y = ux$ la transforma en una ecuación diferencial de variables separables.

Ejemplo 3.14

Resolver $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$

Solución:

Note que $f\,(x, y) = \frac{x+y}{x}$ es tal que $f\,(tx, ty) = \frac{tx+ty}{tx} = \frac{x+y}{x} = f\,(x, y)$, luego f es homogénea de grado cero. Así,

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}$$

se resuelve haciendo $y = ux$ y derivando con respecto a x tenemos

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$$

luego se tiene $x\frac{du}{dx} + u = 1 + u$ de donde $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ integrando obtenemos $u = ln\,|x| + C$, al regresar a las variables originales la solución es

$$\frac{y}{x} = ln\,|x| + C.$$

Observación

En el caso que la función $f(x, y)$ se pueda escribir como $g\left(\frac{x}{y}\right)$ decimos que f es una función homogénea de grado cero.

3.4.1. EDOs Reducibles a Homogéneas

Entre las ecuaciones diferenciales que no son homogéneas, pero si reducibles a homogéneas, se encuentran las ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{mx + ny + p}\right) \tag{3.7}$$

Para resolver una EDO de la forma 3.7 distinguimos dos casos según como son las expresiones

$$ax + by + c \quad \text{y} \quad mx + ny + p$$

- **Primer caso:**
  Si las rectas $L_1 : mx + ny + p = 0$ y $L_2 : ax + by + c = 0$ son paralelas, es decir, $\frac{m}{a} = \frac{n}{b}$, entonces es posible transformar la EDO (3.7) en una EDO homogénea en las variables z y x con la sustitución:

$$z = mx + ny \quad o \quad z = ax + by$$

- **Segundo Caso:**
  Si las rectas $L_1 : mx + ny + p = 0$ y $L_2 : ax + by + c = 0$ se intersectan en un único punto (x_0, y_0), es posible transformar la EDO (3.7) en una EDO homogénea considerando las nuevas variables z y w con las sustituciones:

$$z = x - x_0$$
$$w = y - y_0$$

de donde:

$$x = z + x_0$$
$$y = w + y_0$$

Ejemplo 3.15

Resolver la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$

Solución:

Note que las rectas $L_1 : 1 - 3x - 3y = 0$ y $L_2 : 1 + x + y = 0$ son paralelas, entonces para resolver la EDO aplicamos el cambio de variable $z = x + y$ luego

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1 - 3z}{1 + z} = \frac{2 - 2z}{1 + z}$$

la cual es una EDO separable, para resolverla la integraremos indefinidamente

$$\int \frac{(1+z)}{1-z} dz = \int 2dx$$

entonces

$$-z - 2ln\,|1 - z| = 2x + C.$$

Por lo tanto,

$$-x - y - 2ln\,|1 - x - y| = 2x + C$$

es la solución general de la EDO donde C es una constante arbitraria.

Ejemplo 3.16

Resolver la ecuación diferencial:

$$(2x + 3y - 1)\,dx + (4x - 6y - 5)\,dy = 0$$

Solución:

Note que las rectas $L_1 : 2x + 3y - 1 = 0$ y $L_2 : 4x - 6y - 5 = 0$ no son paralelas, entonces para resolver la EDO debemos encontrar la intersección de estas dos rectas, esta intersección se dá en $x_0 = \frac{7}{8}$ y $y_0 = -\frac{1}{4}$. Luego aplicamos el cambio de variable

$$z = x - \tfrac{7}{8} \Longrightarrow x = z + \tfrac{7}{8} \Longrightarrow dx = dz$$

$$w = y + \tfrac{1}{4} \Longrightarrow y = w - \tfrac{1}{4} \Longrightarrow dy = dw$$

Al reemplazar las nuevas variables en la EDO original se tiene

$$\left(2\left[z + \frac{7}{8}\right] + 3\left[w - \frac{1}{4}\right] - 1\right)dz + \left(4\left[z + \frac{7}{8}\right] - 6\left[w - \frac{1}{4}\right] - 5\right)dw = 0$$

simplificando obtenemos

$$(2z + 3w)\,dz + (4z - 6w)\,dw = 0$$

esta última ecuación es una EDO que se resuelve haciendo un nuevo cambio de variable $u = \frac{w}{z} \Longrightarrow w = uz$ de donde $dw = udz + zdu$ y hace que la ultima EDO se transforme en una EDO de variable separable

$$(2z + 3uz)\,dz + (4z - 6uz)\,(udz + zdu) = 0$$

factorizando du y dz obtenemos

$$\left(2z + 7uz - 6u^2z\right)dz + \left(4z^2 - 6uz^2\right)du = 0$$

reescribiendo la EDO

$$\frac{du}{dz} = -\frac{z\left(2 + 7u - 6u^2\right)}{z^2\,(4 - 6u)}$$

luego integrando

$$\int \frac{4 - 6u}{2 + 7u - 6u^2}\,du = -\int \frac{1}{z}\,dz$$

obtenemos

$$\frac{ln\left|6u^2 - 7u - 2\right|}{2} - \frac{ln\left|\frac{12u - \sqrt{97} - 7}{12u + \sqrt{97} - 7}\right|}{2\sqrt{97}} = -ln\,|z| + C$$

luego reescribimos la igualdad en función a las variables w y z

$$\frac{ln\left|6\left(\frac{w}{z}\right)^2 - 7\frac{w}{z} - 2\right|}{2} - \frac{ln\left|\frac{12\frac{w}{z} - \sqrt{97} - 7}{12\frac{w}{z} + \sqrt{97} - 7}\right|}{2\sqrt{97}} = -ln\,|z| + C,$$

volviendo a las variables iniciales x e y, la solución general de la EDO esta dada por

$$\frac{ln\left|6\left(\frac{y + \frac{1}{4}}{x - \frac{7}{8}}\right)^2 - 7\cdot\frac{\left(y + \frac{1}{4}\right)}{\left(x - \frac{7}{8}\right)} - 2\right|}{2} - \frac{ln\left|\dfrac{12\cdot\frac{\left(y + \frac{1}{4}\right)}{\left(x - \frac{7}{8}\right)} - \sqrt{97} - 7}{12\cdot\frac{\left(y + \frac{1}{4}\right)}{\left(x - \frac{7}{8}\right)} + \sqrt{97} - 7}\right|}{2\sqrt{97}} = -ln\left|x - \frac{7}{8}\right| + C$$

lo que es equivalente a

$$\frac{ln\left|24\left(\frac{4y+1}{8x-7}\right)^2-14\cdot\frac{(4y+1)}{(8x-7)}-2\right|}{2}-\frac{ln\left|\frac{\frac{24(4y+1)}{(8x-7)}-\sqrt{97}-7}{\frac{24(4y+1)}{(8x-7)}+\sqrt{97}-7}\right|}{2\sqrt{97}}=-ln\left|x-\frac{7}{8}\right|+C$$

3.5. EDOs de primer orden Exactas

Recuerde que

Si $z=f(x,y)$ es una función de dos variables con primeras derivadas parciales continuas en una región $\mathcal{R}$ del plano xy, entonces su diferencial es

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{3.8}$$

En el caso particular que $f(x,y)=c$, donde c es una constante, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

Definición

Se dice que una ecuación diferencial ordinaria de primer orden de la forma

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0 \tag{3.9}$$

es exacta en una región $\mathcal{R}\subseteq\mathbb{R}^2$, si existe una función $f:\mathcal{R}\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

para todo $(x,y)\in\mathcal{R}$ en cuyo caso la solución de la EDO está dada de forma implícita por $f(x,y)=C$.

Teorema 3.4

Si las primeras derivadas parciales de P y Q son continuas en un rectángulo

$$\mathcal{R}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:a<x<b,c<y<d\right\}\subseteq\mathbb{R}^2$$

Entonces la ecuación (3.9) es una EDO exacta en $\mathcal{R}$, si y sólo si,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial P}{\partial y}(x,y),\ \text{para todo}\ (x,y)\in\mathcal{R}$$

Por el teorema anterior, es simple de verificar que la EDO

$$(2x+y^2)dx+(2xy+1)dy=0,$$

es exacta. Pues siendo $P(x,y)=2x+y^2$ y $Q(x,y)=2xy+1$ se cumple que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=2x=\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\quad\forall x,y\in\mathbb{R}$$

La EDO

$$(x+y)dx+(y-x)dy=0$$

no es exacta, pues siendo $P(x,y)=x+y$ y $Q(x,y)=y-x$ se tiene que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=1\neq\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=-1.$$

Ejemplo 3.17

Resolver la EDO

$$(2x+y^2)dx+(2xy+1)dy=0$$

Solución: Por la forma de la EDO se tiene $P(x,y)=2x+y^2$ y $Q(x,y)=2xy+1$, luego

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2y \text{ entonces se cumple } \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

consecuentemente la EDO es exacta, entonces existe $f=f(x,y)$ tal que $\nabla f=(P,Q)$, luego

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y^2 \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}=2xy+1$$

integrando con respecto a x

$$\int \tfrac{\partial f}{\partial x}dx=\int (2x+y^2)\,dx$$

se obtiene $f(x,y)=x^2+y^2x+C(y)$ derivando parcialmente esta última expresión respecto a y se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2yx+C'(y)$$

además como $\frac{\partial f}{\partial y}=2yx+1$ se cumple

$$2yx+C'(y)=2xy+1 \Longrightarrow C'(y)=1$$

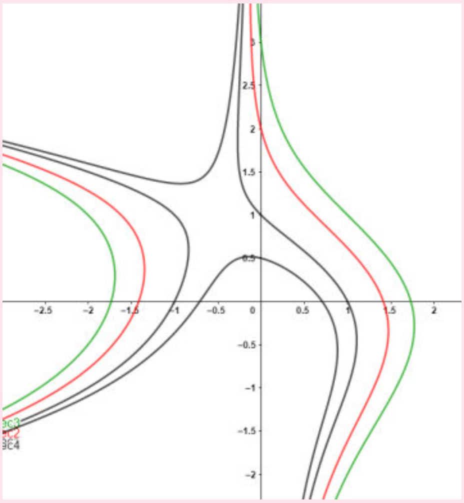
integrando con respecto a y obtenemos

$$\int C'(y)dy=\int dy$$

luego $C(y)=y+K$ donde K es una constante arbitraria, en particular podemos hacer $K=0$ entonces $f(x,y)=x^2+y^2x+y$ y la solución general de la EDO esta dada por

$$x^2+y^2x+y=c$$

donde c es una constante arbitraria.



3.5.1. Factor Integrante

Existen casos de EDOs que no cumplen las condiciones necesarias para ser exactas; pero se pueden convertir en EDO exacta.

Para esto vamos a encontrar una función que al multiplicar por la ecuación dada la transforme en una EDO exacta. Estas funciones reciben el nombre de factor integrante, en general son funciones de x e y.

Es decir se requiere encontrar una función $\mu=\mu(x,y)$ tal que la EDO

$$\mu(x,y)P(x,y)\,dx + \mu(x,y)Q(x,y)\,dy = 0 \tag{3.10}$$

verifique

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

esto es

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

de donde obtenemos la EDP

$$\mu\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] = Q\frac{\partial u}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y}$$

luego, con el objetivo de encontrar una solución μ de esta EDP, consideramos casos especiales, donde la función μ es simplificada a depender de una sola variable.

- Caso $\mu = \mu(x)$, entonces $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, luego

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\mu} \Longrightarrow \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx = ln|\mu(x)|$$

- Caso $\mu = \mu(y)$, , entonces $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, luego

$$-\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\mu} \Longrightarrow -\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}dy = ln|\mu(y)|$$

Ejemplo 3.18

Resolver la EDO $xydx + \left(x^2 + y\right)dy = 0.$

Solución:

Siguiendo la forma de la ecuación 3.7 se tiene:

$P(x,y) = xy$ y $Q(x,y) = x^2 + y$, luego

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

como $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ la EDO no es exacta, buscaremos un factor integrante μ con el fin de convertir a la EDO en exacta. Supongamos que $\mu := \mu(y)$ entonces

$$-\int \frac{-x}{xy}dy = ln\,|\mu(y)|$$

luego

$$\int \tfrac{1}{y}dy = ln\,|\mu(y)| \Longrightarrow ln\,|y| = ln\,|\mu(y)| \Longrightarrow \mu(y) = Cy$$

donde C es una constante arbitraria, consideraremos $C = 1$, entonces $\mu(y) = y$. Multiplicando la EDO dada inicialmente por el factor integrante $\mu(y) = y$ obtenemos

$$\underbrace{xy^2}_{\overline{P}(x,y)}dx + \underbrace{\left(x^2y + y^2\right)}_{\overline{Q}(x,y)}dy = 0$$

la cual es una EDO exacta, entonces existe $f = f(x,y)$ tal que $\nabla f = \left(\overline{P}, \overline{Q}\right)$ luego

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2y + y^2$$

Integrando $\frac{\partial f}{\partial x} = xy^2$ con respecto a x obtenemos

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int xy^2 dx \Longrightarrow f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + C(y)$$

al derivar parcialmente esta última espresión, respecto a y obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2y + C'(y)$$

de donde $x^2y + C'(y) = x^2y + y^2 \Longrightarrow C'(y) = y^2$ integrando con respecto a y se tiene

$$C(y) = \int C'(y)dy = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + K$$

donde K es una constante arbitraria y es posible no considerarla pues se agrupa con otra constante luego $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^3}{3}$ y la solución general de la EDO esta dada por

$$\frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^3}{3} = c$$

donde c es una constante arbitraria.

Ejemplo 3.19

Resolver la EDO $2xdx + x^2 cotydy, x > 0$

Solución:

Notemos que $P(x,y) = 2x$ y $Q(x,y) = x^2 cot(y)$, luego

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xcot(y)$$

entonces la ecuación no es exacta pues $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, buscaremos un factor integrante μ con el fin de convertir a la EDO en exacta. Supongamos $\mu := \mu(x)$ entonces

$$\int \frac{0 - 2xcot(y)}{x^2 cot(y)} dx = ln|\mu(x)|$$

luego

$$-2ln|x| + C = -\int \frac{2}{x} dx = ln|\mu(x)|$$

es posible no considerar la constante arbitraria C pues se agrupa con otra constante consecuentemente $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$. Multiplicando la EDO inicial por μ se convierte en exacta, entonces la solución esta dada por la ecuación

$$f(x,y) = c,$$

donde $\nabla f = (\mu P, \mu Q) = \left(\frac{2}{x}, cot(y)\right)$, es decir $f_x = \frac{2}{x}$ y $f_y = cot(y)$, integrando f_x con respecto a x obtenemos

$$f(x,y) = 2ln|x| + c(y),$$

al derivar respecto a y se obtiene $cot(y) = f_y = c'(y)$, integrando,

$$\int cot(y)dy = \int c'(y)dy$$

se tiene $c(y) = ln|sen(y)| + K$. Por lo tanto, la solución de la EDO esta dada por la ecuación

$$2ln|x| + ln|sen(y)| = C,$$

que es equivalente a la ecuación $x^2 sen\,(y) = c$, donde c, K son contantes arbitrarias.
Notese que en esta EDO es conveniente buscar como factor integrante una función que dependa de la variable x, pues no sera posible que dependa de la variable y.

Ejemplo 3.20

Resolver la EDO $(xy+1)\,dx + x\,(x+y)\,dy = 0$

Solución:

Notemos que $P\,(x,y) = xy+1$ y $Q\,(x,y) = x\,(x+y)$, luego

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \qquad y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + y,$$

como $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, esta EDO no es exacta, buscaremos un factor integrante con el fin de convertir a la EDO, en una EDO exacta. Supongamos que $\mu := \mu\,(x)$ entonces

$$ln\,|\mu\,(x)| = \int \frac{-x-y}{x\,(x+y)}dx$$

luego

$$ln\,|\mu\,(x)| = -\int \frac{1}{x}dx = -ln\,|x| + C$$

$$\Longrightarrow |\mu\,(x)| = e^{-ln|x|+C} = |x|^{-1}\,C$$

en particular podemos considerar $\mu\,(x) = \frac{1}{x}$.
Multiplicando la EDO inicial por μ obtenemos

$$\underbrace{\left(y + \frac{1}{x}\right)}_{\bar{P}}dx + \underbrace{(x+y)}_{\bar{Q}}dy = 0$$

se convierte en exacta, entonces la solución esta dada por la ecuación

$$f\,(x,y) = c,$$

donde $\nabla f = \left(\overline{P}, \overline{Q}\right) = \left(y + \frac{1}{x}, x+y\right)$, es decir $f_x = y + \frac{1}{x}$ y $f_y = x+y$, integrando f_x con respecto a x obtenemos

$$\int f_x(x,y)dx = \int \left(y + \frac{1}{x}\right)dx$$

$$f\,(x,y) = yx + ln\,|x| + g\,(y)$$

Al derivar la última igualdad respecto a y se obtiene

$$f_y = x + g'(y)$$

además $f_y = x+y$ de donde $x + g'\,(y) = x+y \Longrightarrow g'(y) = y$ al integrar

$$g(y) = \frac{y^2}{2} + K$$

Recuerde que en este caso se puede prescindir de la constante arbitraria de integración K, así

$$g(y) = \frac{y^2}{2},$$

luego

$$f(x,y)=yx+ln|x|+\frac{y^2}{2}$$

Por lo tanto, la solución de la EDO es:

$$yx+ln|x|+\frac{y^2}{2}=c$$

donde c es una constante arbitraria.

3.6. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es una ecuación que se puede expresar de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=f(x), \tag{3.11}$$

donde a_1, a_2 y f son funciones definidas en un intervalo abierto $I=]a,b[$ y $a_1(x)\neq 0$ para todo $x\in I$, en adelante vamos a suponer que a_1, a_2 y f son funciones continuas en I. Por ejemplo, la ecuación

$$x^3\tan x-(x\cos x)\frac{dy}{dx}+\left(x-\frac{x^3}{2}\right)y=0$$

es lineal, pues se puede escribir en la forma

$$\underbrace{(x\cos x)}_{a_1(x)}\frac{dy}{dx}\underbrace{-\left(x-\frac{x^3}{2}\right)}_{a_2(x)}y=\underbrace{x^3tan(x)}_{f(x)}$$

☞ **Observación**

Cuando $f(x)=0$, se dice que la ecuación lineal (3.11) es **homogénea**, caso contrario se dirá que es **no homogénea.**

Dado que $a_1(x)\neq 0$ será posible transformar la ecuación lineal de primer orden a su forma estándar, para ello se divide (3.11) entre el coeficiente principal $a_1(x)$, y se obtiene

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x), \tag{3.12}$$

donde $p(x)=\dfrac{a_2(x)}{a_1(x)}$ y $q(x)=\dfrac{f(x)}{a_1(x)}$. En seguida se muestra el procedimiento para encontrar una solución de la ecuación (3.12), en un intervalo I en el cual las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son continuas, tanto para el caso homogéneo y no homogéneo.

3.6.1. Ecuaciones lineales homogéneas de primer orden

Si en la ecuación en la forma estandar (3.12), $q(x)=0$, la ecuación lineal se llama **homogénea** y es de la forma

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0.$$

Está ecuación es de variable separable, es decir

$$\frac{dy}{dx}=-p(x)y\Leftrightarrow\frac{dy}{y}=-p(x)dx\Leftrightarrow\int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx$$

de donde tenemos

$$|y| = e^{-\int p(x)dx+K} \tag{3.13}$$

luego

$$y = Ce^{-\int p(x)dx},$$

donde $C \neq 0$ es una constante arbitraria.

Ejemplo 3.21

Resolver $e^{x}y' + \left(1+x^2\right)y = 0$

Solución:

Podemos reescribir la EDO en su forma estándar como $y' + \left(1+x^2\right)e^{-x}y = 0$, así

$$p\left(x\right) = \left(1+x^2\right)e^{-x} \quad y \quad q\left(x\right) = 0$$

esta es una EDO lineal homogénea y de variable separable,

$$\frac{dy}{dx} = -\left(1+x^2\right)e^{-x}y$$

integrando

$$\int \frac{dy}{y} = -\int (1+x^2)e^{-x}dx$$

resolvemos aplicando integración por partes. Así:

$$ln\left|y\right| = e^{-x}\left(1+x^2\right) + 2xe^{-x} + 2e^{-x} + C$$

$$\text{Por lo tanto, } ln\left|y\right| = e^{-x}\left(3+2x+x^2\right) + C$$

Así $y(x) = Ke^{\frac{3+2x+x^2}{e^x}}$ donde K y C son constantes arbitrarias.

3.6.2. Ecuaciones lineales no homogéneas de primer orden

En esta sección estudiamos la ecuación diferencial lineal (3.12) del tipo **no homogénea,** es decir, cuando $q\left(x\right) \neq 0$. El procedimiento para hallar la solución de este tipo de ecuaciones se explica en las líneas que siguen a continuación.

Notemos que la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + p\left(x\right)y = q\left(x\right)$$

es equivalente a

$$\underbrace{\left(q\left(x\right) - p\left(x\right)y\right)}_{P}dx + \underbrace{\left(-1\right)}_{Q} \cdot dy = 0$$

no es una EDO exacta, pues

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(q\left(x\right) - p\left(x\right)y\right) = -p(x) \neq \frac{\partial\left(-1\right)}{\partial x} = 0$$

Luego para resolver dicha ecuación, multiplicamos a ambos lados de la igualdad por un factor integrante $\mu = \mu\left(x\right)$ para que la EDO se convierta en una EDO exacta. Es decir,

$$\underbrace{\left(\mu\left(x\right)q(x) - \mu\left(x\right)p(x)y\right)}_{\bar{P}}dx + \underbrace{\left(-\mu\left(x\right)\right)}_{\bar{Q}}dy = 0$$

y

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial y} = -\mu(x)\, p(x) = -\mu'(x) = \frac{\partial \overline{Q}}{\partial x},$$

así $\mu'(x) = \mu(x)\, p(x)$ y podemos escribir

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)\, p(x)\, y = \mu(x)\, q(x) \tag{3.14}$$

el lado izquierdo de esta ecuación es la derivada del producto $\mu(x)\, y$, es decir

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)\, p(x)\, y = \frac{d}{dx}[\mu(x)\, y] = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu'(x)\, y.$$

es fácil notar que como

$$\mu'(x) = \mu(x)\, p(x)\,. \tag{3.15}$$

es de variable separable

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)\, p(x) \Leftrightarrow \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = p(x)\, dx,$$

luego se integra ambos miembros de la igualdad

$$\int \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \int p(x)\, dx$$

$$\ln|\mu(x)| = \int p(x)\, dx,$$

de donde se obtiene

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}. \tag{3.16}$$

y nos permite escribir (3.14) como

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)\, y] = \mu(x)\, q(x)\,.$$

luego al integrar y despejar la solución se tiene:

$$\int \frac{d}{dx}[\mu(x)\, y] = \int \mu(x)\, q(x)\, dx$$

$$\mu(x)\, y = \int \mu(x)\, q(x)\, dx + \mathbf{C}$$

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)\, q(x)\, dx + \mathbf{C}\right]. \tag{3.17}$$

La solución obtenida proporciona una familia uniparamétrica de soluciones, conocida como solución general de la ecuación (3.12).

Para resolver una EDO lineal no homogénea se recomienda , en primer lugar calcular (3.16) y luego sustituir en (3.17) para obtener la expresión habitual de la solución general dada por

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} q(x)\, dx + \mathbf{C}\right]. \tag{3.18}$$

Ejemplo 3.22

Resolver $y' = tan(x)\, y + cos(x)$.

Solución :
Podemos reescribir la EDO en su forma estándar $y' - tan(x)y = cos(x)$. Así $p(x) = -tan(x)$ y $q(x) = cos(x)$, cuyo factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int -tan(x)dx} = e^{ln|cos(x)|+C}$$

donde C es una constante arbitraria, que podemos considerarla como $C = 0$, pues luego se simplifica con la constante de integración

$$\mu(x) = cos(x)$$

luego por la ecuación (3.17) se tiene

$$y(x) = \frac{1}{cos(x)}\left[\int cos(x)cos(x)\,dx + K\right] = sec(x)\left[\int\left(\frac{1+cos(2x)}{2}\right)dx + K\right] =$$
$$= sec(x)\left[\int\left(\frac{1+cos(2x)}{2}\right)dx + K\right] = sec(x)\left[\frac{x+\frac{sen(2x)}{2}}{2} + K\right]$$

Por lo tanto, la solución general de la EDO esta dada por

$$y(x) = \frac{xsec(x)}{2} + \frac{sec(x)cos(2x)}{4} + Ksec(x)$$

donde K es una constante arbitraria.

Ejemplo 3.23

Resolver $(t^2-1)y' = ty + 2t(t^2-1)$, si $|t| > 1$
Solución :
Podemos reescribir la EDO en su forma estándar $y' - \frac{t}{t^2-1}y = 2t$. Así

$$p(t) = -\frac{t}{t^2-1} \quad \text{y} \quad q(x) = 2t$$

y su factor integrante es

$$\mu(t) = e^{-\int \frac{t}{t^2-1}dt} = e^{-\frac{ln|t^2-1|}{2}+C}$$

al igual que en el ejercicio anterior consideramos $C = 0$ y se obtiene

$$\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$$

luego por la ecuación (3.17) se tiene

$$y(t) = \sqrt{t^2-1}\left[\int \sqrt{t^2-1}\cdot 2tdt + K\right] = \sqrt{t^2-1}\left[\int \sqrt{t^2-1}\cdot 2tdt + K\right] =$$
$$= \sqrt{t^2-1}\left[\frac{2}{3}(t^2-1)^{3/2} + K\right] = \frac{2}{3}(t^2-1)^2 + K\sqrt{t^2-1}$$

Por lo tanto, la solución general de la EDO esta dada por

$$y(t) = \frac{2}{3}(t^2-1)^2 + K\sqrt{t^2-1}$$

donde K es una constante arbitraria.

3.6.3. PVIs Lineales de primer orden

En el capítulo anterior vimos problemas físicos que se modelan como problemas de valor inicial, una consecuencia inmediata del Teorema de existencia y unicidad es la unicidad de solución en un intervalo abierto I de un PVI lineal de la forma

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

siendo p y q funciones continuas en I.

Ejemplo 3.24

Resolver

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + tan(x)y = cos^2(x) \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$$

Solución: Teniendo en cuenta la EDO lineal en su forma estándar se tiene $p(x) = tan(x)$ y $q(x) = cos^2(x)$, su factor integrante esta dado por

$$\mu(x) = e^{\int tan(x)dx} = e^{ln|secx|+C}$$

donde C es una constante arbitraria, al igual que en la ecuación anterior, consideramos $C = 0$, luego

$$\mu(x) = sec(x)$$

Así, por la ecuación (3.17) se tiene $\mu(x) = sec(x)$ luego

$$y(x) = \frac{1}{sec(x)}\left[\int sec(x)cos^2(x)dx + K\right] = cos(x)\left[\int cos(x)dx + K\right] = cos(x)[sen(x) + K]$$

Es decir, la solución general de la EDO esta dada por

$$y(x) = cos(x)sen(x) + Kcos(x)$$

Además de la condición inicial $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ obtenemos

$$1 = cos\left(\frac{\pi}{4}\right)sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + Kcos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Longrightarrow 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{K}{\sqrt{2}} \Longrightarrow K = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto, la solución del PVI esta dado por $y(x) = cos(x)sen(x) + \frac{\sqrt{2}cos(x)}{2}$.

Ejemplo 3.25

Hallar la solución del problema de valor inicial

$$y' + y = cos(x) \text{ con } y(0) = 1/4 \quad .$$

Solución :

Teniendo en cuenta la EDO lineal en su forma estandar se tiene $p(x) = 1$ y $q(x) = cos(x)$, y su factor integrante es:

$$\mu(x) = e^{\int dx} = e^{x+C}$$

donde C es una constante que al igual que antes puede ser considerada como $C = 0$. Por (3.17) la solución general de la EDO esta dada por

$$y(x) = e^{-x}\left[\int e^x cos(x)dx + K\right]$$

donde K es una constante arbitraria, integrando por partes obtenemos

$$y(x) = e^{-x}\left[\frac{e^x(sen(x)+cos(x))}{2} + K\right]$$

luego la solución general de la EDO esta dada por

$$y(x) = \frac{sen(x)+cos(x)}{2} + \frac{K}{e^x}$$

Además de la condición inicial $y(0) = \frac{1}{4}$ tenemos que $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + C \implies C = -\frac{1}{4}$. Por lo tanto, la solución del PVI esta dado por

$$y(x) = \frac{sen(x)+cos(x)}{2} - \frac{1}{4}.$$

3.7. Ecuaciones diferenciales de Bernoulli

Una ecuación de primer orden que puede escribirse de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n, \tag{3.19}$$

donde p y q son funciones continuas en un intervalo I siendo n es un número real diferente de 0 y diferente de 1, es una **ecuación de Bernoulli**.

Como una nota histórica, se sabe que Gottfried Leibniz mostró que la ecuación propuesta por James Bernoulli, se puede reducir a una ecuación lineal haciendo la sustitución $z = y^{1-n}$, como se muestra a continuación.

Al dividir la ecuación (3.19) por y^n se tiene

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x). \tag{3.20}$$

Definiendo la nueva variable $z = y^{1-n}$, se tiene.

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \Rightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}.$$

Al reemplazar este último resultado en (3.20) se consigue

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x),$$

que es una ecuación lineal cuya solución está dada según (3.18).

Ejemplo 3.26

Resolver la EDO $xy' + 6y = 3xy^{4/3}, x > 0$

Solución:

Tenemos una EDO de Bernoulli con $n = \frac{4}{3}$, luego definimos una nueva variable $z = y^{1-\frac{4}{3}} \implies z = y^{-\frac{1}{3}}$, entonces

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{3}y^{-\frac{4}{3}}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}y^{-4/3}\left[3y^{4/3} - \frac{6y}{x}\right] = \frac{2y^{-1/3}}{x} - 1 = \frac{2z}{x} - 1$$

Así hemos obtenido una EDO lineal $\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = -1$, cuyo factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2ln|x|+C},$$

por lo tanto podemos tomar como factor integrante a

$$\mu(x) = \frac{1}{x^2},$$

Así, la solución general de la ecuación resultante según (3.18) esta dada por

$$z(x) = x^2\left[\int -\frac{1}{x^2}dx + K\right] = x^2\left[\tfrac{1}{x} + K\right] = x + x^2K$$

Por lo tanto, la solución general de la EDO inicial esta dada por

$$y(x) = z^{-3}(x) = \frac{1}{(x+x^2K)^3}$$

donde K es una constante arbitraria.

Ejemplo 3.27

Resolver el PVI $2xyy' + x^2 = y^2$ con $y(1) = 1$

Solución:

Podemos reescribir la EDO como

$$y' + \frac{x}{2y} = \frac{y}{2x} \Longrightarrow y' - \frac{y}{2x} = -\frac{x}{2y}$$

que es una EDO de Bernoulli con $n = -1$, luego definimos una nueva variable

$$z = y^{1-(-1)} \Longrightarrow z = y^2.$$

Así tenemos

$$\tfrac{dz}{dx} = 2y\tfrac{dy}{dx} = 2y\left[\tfrac{y}{2x} - \tfrac{x}{2y}\right] = \tfrac{y^2}{x} - x = \tfrac{z}{x} - x \Longrightarrow \tfrac{dz}{dx} - \tfrac{z}{x} = -x$$

que es una EDO lineal, cuyo factor integrante es $\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-ln|x|+C}$, por tanto podemos tomar como factor integrante a

$$\mu(x) = \frac{1}{x}.$$

Luego, la solución general de esta última EDO lineal esta dada por

$$z(x) = x\left[\int \tfrac{1}{x}(-x)\,dx + K\right] = x[-x + K] = -x^2 + xK$$

y la solución general de la EDO inicial esta dada por

$$y(x) = \sqrt{z(x)} = \sqrt{-x^2 + xK}$$

donde K es una constante arbitraria.

De la condición inicial $y(1) = 1$ obtenemos $1 = \sqrt{-1 + K} \Longrightarrow 2 = K$, luego la solución del PVI es

$$y(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}.$$

3.8. Ejercicios Resueltos

1. Si la velocidad v de un objeto que cae satisface la ecuación diferencial

$$v'(t) = 9{,}8 - \frac{v(t)}{2}$$

   a) Determine la solución de la ecuación con la condición inicial $v(0) = 9{,}8$.

   b) Calcule e interprete $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$.

Solución:

a) La ecuación $v'(t) = 9{,}8 - \frac{v(t)}{2}$ es de variables separables, luego

$$\frac{v'}{19{,}6 - v} = \frac{1}{2}$$

Así, integrando $\int \frac{dv}{19{,}6-v} = \int \frac{1}{2} dt$ se tienen la solución general

$$-ln\,|19{,}6 - v| = \frac{t}{2} + C \Longrightarrow ln\,|19{,}6 - v| = -\frac{t}{2} + C \Longrightarrow 19{,}6 - v = Ce^{-\frac{t}{2}}$$

y se escribe como

$$v\,(t) = 19{,}6 - Ce^{-\frac{t}{2}}$$

donde C es una constante arbitraria. Además, por la condición inicial $v(0) = 9{,}8$, obtenemos $9{,}8 = 19{,}6 - C \Longrightarrow C = 9{,}8$, luego la solución del PVI es $v\,(t) = 19{,}6 - 9{,}8e^{-\frac{t}{2}}$.

b) Al calcular el límite de v, se tiene

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty} 19{,}6 - 9{,}8e^{-\frac{t}{2}} = 19{,}6.$$

Este valor indica que la velocidad del objeto cayendo, después de un largo tiempo se estabilizará en 19,6.

2. Resuelve el PVI $\frac{dy}{dx} = -y + 1 - e^{-x}$ sujeto a $y\,(0) = 1$ y determine $\lim\limits_{x\to+\infty} y\,(x)$

Solución:
La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + y = 1 - e^{-x}$$

es una EDO lineal de primer orden no homogénea, donde $p\,(x) = 1$ y $q\,(x) = 1 - e^{-x}$ y cuyo factor integrante es

$$u\,(x) = e^{\int 1dx} = e^{x}$$

luego la solución general de la EDO esta dada por

$$y\,(x) = \frac{1}{e^{x}} \int \left[e^{x}\left(1 - e^{-x}\right)\right] dx = e^{-x} \int \left(e^{x} - 1\right) dx = e^{-x}\left(e^{x} - x + C\right) = 1 - xe^{-x} + Ce^{-x}$$

Por la condición inicial $1 = y\,(0) = 1 + C$ se tiene $C = 0$. Por lo tanto, la solución del PVI es

$$y\,(x) = 1 - xe^{-x},$$

Cálculo del límite

$$\lim_{x\to+\infty} y\,(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{x}{e^{x}} = 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}} = 1 - 0 = 1.$$

3. Dado el PVI $y' = \frac{8+t^{3}}{3y-y^{2}}$ sujeto a $y\,(2) = b$

a) Determine los valores que puede tomar b para que PVI tenga solución.

b) Si $b = e$, determine si el PVI posee solución única.

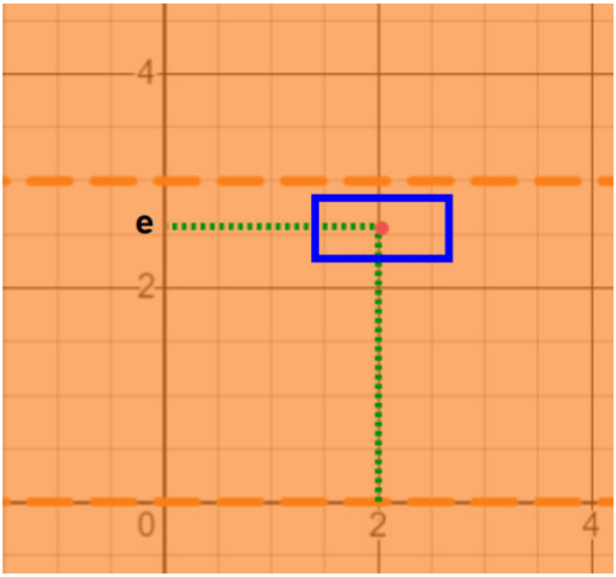
Solución:

a) Tenemos el PVI $\begin{cases} y' = F(t,y) \\ y(2) = b \end{cases}$ donde $F(t,y) = \frac{8+t^3}{3y-y^2}$ y cumple que F es continua en

$$\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0,3\}),$$

luego haciendo uso del Teorema de existencia y unicidad tenemos que la solución del PVI existirá para $b \in \mathbb{R} - \{0,3\}$ ya que siempre sera posible encontrar un rectángulo donde F sea continua y tal que ese rectángulo abierto incluya al punto $(2,b)$.

b) Además $\frac{\partial F}{\partial y}(t,y) = -\frac{(8+t^3)(3-2y)}{(3y-y^2)^2}$ así , $\frac{\partial F}{\partial y}$ es continua en $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0,3\})$ entonces como $b = e$ donde $e \neq 0$ y $e \neq 3$ haciendo uso del Teorema de existencia y unicidad podemos encontrar una región rectangular que incluya en su interior al punto $(2,e)$ (como se muestra en la figura) y donde F, F_y sean continuas.



4. Resuelve la EDO

$$1 + \left(\frac{t}{y} - cos(y)\right) y' = 0$$

Solución:
Al escribir la EDO $\left(\frac{t}{y} - cos(y)\right) \frac{dy}{dt} = -1$, en la forma

$$dt + \left(\frac{t}{y} - cos(y)\right) dy = 0$$

tenemos que $P(t,y) = 1$ y $Q(t,y) = \frac{t}{y} - cos(y)$, luego $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ y $\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{y}$, como $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial t}$, la EDO no es exacta. Buscaremos un factor integrante $\mu(y)$ que la convierta en exacta. Así

$$ln|\mu(y)| = -\int \frac{-\frac{1}{y}}{1} dy = ln|y| + C$$

De donde podemos considerar $\mu(y) = y$, luego al multiplicar la EDO inicial por el factor integrante $\mu(y)$ se tiene

$$ydt + (t - ycos(y))dy = 0$$

la cual es una EDO exacta, entonces la solución de la EDO estará dada por $f(t,y)=c$, donde

$$\nabla f(t,y)=(y,t-y\cos(y)).$$

Es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y)=y \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)=t-y\cos(y),$$

Al integrar $\frac{\partial f}{\partial t}(t,y)$ respecto a t, se tiene $f(t,y)=\int y dt = yt+C(y)$, derivando parcialmente respecto de y,

$$t+C'(y)=\frac{\partial f}{\partial y}=t-y\cos(y)\Longrightarrow C'(y)=-y\cos(y)$$

integrando esta última igualdad obtenemos $C(y)=-\int y\cos(y)\,dy=-y\,sen(y)-\cos(y)$. Por lo tanto,

$$f(t,y)=yt-y\,sen(y)-\cos(y)=c$$

es la solución general de la EDO donde c es una constante arbitraria.

5. Resolver el PVI $\frac{dy}{dt}=\frac{3}{t}\left[y-y^{2/3}\right]$ sujeto a $y(1)=0$.
Solución:

La EDO $\frac{dy}{dt}=\frac{3}{t}\left[y-y^{2/3}\right]$ se puede escribir como

$$\frac{dy}{dt}-\frac{3}{t}y=-\frac{3}{t}y^{2/3}$$

que es una EDO de Bernulli, luego multiplicando por $y^{-2/3}$ y haciendo el cambio de variable $z=y^{1-2/3}=y^{1/3}$, tenemos

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{3}y^{-2/3}\frac{dy}{dt},$$

al reemplazar esta última expresión en la ecuación de Bernoulli se tiene la EDO lineal

$$\frac{dz}{dt}-\frac{1}{t}z=-\frac{1}{t}$$

cuyo factor integrante es $\mu(t)=e^{-\int\frac{1}{t}dt}=e^{-ln|t|+c}$ y podemos considerar $\mu(t)=\frac{1}{t}$ luego la solución de la EDO lineal esta dada por

$$z(t)=t\left[-\int\frac{1}{t^2}dt+C\right]=t\left(\frac{1}{t}+C\right)=1+Ct,$$

donde C es una constante arbitraria. Al regresar a la variable original $y=z^3$, la solución general es

$$y=(1+Ct)^3$$

Además por la condición inicial $0=y(1)=(1+C)^3$ se tiene $C=-1$.

Por lo tanto, la solución del PVI es

$$y(t)=(1-t)^3.$$

6. Considere el PVI

$$\begin{cases}(x+1)y'=1+y\\ y(x_0)=2\end{cases}$$

Determine los valores de $x_0\in\mathbb{R}$ para los cuales se puede asegurar que el PVI tiene solución única. Explique.

Solución:

Escribimos la EDO $(x+1)y' = 1 + y$ como

$$y' = \frac{1+y}{x+1},$$

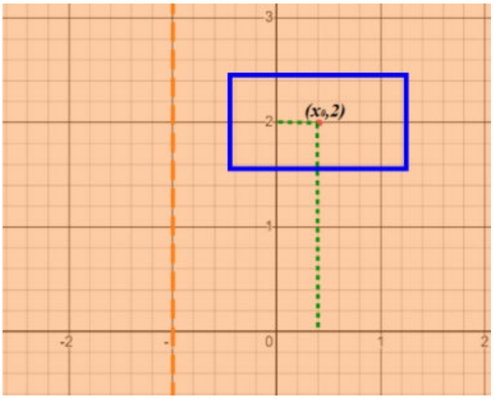
así

$$F(x,y) = \frac{1+y}{x+1}$$

luego la función F es continua en

$$(\mathbb{R} - \{-1\}) \times \mathbb{R}$$

Además, $F_y(x,y) = \dfrac{1}{x+1}$ implica que F_y también es continua en $(\mathbb{R} - \{-1\}) \times \mathbb{R}$. Por lo tanto, por el Teorema de existencia y unicidad, concluimos que para que el PVI tenga solución única los valores que debe tomar $x_0 \in \mathbb{R} - \{-1\}$ ya que siempre podemos encontrar una región rectangular que incluya al punto $(x_0, 2)$ (como se muestra en la figura) donde F y F_y es continua.



7. Resolver la EDO

$$y^2 cosx dx + (4 + 5ysenx)\, dy = 0.$$

Solución:
Notemos que $P(x,y) = y^2 cos(x)$ y $Q(x,y) = 4 + 5ysen(x)$. Así,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2ycosx \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 5ycosx$$

luego la EDO no es exacta. Buscaremos el factor integrante $\mu = \mu(y)$ para transformarla en exacta, es decir

$$ln\,|\mu(y)| = -\int \frac{-3ycosx}{y^2 cosx} dy = \int \frac{3}{y} dy = 3ln\,|y| + C$$

Consideramos $\mu(y) = y^3$. Luego multiplicando la ecuación dada (inicialmente) por $\mu(y)$ obtenemos la EDO exacta

$$y^5 cosx dx + y^3 (4 + 5ysenx)\, dy = 0$$

entonces existe f tal que la solución es $f(x,y) = C$ donde

$$\nabla f = \left(y^5 cosx, y^3 (4 + 5ysenx)\right)$$

Asi tenemos $f_x(x,y) = y^5 cosx$ y $f_y(x,y) = y^3(4 + 5ysenx)$ integrando $f_x(x,y)$ respecto de x

$$f(x,y) = \int f_x(x,y) dx = \int y^5 cosx dx = y^5 senx + g(y)$$

derivando $f(x,y)$ respecto de y

$$y^3 (4 + 5ysenx) = f_y = 5y^4 senx + g'(y)$$

entonces $4y^3 = g'(y)$ luego $g(y) = y^4$. Por lo tanto la solución general de la EDO es

$$y^5 senx + y^4 = C$$

donde C es una constante arbitraria.

8. Resolver la PVI $y' + \frac{1}{x}y = h(x)$, $y(1) = 2$ donde $h(x) = \begin{cases} x, & si \quad 1 \le x \le 2 \\ 0, & si \quad x > 2 \end{cases}$

   Solución:

   - Si $1 \le x \le 2$, la EDO $y' + \frac{1}{x}y = x$, es lineal, donde $p(x) = \frac{1}{x}$ y $q(x) = x$ cuyo factor integrante es
   $$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = xC$$
   consideramos $\mu(x) = x$ luego al multiplicar la EDO por el factor integrante, se tiene la solución
   $$y(x) = \frac{1}{x}\left[\int x^2 dx + c_1\right] = \frac{1}{x}\left[\frac{x^3}{3} + c_1\right] = \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x}$$
   donde c_1 es una constante arbitraria.
   - Si $x > 2$, la EDO $y' + \frac{1}{x}y = 0$ es de variables separables y
   $$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Longrightarrow ln\,|y| = -ln\,|x| + c_2$$
   luego la solución es $y(x) = \dfrac{c_2}{x}$, c_2 es constante arbitraria. El análisis anterior permite escribir la solución
   $$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{c_1}{x} & si \quad 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{c_2}{x} & si \quad x > 2 \end{cases}$$
   Además, por condición inicial se tiene
   $$2 = y(1) = \frac{1}{3} + c_1 \Longrightarrow c_1 = \frac{5}{3},$$
   luego ya que la solución de una EDO de primer grado debe ser continua debe cumplirse que
   $$\lim_{x\to 2^-} y(x) = \lim_{x\to 2^+} y(x)$$
   es decir
   $$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{3} + \frac{5}{3x} = \lim_{x\to 2^+} \frac{c_2}{x}$$
   luego
   $$\frac{4}{3} + \frac{5}{6} = \frac{c_2}{2} \Longrightarrow c_2 = \frac{13}{3}.$$
   Por lo tanto,
   $$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{5}{3x} & si \quad 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{13}{3x} & si \quad x > 2 \end{cases}.$$

9. Dado el PVI
$$\begin{cases} xy' = y(lny - lnx + 1), & x > 0, y > 0 \\ y(1) = e \end{cases}$$

Si $y(x)$ es solución del PVI. Determine $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.
Solución:
La ecuación $xy' = y(lny - lnx + 1)$, $\quad x > 0, y > 0$ se escribe,

$$y' = \frac{y}{x}\left(ln\left(\frac{x}{y}\right) + 1\right)$$

que es una EDO homogénea. Definimos $v = \frac{y}{x} \iff xv = y$, luego

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

Así la EDO homogénea se reduce a una EDO de variables separables

$$x\frac{dv}{dx} + v = v(lnv + 1)$$

equivalentemente

$$x\frac{dv}{dx} = vlnv \Longrightarrow \frac{dv}{vlnv} = \frac{dx}{x}$$

integrando $\int \frac{dv}{vlnv} = \int \frac{dx}{x}$ se tiene la solución $ln\,|lnv| = ln\,|x| + C$ donde $lnv = xC$
luego $v = e^{Cx} \Longrightarrow \frac{y}{x} = e^{Cx}$. Por lo tanto, la solución general es

$$y = xe^{Cx}$$

Por la condición inicial $y(1) = e$ obtenemos $e = e^{C}$ entonces $C = 1$. Luego la solución del PVI es

$$y = xe^{x},$$

aplicando el límite a $y = y(x)$ cuando $x \to +\infty$ se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{x} = +\infty.$$

10. Encuentre el valor del parámetro a para que la EDO

$$\left(x + ye^{2xy}\right)dx + axe^{2xy}dy = 0$$

sea exacta, luego encuentre su solución general.
Solución:
De la EDO tenemos que $P(x,y) = x + ye^{2xy}$ y $Q(x,y) = axe^{2xy}$, además

$$\tfrac{\partial P}{\partial y} = e^{2xy} + ye^{2xy}2x \qquad \text{y} \qquad \tfrac{\partial Q}{\partial x} = ae^{2xy} + axe^{2xy}2y$$

para que la EDO sea exacta se debe cumplir

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Longrightarrow e^{2xy} + ye^{2xy}2x = ae^{2xy} + axe^{2xy}2y.$$

de donde se obtiene $a = 1$.
Considerando $a = 1$, la solución general de la ecuación diferencial esta dada por $F(x,y) = C$ donde

$$\nabla F = (P, Q)$$

Así, tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}=x+ye^{2xy} \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial y}=xe^{2xy}$$

integrando $\frac{\partial F}{\partial x}$ respecto de x se tiene

$$F(x,y)=\int \frac{\partial F}{\partial x}dx=\int \left(x+ye^{2xy}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{ye^{2xy}}{2y}+g(y)=\frac{x^2}{2}+\frac{e^{2xy}}{2}+g(y)$$

al derivar parcialmente respecto de y obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial y}=xe^{2xy}+g'(y)$$

consecuentemente

$$xe^{2xy}=xe^{2xy}+g'(y)\Longrightarrow g'(y)=0\Longrightarrow g(y)=K.$$

Por lo tanto,

$$F(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{e^{2xy}}{2}+K,$$

luego la solución general de la EDO dada es

$$\frac{x^2}{2}+\frac{e^{2xy}}{2}=C,$$

donde C es una constante arbitraria.

11. Resolver la ecuación diferencial $\left[ycos\left(\frac{y}{x}\right)+xsen\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx-xcos\left(\frac{y}{x}\right)dy=0, \quad x>0$ e $y>0$
Solución:
Al dividir la EDO por y obtenemos

$$\left[cos\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x}{y}sen\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx-\frac{x}{y}cos\left(\frac{y}{x}\right)dy=0$$

luego

$$-\frac{x}{y}cos\left(\frac{y}{x}\right)dy=-\left[cos\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x}{y}sen\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx$$

equivalentemente

$$cos\left(\frac{y}{x}\right)dy=\left[\frac{y}{x}cos\left(\frac{y}{x}\right)+sen\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

esta última ecuación es homogénea, para obtener su solución aplicamos el cambio de variable $u=\frac{y}{x}$, así $ux=y$ derivando respecto a x $\frac{du}{dx}x+u=\frac{dy}{dx}$, luego

$$\frac{du}{dx}x+u=u+tanu$$

al simplificar, se tiene

$$\frac{du}{dx}x=tanu$$

que es una EDO separable, $cotudu=\frac{dx}{x}$, integrando obtenemos

$$\int cotudu = \int \frac{1}{x}dx \Longrightarrow ln\,|senu| = ln\,|x| + C \Longrightarrow |senu| = K\,|x|$$

donde K es una constante positiva. Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial es

$$sen\left(\frac{y}{x}\right) = Cx.$$

considerando C es una constante arbitraria.

12. Resuelva la siguiente EDO lineal

$$xy' + \left(1 + \tfrac{1}{x}\right)y = e^{1/x};\, x > 0$$

Solución:
Al dividir la EDO por x, escribimos

$$y' + \left(\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{x^2}\right)y = \tfrac{e^{1/x}}{x}$$

donde $p(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ y $q(x) = \frac{e^{1/X}}{X}$ con factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx} = e^{ln|x|-x^{-1}+C} = C\,|x|\,e^{-\frac{1}{x}}$$

consideramos $\mu(x) = xe^{-1/x}$. Por lo tanto, la solución esta dada por

$$y\,(x) = \frac{\int\left(xe^{-1/x}\frac{e^{1/x}}{x}\right)dx}{xe^{-\frac{1}{x}}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\int (1)\,dx = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}(x + C) = e^{1/x} + C\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

donde C es una constante arbitraria.

13. Resolver la ecuación diferencial $(4x + 3y + 15)\,dx - (2x + y + 7)\,dy = 0.$
Solución:
La forma de la EDO nos sugiere llevarla a una ecuación homogénea, para ello encontremos el punto de intersección (x_0, y_0) de las rectas L_1 y L_2, es decir resolver el sistema

$$\begin{cases} 4x + 3y + 15 = 0 \\ 2x + y + 7 = 0 \end{cases}$$

de donde, $x_0 = -3$ e $y_0 = -1$. Haciendo el cambio de variable $z = x + 3$, $w = y + 1$, tenemos $dz = dx$, $dw = dy$
Reemplazando en la EDO inicial tenemos

$$(4\,[z - 3] + 3\,[w - 1] + 15)\,dz - (2\,[z - 3] + [w - 1] + 7)\,dw = 0$$

$$(4z + 3w)\,dz - (2z + w)dw = 0$$

que es una ecuación homogénea en las variables z y w por lo que para resolverla necesitamos hacer un nuevo cambio de variable

$$w = uz$$

donde $u = u(z)$
Observamos que $dw = udz + zdu$ así, la EDO homogénea se transforma en una EDO separable

$$(4z + 3uz)\,dz - (2z + uz)\,(udz + zdu) = 0$$

al agrupar términos semejantes

$$\left(4z + 3uz - 2zu - u^2z\right)dz - z\,(2z + uz)\,du = 0$$

equivalentemente

$$z\left(4+u-u^2\right)dz - z^2\left(2+u\right)du = 0$$

Es decir,

$$z\left(4+u-u^2\right)dz = z^2\left(2+u\right)du$$

integrando

$$\int \frac{1}{z}dz = \int \frac{2+u}{4+u-u^2}du$$

obtenemos

$$ln|z| = \int \frac{2+u}{\frac{17}{4}-\left(u-\frac{1}{2}\right)^2}du$$

Aplicando el método de sustitución trigonométrica con

$$u-\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2}sen\theta$$

tenemos que

$$ln|z| = \int \frac{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}sen\theta+\frac{5}{2}\right)\frac{\sqrt{17}}{2}cos\theta d\theta}{\frac{17}{4}cos^2\theta} = \int\left(tan\theta+\frac{5\sqrt{17}}{17}sec\theta\right)d\theta$$

$$ln\,|z| = ln\,|sec\theta| + \frac{5\sqrt{17}}{17}ln\,|sec\theta+tan\theta| + C$$

luego

$$ln\,|z| = ln\left|\frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{4+u-u^2}}\right| + \frac{5\sqrt{17}}{17}ln\left|\frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{4+u-u^2}}+\frac{u-\frac{1}{2}}{\sqrt{4+u-u^2}}\right| + C$$

$$ln\,|z| = 2ln\left|\frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{4+\frac{w}{z}-\left(\frac{w}{z}\right)^2}}\right| + \frac{5\sqrt{17}}{17}ln\left|\frac{\sqrt{17}+2\left(\frac{w}{z}\right)-1}{2\sqrt{4+\frac{w}{z}-\left(\frac{w}{z}\right)^2}}\right| + C$$

Por lo tanto, la solución de la EDO esta dada por

$$ln\,|x+3| = ln\left|\frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{4+\frac{y+1}{x+3}-\left(\frac{y+1}{x+3}\right)^2}}\right| + \frac{5\sqrt{17}}{17}ln\left|\frac{\sqrt{17}+2\left(\frac{y+1}{x+3}\right)-1}{2\sqrt{4+\frac{y+1}{x+3}-\left(\frac{y+1}{x+3}\right)^2}}\right| + C$$

donde C es una constante arbitraria.

3.9. Ejercicios Propuestos

1. Aplicando el teorema de existencia y unicidad para una EDO de primer orden, determine si los siguientes PVI tienen solución única:

   a) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - xy^3$, $y(1) = 6.$

   b) $\dfrac{dy}{dx} = 3y^{2/3}$, $y(2) = 0.$

   c) $\dfrac{dy}{dx} = xy^{1/2}$, $y(0) = 0.$

2. Halle la solución de las siguientes EDO

a) $(1+e^{x})yy' = e^{x}$
b) $(x-4)y^{4}dx - x^{3}(y^{2}-3)dy = 0$
c) $y' = y - y^{3}$
d) $y' = y^{2} - y^{3}$
e) $(1+y^{2})y' = 1+x^{2}$
f) $y' = (tanx)y + cosx$
g) $y' = \frac{y}{x} + x$
h) $y' + \frac{y}{x} = -xy^{2}$
i) $y' = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}$
j) $y' + tan(x)y = cos^{2}(x)$
k) $xy' - 2y = xln(x)$
l) $xy' + 3y = 3x^{2} - 2x$
m) $xy' - (x-3)y = \frac{x+1}{x^{2}}$

3. Resolver los siguientes PVIs

   a) $y' = (1-\sqrt{y})y$, sujeto a $y(0) = \frac{1}{2}$
   b) $\left(1+y^{2}\right)y' = 1+x^{2}$, sujeto a $y(0) = -1$
   c) $y' + y + y^{2} = 0$, sujeto a $y(0) = 2$
   d) $y' + y = x\sqrt{y}$, sujeto a $y(0) = 1$
   e) $x^{2}y' + 2xy - y^{3} = 0$, sujeto a $y(1) = 1$
   f) $2sen(x)y' - cos(x)y + sen^{2}(x)y^{3} = 0$, sujeto a $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

4. Resolver

   a) $\left(3x^{2}+6xy^{2}\right) + \left(6x^{2}y+4y^{3}\right)y' = 0$
   b) $(x+y)dx + (x+2y)dy = 0$
   c) $\left(2xy + x^{2}y + \frac{y^{3}}{3}\right) + \left(x^{2}+y^{2}\right)y' = 0$
   d) $xdx + ydy = \frac{xdy+ydx}{x^{2}+y^{2}}$
   e) $y^{2}dx + \left(xy^{2} + 3xy + \frac{1}{y}\right)dy = 0$

5. Resuelva el PVI $\frac{dr}{d\theta} + \frac{a^{2}}{r}sen2\theta = 0$, $r(0) = a > 0$.

6. Resuelva la siguiente EDO $y' + \frac{1}{x}y = h(x)$ donde $h(x) = \begin{cases} x & 1 \le x \le 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$

   sujeto a $y(1) = 2$

7. Determine $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ si $y(x)$ es la solución del PVI $\begin{cases} x^{2}y' = \left(1+y^{2}\right) \\ y(1) = 0 \end{cases}$

8. En un laboratorio de biología, los especialistas suponen que una colonia de bacterias crece a una tasa igual a la milésima parte de la cantidad de bacterias presentes $P(t)$ en el instante t(horas). Si después de 100 horas la cantidad de bacterias presentes era de 2000, determine la cantidad de bacterias presentes al cabo de 200 horas.

   Rpta. Al cabo de 200 horas, la población de bacterias es de 2 211 aproximadamente

9. La rapidez de propagación de una enfermedad infecciosa en una ciudad es directamente proporcional al producto de la población infectada por la población no infectada. En el instante inicial, cuando la enfermedad fue detectada, 10 casos fueron registrados; dos días después, había 100 casos registrados. Suponemos que la ciudad, de 10 mil habitantes, es un ambiente cerrado (nadie entró ni salió de ella desde instante inicial). Determine el PVI que describe la propagación de la enfermedad e indique cuál es la población infectada después de 5 días.

10. Una lata de leche se encuentra inicialmente a $25°C$. Se coloca la lata en una refrigeradora, donde la temperatura es de $4°C$. Suponiendo que la temperatura de la leche contenida en la lata desciende $7°C$ después de 20 minutos, determine el tiempo para que la temperatura sea de $8°C$.

    Rpta. La temperatura de la lata de leche es de $8°C$ luego de 82 min aproximadamente.

11. Se toma un termómetro colocado en una habitación donde la temperatura es de $20°C$ y se lleva al exterior, donde la temperatura del aire es de $-4°C$. Después de medio minuto se ve que el termómetro marca $16°C$. Determine la lectura del termómetro después de un minuto de sacarlo de la habitación.

12. Sobre un cuerpo en caída vertical actúan el peso y la fuerza de resistencia del aire. Ésta última tiene una magnitud igual a la velocidad instantánea del cuerpo. Si inicialmente el cuerpo se deja caer desde el reposo y la velocidad instantánea $v = v(t)$ es tal que $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 10m/seg$. Determine la velocidad del cuerpo al cabo de 5 segundos. Considere $g = 9,8m/s^2$.

    Rpta. $9{,}93m/s$

13. Un tanque de 150 litros contiene inicialmente $30kg$ de sal disueltas en 90 litros de agua. La solución, que contiene $0,2kg/l$ de sal, fluye hacia adentro del tanque a razón de $4l/min$, y la mezcla homogenizada mediante un agitador mecánico fluye hacía el exterior del tanque a una razón de $3l/min$. Determine la cantidad de sal que contiene el tanque cuando está completamente lleno.

    Rpta: Cuando el tanque está lleno contiene 32,59 kg de sal aproximadamente.

14. En ACEROS AREQUIPA el proceso de laminación en caliente se inicia en el horno de precalentamiento que tiene una temperatura de $1150°C$, para la elaboración de productos terminados de perfiles de acero y varillas de construcción. Las varillas son retiradas del horno para iniciar el proceso de enfriamiento. Luego de 30 minutos la temperatura de las varillas es de $135°C$. La temperatura del medio ambiente es de $20°C$. Si la tasa de cambio de la temperatura de las varillas es directamente proporcional a la diferencia de la temperatura de las varillas y la temperatura del medio. Determine la solución de la EDO que modela el proceso de enfriamiento en cualquier instante.

15. Después que se abre el paracaídas, el aire ofrece a un paracaidista una resistencia que es proporcional a $v(t)$ que es la componente vertical de su velocidad instantánea (constante de proporcionalidad 5). Para cierto paracaidista de 90 kg. de masa total, se pide determinar la velocidad $v(t)$ en todo instante de tiempo t. Considere que el hombre se lanza cuando $t = 0$, desde un avión que vuela en trayectoria horizontal. Nota: Considere $g = 9,8m/s^2$

    Rpta. $v(t) = 176{,}4 - 176{,}4e^{-1/18t}$

16. Un tanque contiene 200 litros de una solución salina con una concentración de $0,15kg$ de sal por litro. Se vierte al tanque una solución salina con una concentración de $0,10kg/l$ a razón de $5l/min$. Al mismo tiempo, se bombea hacia afuera la solución homogenizada mediante un agitador mecánico a razón de $7l/min$. Calcule cuál será la concentración de la solución salina en el tanque luego de 20 minutos.

    Rpta. $0{,}13kg/l$

17. La función de consumo de un individuo crece con el tiempo a una tasa dada por la ecuación

$$\frac{dC}{dt} = -2C + 100.$$

    Encuentra la trayectoria temporal del consumo de esta persona dado que $C(0) = 10$.

18. Sea $I(t)$ el valor de la inversión, t días después del inicio de la inversión y satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dI}{dt} = 0{,}002I + 5.$$

    Encuentra el valor de la inversión 15 dias después si el nivel inicial de la inversión es $I(0) = 2000$.

19. El valor V de un pozo de petróleo, que se explora, inicialmente es $V(0) = 2700$, y está decayendo a una tasa
$$\frac{dV}{dt} = -0{,}04V + 28.$$
Determine cuanto sera el valor del bien en $t = 20$.

Capítulo 4

Ecuaciones diferenciales Ordinarias de Orden superior.

4.1. Introducción

Considere un cuerpo de masa m al que se le aplica una fuerza f y se mueve en la dirección del eje X positivo. Sea $x(t)$ la posición del móvil en el tiempo t. La segunda ley de Newton afirma que

$$m \cdot a = \text{suma de fuerzas} \tag{4.1}$$

entonces en este caso

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f \tag{4.2}$$

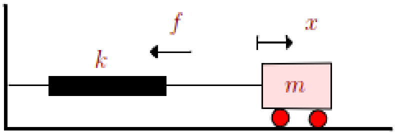
La fuerza f es en general función de x, x' y posiblemente t, esto es $f = f(t, x, x')$. Es decir

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x, x') \tag{4.3}$$

Notemos que esta es una EDO de segundo orden.

Un sistema de resorte-masa

Supongamos que se une una masa m en posición fija a un resorte y que una fuerza f es ejercida sobre m



La ley de Hook afirma que la relación entre esta fuerza y la contracción del resorte es lineal de la forma

$$f = -kx,$$

donde $k > 0$ es llamada la constante de restauración del resorte. Si la masa m no esta bajo una fuerza externa f_{ext}, y la masa se mueve libre de fricción, la ley de Newton aplicada en este caso es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{4.4}$$

Con el objetivo de determinar $x(t)$, la posición de la masa m en cualquier instante, tenemos que resolver la ecuación (4.4). Sin embargo la solución depende del estado inicial del sistema.

El estado inicial esta compuesto por $x(t_0)$, $x'(t_0)$, donde t_0 es constante. La ecuación anterior con este estado inicial es llamado PVI

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \\ x(t_0) = c_0 \\ x'(t_0) = c_1 \end{cases} \tag{4.5}$$

Se puede verificar de una manera simple que la ecuación (4.4) admite dos soluciones

$$x_1(t) = cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad y \quad x_2(t) = sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right),$$

mientras que el PVI (4.5) admite una única solución

$$x(t) = c_0 cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0)\right) + c_1\sqrt{\frac{m}{k}} sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0)\right)$$

Notemos que si $c_0 = c_1 = 0$, entonces la solución del PVI es $x(t) = 0$ para todo t(el sistema permanece estático). Similarmente, si un motor externo es conectado a la masa m, este ejerce una fuerza $f_{ext} = r(t)$ sobre la masa, entonces tenemos que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + r(t).$$

Por ejemplo, si consideramos a esta fuerza externa como:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 1 \\ 1 & si \quad t > 1 \end{cases},$$

entonces el PVI a resolver es

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = r(t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

aquí la solución es dada por

$$x(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 1 \\ \frac{1}{k}\left(1 - cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right) & si \quad t > 1 \end{cases}$$

4.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

Una EDO lineal de segundo orden es una ecuación de la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

donde $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones reales que dependen de la variable x.

- Si $r(x) = 0$ la EDO será llamada homogénea.
- Si $r(x) \neq 0$ la EDO será llamada no homogénea.

4.2.1. Ecuación lineal homogénea de segundo orden

Una EDO lineal homogénea de segundo orden es de la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{4.7}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones reales que dependen de la variable x.

Comenzaremos observando que cualquier combinación lineal de dos soluciones de la ecuación homogénea, es también solución. Es decir, si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de la EDO (4.7) y $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ entonces la función

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

es también solución de (4.7) (para comprobarlo basta derivar $y(x)$ y sustituir en la ecuación).

Definición Funciones linealmente independientes

El conjunto de funciones $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\}$ es linealmente independiente (l.i.) en el intervalo $[a, b]$, si la ecuación $\lambda_1y_1(x) + \lambda_2y_2(x) + \cdots + \lambda_ny_n(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$, admite como única solución a

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

de lo contrario el conjunto se denomina linealmente dependiente (l.d.).

Dos funciones, $\{y_1(x), y_2(x)\}$, serán linealmente dependientes si existe una constante k tal que

$$y_1(x) = ky_2(x)$$

y linealmente independientes si el cociente $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ no es una función constante de x .

Definición Sistema fundamental de soluciones

La pareja de soluciones $\{y_1(x), y_2(x)\}$, forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \text{ en } x \in]a, b[$$

si son linealmente independientes en $]a, b[$.

En la práctica es frecuente estudiar la dependencia lineal a través del Wronskiano.

Definición Wronskiano de un conjunto de funciones

Definimos el Wronskiano del conjunto de funciones $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\}$ y denotamos por $W(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ al determinante dado por

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{4.8}$$

Teorema 4.1 Propiedad del Wronskiano de soluciones

Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones de la ecuación homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

en el intervalo $]a, b[$, siendo $p(x)$ y $q(x)$ funciones continuas en el intervalo $]a, b[$.

- *Estas soluciones son linealmente dependientes si y solo si el wronskiano es idénticamente nulo en el intervalo $]a, b[$.*
- *Estas soluciones son linealmente independientes si y solo $W(y_1, y_2) \neq 0$ para todo x en $]a, b[$.*

Ejemplo 4.1

Consideremos la EDO lineal homogénea $y'' + y = 0$. Es fácil ver que $y_1(x) = cosx$ e $y_2(x) = senx$ son soluciones de la ecuación diferencial. Además su Wronskiano es diferente de cero, pues

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} cosx & senx \\ -senx & cosx \end{vmatrix} = cos^2(x) - (-sen^2(x)) = 1 \neq 0.$$

Por lo tanto, y_1 e y_2 son soluciones linealmente independientes de la EDO $y'' + y = 0$.

Teorema 4.2

Considerando la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones continuas en $]a, b[$. Entonces

1. *Existen dos soluciones y_1 e y_2 linealmente independientes de la ecuación.*

2. *Si ϕ es una solución arbitraria de la ecuación, entonces existen constantes c_1, c_2 tal que*

$$\phi = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Esto significa que el problema de encontrar la solución general de una ecuación lineal homogénea de segundo orden está resuelto si se han encontrado dos soluciones no proporcionales.

Caso 1: $q(x) = 0$ para todo x

A continuación presentaremos casos especiales en la que es posible resolver EDOs lineales de segundo orden. En este caso la ecuación a resolver seria

$$y'' + p(x)y' = 0 \tag{4.9}$$

La solución se obtiene definiendo una nueva variable u como $u = y'$, luego la ecuación (4.9) se transforma en una EDO lineal de primer orden de la forma

$$u' + p(x)u = 0 \tag{4.10}$$

la cual necesitará ser resuelta con los métodos del capítulo anterior para posteriormente encontrar la solución de la EDO inicial.

Ejemplo 4.2

Considere la EDO

$$xy'' - y' = 0, \quad x > 0$$

Solución:
En este caso tenemos que $q(x) = 0$ y aplicando el cambio de variable $u = y'$, se tiene

$$xu' - u = 0$$

observemos que esta EDO es separable $u' = \frac{u}{x}$, para resolverla integraremos ambos miembros de la ecuación

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} \Longrightarrow ln\,|u| = ln\,|x| + K$$

Así, podemos escribir

$$u = Kx \Longrightarrow y' = Kx \Longrightarrow y(x) = \int Kx dx$$

consecuentemente $y(x) = K\frac{x^2}{2} + C$, donde K y C son constantes arbitrarias.

Caso 2:
Una de las soluciones de la EDO es conocida

Supongamos que tenemos una función y_1 conocida que es la solución de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{4.11}$$

Aplicaremos el "Método de reducción de orden"para encontrar otra solución y_2 de la EDO (4.11) tal que y_1 e y_2 sean linealmente independientes. Para esto consideraremos que

$$y_2(x) = c(x)y_1(x)$$

donde $c(x)$ debe ser una función real no constante. Luego teniendo en cuenta que y_2 satisface la EDO (4.11) tenemos que

$$\left[c''(x)y_1(x) + c'(x)y_1'(x) + c'(x)y_1'(x) + c(x)y_1''(x)\right] + p(x)\left[c'(x)y_1(x) + c(x)y_1'(x)\right] + q(x)\left[c(x)y_1(x)\right] = 0$$

luego

$$\left[c''(x)y_1(x)+c'(x)y_1'(x)+c'(x)y_1'(x)\right]+p\,(x)\,c'(x)y_1(x)+c(x)\left[y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1(x)\right]=0$$

considerando que $y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1(x)=0$ la expresión se reduce a

$$\left[c''(x)y_1(x)+2c'(x)y_1'(x)\right]+p(x)\left[c'(x)y_1(x)\right]=0$$

reescribiendo tenemos que

$$y_1c''+\left(2y_1'+p(x)y_1\right)c'=0$$

Para resolver esta ecuación necesitamos definir una nueva variable $u=c'$ entonces la EDO de primer orden a resolver es

$$y_1u'+\left(2y_1'+p(x)y_1\right)u=0$$

ya que esta es una ecuación separable su solución está dada por

$$u(x)=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}.$$

Por tanto y_2 será obtenida como sigue $y_2(x)=\left[\int u\,(x)\,dx\right]y_1(x)$.

Ejemplo 4.3

Dada la ecuación

$$y''-\frac{1}{x}y'+\frac{y}{x\,(x+1)}=0$$

- Encuentre una solución de la EDO si se sabe que tiene una solución de la forma de un polinomio de primer grado.
- Encuentre la solución general de la EDO dada.

Solución:

Se sabe que una de las soluciones y_1 tiene la forma de un polinomio de primer grado, entonces $y_1=ax+b$, donde $a,b\in\mathbb{R}$, luego

- $y_1'=a$
- $y_1''=0$

como $y_1''-\frac{y_1'}{x}+\frac{y_1}{x(x+1)}=0$ obtenemos

$$-\frac{a}{x}+\frac{ax+b}{x\,(x+1)}=0\Longrightarrow -a+b=0\Longrightarrow a=b,$$

entonces podemos considerar $y_1=x+1$, luego por el método de reducción de orden la otra solución y_2 tienen la forma $y_2=c\,(x)\,y_1\,(x)$ donde

$$c'\,(x)=\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}\qquad y\qquad p\,(x)=-\frac{1}{x}$$

al reemplazar $y_1(x)$ y $p(x)$ tenemos

$$c'\,(x)=\frac{e^{-\int -\frac{1}{x}dx}}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}\Longrightarrow c\,(x)=\int\frac{x}{(x+1)^2}dx=ln\,|x+1|+\frac{1}{x+1},$$

Así, $y_2\,(x)=\left(ln\,|x+1|+\frac{1}{x+1}\right)(x+1)=(x+1)\,ln\,|x+1|+1.$
Por lo tanto, la solución general de la EDO está dada por

$$y\,(x)=c_1\,(x+1)+c_2\,((x+1)\,ln\,|x+1|+1)$$

donde c_1,c_2 son constantes arbitrarias.

4.2.2. EDOs lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

En este caso consideramos la ecuación

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{4.12}$$

donde $p, q \in \mathbb{R}$. Asumiremos que la ecuación tiene una solución de la forma $y = e^{\lambda x}$ para un $\lambda \in \mathbb{C}$ desconocido. Sustituyendo esta función en la EDO (4.12) tenemos que

$$e^{\lambda x}\left\{\lambda^2 + p\lambda + q\right\} = 0, \tag{4.13}$$

y como $e^{\lambda x} \neq 0$, obtenemos que $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ el cual es llamado ecuación característica de la ecuación (4.12). El polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q \tag{4.14}$$

es llamado polinomio característico de la ecuación (4.12). En esta situación existen tres posibilidades para las soluciones de la EDO (4.12) según sean las raíces de su polinomio característico. Se presentan tres casos

1. Raíces reales distintas.
2. Raíces complejas.
3. Raíces reales repetidas.

Caso 1: Raíces reales distintas

Si λ_1, λ_2 son dos raíces reales distintas de la ecuación característica, la ecuación diferencial tiene dos soluciones de la forma $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$ que son linealmente independientes, es decir $\{y_1(x), y_2(x)\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la EDO(4.12), luego la solución general de la EDO (4.12) es definido por

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Ejemplo 4.4

Resolver la EDO $y'' + 3y' + 2y = 0$.
Solución:

La ecuación característica asociada a esta EDO es $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ y tiene como solución dos raíces reales diferentes que son $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$,consecuentemente $y_1 = e^{-x}$ e $y_2 = e^{-2x}$ son dos soluciones linealmente independientes de la EDO, luego

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

es la solución general donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

Caso 2: Raíces complejas

Si $\lambda_1 = \sigma + i\omega, \lambda_2 = \sigma - i\omega$ (donde $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$) son raíces complejas de la ecuación característica, entonces la ecuación diferencial tiene dos soluciones $y_1 = e^{\sigma x + i\omega x}$, $y_2 = e^{\sigma x - i\omega x}$ que son soluciones complejas y linealmente independientes (l.i), además

$$e^{\sigma x} cos(\omega x) = \tfrac{y_1 + y_2}{2} \qquad e^{\sigma x} sen(\omega x) = \tfrac{-i(y_1 - y_2)}{2}$$

son también soluciones de la EDO(4.12),notemos que este ultimo par de soluciones son reales y linealmente independiente consecuentemente el conjunto $\{e^{\sigma x} cos(\omega x), e^{\sigma x} sen(\omega x)\}$ es un sistema fundamental de soluciones, luego la solución general de la EDO (4.12) es

$$y_h = c_1 e^{\sigma x} cos(\omega x) + c_2 e^{\sigma x} sen(\omega x)$$

Ejemplo 4.5

Resolver la EDO $y'' + 5y = 0$.
Solución:

La ecuación característica asociada a esta EDO es $\lambda^2 + 5 = 0$ cuyas raíces complejas son $\lambda = \pm\sqrt{5}i$, consecuentemente $y_1 = e^{0x} cos\left(\sqrt{5}x\right)$ e $y_2 = e^{0x} sen\left(\sqrt{5}x\right)$ son dos soluciones linealmente independientes de la EDO, luego

$$y(x) = c_1 cos\left(\sqrt{5}x\right) + c_2 sen\left(\sqrt{5}x\right)$$

es la solución general de la EDO dada, donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

Caso 3: Raíces reales repetidas

Si $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ son raíces reales repetidas de la ecuación característica, la ecuación (4.12) tiene dos soluciones $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ que son linealmente independientes, por lo tanto el conjunto $\{e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la EDO, luego la solución general de la EDO (4.12) es definida por

$$y_h = e^{\lambda_1 x}\left(c_1 + c_2 x\right)$$

Ejemplo 4.6

Resolver la EDO $y'' + 2y' + y = 0$.
Solución:
La ecuación característica asociada es

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$$

que tiene por solución a $\lambda = -1$ (se repite dos veces), consecuentemente $y_1 = e^{-x}$ e $y_2 = xe^{-x}$ son dos soluciones linealmente independientes de la EDO, luego la solución general es

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 xe^{-x}$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

4.2.3. Ecuaciones Lineales de segundo orden No Homogéneas

Una EDO lineal no homogénea de segundo orden es una ecuación de la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{4.15}$$

donde $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones reales que dependen de la variable x.

Teorema 4.3

Cualquier solución de la EDO (4.15) tienen la forma

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p, \tag{4.16}$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, y_1 e y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

e y_p es una solución particular de la EDO (4.15). La solución (4.16) es llamada solución general de la ecuación (4.15).

Definición

Si definimos el operador $D = \frac{d}{dx}$, entonces $D[y] = y'$, también $D^2[y] = y''$, entonces la EDO

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

puede escribirse como $\left(D^2 + p(x)D + q(x)\right)[y] = r(x)$. Si definimos la regla de correspondencia L tal que

$$L[y] = \left(D^2 + p(x)D + q(x)\right)[y],$$

entonces podemos reescribir la EDO (4.15) como

$$L[y] = r(x)$$

Así, $L = D^2 + p(x)D + q(x)$ es denominada aplicación o transformación.

Definición Aplicación Lineal

Dada la aplicación L y dos funciones y_1 e y_2 que dependen de la variable x, diremos que es una aplicación lineal si se cumple

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2]$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

De acuerdo a la definición anterior es fácil verificar que

$$L := D^2 + p(x)D + q(x) \tag{4.17}$$

es una aplicación o transformación lineal.

Definición Principio de Superposición

Dadas dos funciones $r_1 = r_1(x)$, $r_2 = r_2(x)$, consideremos el operador L definido por

$$L[y] = r_1(x) + r_2(x). \tag{4.18}$$

Si y_{p_1} es una solución de la EDO $L[y] = r_1(x)$ e y_{p_2} es una solución de la EDO $L[y] = r_2(x)$, entonces

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

es solución de la EDO (4.18).

A continuación presentamos dos métodos para encontrar una solución particular y_p de la EDO no homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{4.19}$$

4.2.4. Método de variación de parámetros

Este método sugiere que la solución particular y_p de la EDO no homogénea debe tener la siguiente forma

$$y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2, \tag{4.20}$$

donde y_1 e y_2 son soluciones linealmente independientes de la EDO homogénea y $c_1(x)$, $c_2(x)$ son funciones a determinar. Notemos que

$$y_p' = c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2' + c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 \tag{4.21}$$

Asumiendo que $c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0$ y derivando una vez más, obtenemos

$$y_p'' = c_1(x)y_1'' + c_2(x)y_2'' + c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' \tag{4.22}$$

luego dado que y_p es solución particular de la EDO no homogénea, tenemos que

$$y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = r(x) \tag{4.23}$$

$$\left[c_1(x)y_1'' + c_2(x)y_2'' + c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2'\right] + p(x)\left[c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2' + c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2\right] +$$

$$+q(x)\left[c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2\right] = r(x)$$

después de hacer algunos cálculos obtenemos que

$$y_1'c_1'(x) + y_2'c_2'(x) = r(x).$$

de esta manera para encontrar c_1', c_2' necesitaremos resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 &= 0 \\ y_1'c_1'(x) + y_2'c_2'(x) &= r(x) \end{aligned} \tag{4.24}$$

la solución de este sistema cumple que

$$c_1'(x) = -\frac{r(x)y_2(x)}{W(y_1,y_2)(x)} \quad y \quad c_2'(x) = \frac{r(x)y_1(x)}{W(y_1,y_2)(x)}$$

Luego,

$$c_1(x) = -\int \tfrac{r(x)y_2(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx \quad \text{y} \quad c_2(x) = \int \tfrac{r(x)y_1(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx$$

Por lo tanto,

$$y_p = -y_1\left(\int \frac{r(x)y_2(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx\right) + y_2\left(\int \frac{r(x)y_1(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx\right)$$

Ejemplo 4.7

Encuentre una solución general de la siguiente EDO

$$y'' + 4y' + 4y = e^x$$

Solución:
Primero encontraremos dos soluciones y_1 , y_2 linealmente independientes de la ecuación homogénea, para esto resolveremos la ecuación característica correspondiente

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Longrightarrow (\lambda+2)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -2(\text{raices repetidas})$$

luego $y_1 = e^{-2x}$ e $y_2 = xe^{-2x}$ son soluciones linealmente independientes. Por otra parte notemos que en este problema $r(x) = e^x$ y

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x} - 2xe^{-4x} + 2e^{-4x} = e^{-4x}$$

consecuentemente aplicando el método de variación de parámetros calculamos

$$c_1(x) = -\int \tfrac{e^x xe^{-2x}}{e^{-4x}}dx = -\int xe^{3x}dx = -\left(\tfrac{xe^{3x}}{3} - \int \tfrac{e^{3x}}{3}dx\right) = -\tfrac{xe^{3x}}{3} + \tfrac{e^{3x}}{9}$$

y

$$c_2(x) = \int \tfrac{e^x e^{-2x}}{e^{-4x}}dx = \int e^{3x}dx = \tfrac{e^{3x}}{3}$$

Así se obtiene la solución particular

$$y_p(x) = e^{-2x}\left(-\tfrac{xe^{3x}}{3} + \tfrac{e^{3x}}{9}\right) + xe^{-2x}\left(\tfrac{e^{3x}}{3}\right) = \tfrac{e^x}{9}$$

Por lo tanto, la solución general de la EDO es

$$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + \tfrac{e^x}{9}$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

Ejemplo 4.8

Encuentre una solución general de la siguiente EDO

$$y'' + y = tanx$$

Solución:

En este problema $p(x) = 0$, $q(x) = 1$ y $r(x) = tan(x)$ y la EDO homogénea asociada es

$$y'' + y = 0,$$

entonces la ecuación característica asociada es

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-1} = \pm i,$$

luego $y_1 = cos(x)$ e $y_2 = sen(x)$, son dos soluciones linealmente independientes de la EDO homogénea , consecuentemente para encontrar una solución particular y_p usando el método de variación de parámetros, debemos encontrar las funciones $c_1(x)$ y $c_2(x)$ tales que

$$c_1(x) = -\int \frac{r(x)y_2(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx \quad \text{y} \quad c_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx$$

ya que

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & cos(x) \end{vmatrix} = cos^2(x) + sen^2(x) = 1$$

se tiene que

$$c_1(x) = -\int \frac{sen^2(x)}{cos(x)}dx = -\int \frac{1 - cos^2(x)}{cos(x)}dx = -\int (sec(x) - cos(x))dx$$

$$c_1(x) = -ln|sec(x) + tan(x)| + sen(x)$$

Además,

$$c_2(x) = \int sen(x)\,dx = -cos(x)$$

luego

$$y_p = (-ln|sec(x) + tan(x)| + sen(x)) \cdot cos(x) + cos(x)\,sen(x)$$

Por lo tanto, la solución general esta dada por

$$y = k_1\underbrace{cos(x)}_{y_1} + k_2\underbrace{sen(x)}_{y_2} + \underbrace{-ln|sec(x) + tan(x)|cos(x) + 2cos(x)\,sen(x)}_{y_p}$$

donde k_1, k_2 son constantes arbitrarias.

4.2.5. Método de coeficientes indeterminados.

Este método solo podrá aplicarse en el caso de tener una ecuación ordinaria lineal se segundo orden de la forma

$$y'' + ay' + by = r(x), \tag{4.25}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y la función $r(x)$ es de las siguientes formas

- Exponencial: $r(x) = e^{\alpha x}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$
- Polinomial: $r(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n$, donde $p_i \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
- Trigonométricos: $r(x) = cos(\omega x)$ o $r(x) = sen(\omega x)$ con $\omega \in \mathbb{R}$.

- Combinaciones: $r(x) = e^{\alpha x} cos(\omega x)$ o $r(x) = e^{\alpha x} sen(\omega x)$ o $r(x) = e^{\alpha x}\left(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n\right)$ o $r(x) = \left(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n\right) cos(\omega x)$ o $r(x) = \left(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n\right) sen(\omega x)$ con $\omega, p_i, \alpha \in \mathbb{R}$.

Función exponencial $r(x) = e^{\alpha x}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$

- Si $\lambda = \alpha$ no es una solución de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada entonces la solución particular de la EDO tendrá la forma
$$y_p = Ae^{\alpha x}.$$
- Si $\lambda = \alpha$ es una solución simple de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada entonces
$$y_p = Axe^{\alpha x},$$
- Si $\lambda = \alpha$ es una solución repetida de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada entonces
$$y_p = Ax^2 e^{\alpha x},$$

para un $A \in \mathbb{R}$ arbitrario que posteriormente será calculado sustituyendo y_p en la ecuación (4.25).

Ejemplo 4.9

Resolver $y'' + 3y' + 2y = 2e^{3x}$.

Solución:
Observemos que la ecuación característica correspondiente a la EDO homogénea asociada es
$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \quad o \quad \lambda = -2.$$
Así $y_1 = e^{-x}$ e $y_2 = e^{-2x}$ son soluciones linealmente independientes de la EDO homogénea asociada y la solución particular tendrá la forma $y_p = Ae^{3x}$ entonces

- $y_p' = 3Ae^{3x}$
- $y_p'' = 9Ae^{3x}$

ya que se debe cumplir
$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 2e^{3x}$$
obtenemos$\left(9Ae^{3x}\right) + 3\left(3Ae^{3x}\right) + 2\left(Ae^{3x}\right) = 2e^{3x}$, entonces
$$20Ae^{3x} = 2e^{3x}$$
$\Longrightarrow 20A = 2 \Longrightarrow A = \frac{1}{10}$, luego la solución particular es $y_p(x) = \frac{e^{3x}}{10}$. Finalmente la solución general estará dada por
$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{e^{3x}}{10}$$
donde c_1, c_2 son constante arbitrarias.

Función polinomial
$r(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n; n \geq 0$

- Si $\lambda = 0$ no es una raíz de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces la solución particular de la EDO tendrá la forma
$$y_p = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_n x^n.$$

- Si $\lambda = 0$ es una raíz simple de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces la solución particular de la EDO tendrá la forma

$$y_p = x\left(q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_n x^n\right).$$

- Si $\lambda = 0$ es una raiz repetida de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces la solución particular de la EDO tendrá la forma

$$y_p = x^2\left(q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_n x^n\right).$$

donde $q_i \in \mathbb{R}$ son valores indeterminados que posteriormente serán calculados sustituyendo y_p en la ecuación (4.25).

Ejemplo 4.10

Resolver $y'' + 3y' = 4e^x + 1 - 2x + e^{-3x}$

Solución:
Observemos que la ecuación característica correspondiente a la EDO homogénea asociada es

$$\lambda^2 + 3\lambda = 0$$

entonces $\lambda = 0 \quad o \quad \lambda = -3$, luego dos soluciones linealmente independientes de la EDO homogénea asociada serán $y_1 = e^{0x} = 1$ e $y_2 = e^{-3x}$, seguidamente subdividimos el problema en tres EDOs no homogéneas

- Subproblema 1: $y'' + 3y' = 4e^x = r_1(x)$
- Subproblema 2: $y'' + 3y' = 1 - 2x = r_2(x)$
- Subproblema 3: $y'' + 3y' = e^{-3x} = r_3(x)$

Por tanto, la solución particular y_p de la EDO dada tiene la forma

$$y_p = \underbrace{Ae^x}_{y_{p_1}} + \underbrace{x(B + Cx)}_{y_{p_2}} + \underbrace{Dxe^{-3x}}_{y_{p_3}}$$

donde $y_{p_1}, y_{p_2}, y_{p_3}$ representan las soluciones particulares de los subproblemas 1,2 y 3 respectivamente, seguidamente derivamos y_p

- $y'_p = Ae^x + B + 2Cx + De^{-3x} - 3Dxe^{-3x}$
- $y''_p = Ae^x + 2C - 3De^{-3x} - 3De^{-3x} + 9Dxe^{-3x}$

dado que debe verificarse que

$$y''_p + 3y'_p = 4e^x + 1 - 2x + e^{-3x}$$

obtenemos

$$\left(Ae^x + 2C - 3De^{-3x} - 3De^{-3x} + 9Dxe^{-3x}\right) + 3\left(Ae^x + B + 2Cx + De^{-3x} - 3Dxe^{-3x}\right) = 4e^x + 1 - 2x + e^{-3x}$$

entonces

$$2C + 3B + 6Cx + 4Ae^x - 3De^{-3x} = 4e^x + 1 - 2x + e^{-3x}$$

consecuentemente $2C + 3B = 1$; $6C = -2$; $4A = 4$ y $-3D = 1 \implies A = 1$; $D = -\frac{1}{3}$; $C = -\frac{1}{3}$ y $B = \frac{5}{9}$, luego la solución particular será $y_p(x) = e^x + \frac{5x}{9} - \frac{x^2}{3} - \frac{xe^{-3x}}{3}$. Finalmente, la solución general es

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-3x} + e^x + \frac{5x}{9} - \frac{x^2}{3} - \frac{xe^{-3x}}{3}$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

Función trigonométrica
$r(x) = cos(\omega x)$ **o** $r(x) = sen(\omega x)$

- Si $\lambda = \pm i\omega$ no es una raíz de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces la solución particular de la EDO tendrá la forma

$$y_p = Acos(\omega x) + Bsen(\omega x).$$

- Si $\lambda = \pm i\omega$ es una raíz de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces la solución particular de la EDO tendrá la forma

$$y_p = x(Acos(\omega x) + Bsen(\omega x)).$$

donde $A, B \in \mathbb{R}$ son valores indeterminados que posteriormente serán calculados sustituyendo y_p en la ecuación (4.25).

Ejemplo 4.11

Resolver $y'' + 2y' + y = 2senx - 3e^{-x} + 1$.

Solución:

Observemos que la ecuación característica correspondiente a la EDO homogénea asociada es

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

entonces $\lambda = -1$ (doble) . Luego

$$y_1 = e^{-x} \quad , \quad y_2 = xe^{-x},$$

son soluciones linealmente independientes, para encontrar la solución particular subdividimos el problema en tres EDOs no homogéneas

- Subproblema 1: $y'' + 2y' + y = 2senx = r_1(x)$
- Subproblema 2: $y'' + 2y' + y = -3e^{-x} = r_2(x)$
- Subproblema 3: $y'' + 2y' + y = 1 = r_3(x)$

Por tanto la solución particular de la EDO dada tiene la forma

$$y_p = \underbrace{Asenx + Bcosx}_{y_{p_1}} + \underbrace{Cx^2e^{-x}}_{y_{p_2}} + \underbrace{D}_{y_{p_3}}$$

donde $y_{p_1}, y_{p_2}, y_{p_3}$ representan las soluciones particulares de los subproblemas 1, 2 y 3 respectivamente, seguidamente derivamos y_p

- $y'_p = Acosx - Bsenx + 2Cxe^{-x} - Cx^2e^{-x}$
- $y''_p = -Asenx - Bcosx + 2Ce^{-x} - 2Cxe^{-x} - 2Cxe^{-x} + Cx^2e^{-x}$

dado que debe verificarse que

$$y''_p + 2y'_p + y_p = 2senx - 3e^{-x} + 1$$

obtenemos

$$\left(-Asenx - Bcosx + 2Ce^{-x} - 2Cxe^{-x} - 2Cxe^{-x} + Cx^2e^{-x}\right) + 2\left(Acosx - Bsenx + \right.$$

$$\left. 2Cxe^{-x} - Cx^2e^{-x}\right) + Asenx + Bcosx + Cx^2e^{-x} + D = 2senx - 3e^{-x} + 1$$

entonces

$$(-2B)\,senx + 2Acosx + 2Ce^{-x} + D = 2senx - 3e^{-x} + 1$$

luego $-2B = 2$, $2A = 0$, $2C = -3$ y $D = 1 \Longrightarrow B = -1; A = 0; C = \frac{-3}{2}$ y $D = 1$
por tanto la solución particular será

$$y_p(x) = -cos(x) - \frac{3x^2e^{-x}}{2} + 1$$

consecuentemente la solución general de la EDO es

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} - cos(x) - \frac{3x^2e^{-x}}{2} + 1$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

En los casos anteriores se vio como encontrar la solución particular de la EDO no homogénea cuando $r(x)$ tenga la forma de una función exponencial, polinómica , trigonométrica seno, coseno o la combinación lineal de ellos (sumas, restas). Ahora veremos que este método también puede aplicarse cuando $r(x)$ es obtenido como multiplicación de estas funciones, es decir

- Si $r(x) = e^{\alpha x}cos(\omega x)$ o $r(x) = e^{\alpha x}sen(\omega x)$ y $\lambda = \alpha \pm \omega i$ no son raíces de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces
$$y_p = Ae^{\alpha x}cos(\omega x) + Be^{\alpha x}sen(\omega x).$$
- Si $r(x) = e^{\alpha x}cos(\omega x)$ o $r(x) = e^{\alpha x}sen(\omega x)$ y $\lambda = \alpha \pm \omega i$ son raíces de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces
$$y_p = x\left(Ae^{\alpha x}cos(\omega x) + Be^{\alpha x}sen(\omega x)\right).$$
- Si $r(x) = e^{\alpha x}\left(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n\right)$ y si $\lambda = \alpha$ no es raíz de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces
$$y_p = e^{\alpha x}\left(q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_nx^n\right).$$
- Si $r(x) = e^{\alpha x}\left(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n\right)$ y si $\lambda = \alpha$ es raíz simple de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces
$$y_p = xe^{\alpha x}\left(q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_nx^n\right).$$

.

- Si $r(x) = e^{\alpha x}\left(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n\right)$ y si $\lambda = \alpha$ es raíz repetida de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces
$$y_p = x^2e^{\alpha x}\left(q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_nx^n\right).$$
- Si $r(x) = \left(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n\right)cos(\omega x)$ o
$r(x) = \left(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n\right)sen(\omega x)$ y $\lambda = \pm\omega i$ no son raíces de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces
$$y_p = \left(q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_nx^n\right)cos(\omega x) + \left(r_0 + r_1x + r_2x^2 + \cdots + r_nx^n\right)sen(\omega x).$$
- Si $r(x) = \left(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n\right)cos(\omega x)$ o
$r(x) = \left(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n\right)sen(\omega x)$ y $\lambda = \pm\omega i$ son raíces de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces
$$y_p = x\left(q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_nx^n\right)cos(\omega x) + x\left(r_0 + r_1x + r_2x^2 + \cdots + r_nx^n\right)sen(\omega x).$$

donde $A, B, q_i, r_i \in \mathbb{R}$ son valores indeterminados que posteriormente serán calculados sustituyendo y_p en la ecuación (4.25).

Ejemplo 4.12

Resolver $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} sen(x)$

Solución:

En este caso la ecuación característica de la EDO hpmogénea asociada es

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow (\lambda + 1)^2 + 1 = 0$$

resolviendo obtenemos $\lambda = -1 \pm i$, entonces

$$y_1 = e^{-x} cos(x); \qquad y_2 = e^{-x} sen(x)$$

son soluciones l.i. de la EDO homogénea asociada, luego al aplicar el método de coeficientes indeterminados ya que la parte no homógenea se obtiene multiplicando una función exponencial y otra trigonométrica, la solución particular y_p tendra la forma

$$y_p = x\left(Ae^{-x} sen(x) + Be^{-x} cos(x)\right) = Axe^{-x} sen(x) + Bxe^{-x} cos(x)$$

derivando y agrupando convenientemente obtenemos

$$y_p' = e^{-x}(A - (A + B)x) sen(x) + e^{-x}(B + (A - B)x) cos(x)$$

$$y_p'' = e^{-x}[-2(A + B) sen(x) + 2(A - B) cos(x) + 2Bxsen(x) - 2Axcos(x)]$$

además, como

$$y_p'' + 2y_p' + 2y_p = e^{-x} sen(x)$$

se tiene

$$e^{-x}[-2Bsen(x) + 2Acos(x)] = e^{-x} sen(x)$$

consecuentemente $-2B = 1$ y $2A = 0 \Longrightarrow B = -\frac{1}{2}$ y $A = 0$. Por lo tanto la solución particular será

$$y_p = -\frac{xe^{-x} cos(x)}{2}.$$

Finalmente la solución general de la EDO es

$$y(x) = c_1 e^{-x} cos(x) + c_2 e^{-x} sen(x) - \frac{xe^{-x} cos(x)}{2}$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

Ejemplo 4.13

Resolver $y'' + y = (x + 1) sen(x)$.

Solución:

En este caso observamos que la ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm i$$

por otro lado, observamos que el termino independiente de la EDO se obtiene como multiplicación de un polinomio de primer grado y la función seno, entonces al aplicar el método de coeficientes indeterminados tenemos que la solución particular y_p tendra la siguiente forma

$$y_p = x(Ax + B) sen(x) + x(Dx + E) cos(x)$$

luego, al derivar y agrupar en términos semejantes, se tiene

$$\begin{aligned} y_p' &= (2Ax + B) senx + \left(Ax^2 + Bx\right) cosx + (2Dx + E) cosx - \left(Dx^2 + Ex\right) senx \\ &= \left((2A - E)x - Dx^2 + B\right) senx + \left(Ax^2 + (B + 2D)x + E\right) cosx \end{aligned}$$

derivando por segunda vez,

$y_p'' = (2A - E - 2Dx) senx + \left((2A - E)x - Dx^2 + B\right) cosx + (2Ax + B + 2D) cosx - \left(Ax^2 + (B + 2D)x + E\right) senx$

$= \left(-Ax^2 - (4D + B)x - 2E\right) senx + \left(-Dx^2 + (4A - E)x + 2B + 2D\right) cosx$

además, como

$$y_p'' + y_p = (x+1)\,senx$$

obtenemos

$$(-4Dx - 2E)\,senx + (4Ax + 2B + 2D)\,cosx = (x+1)\,senx$$

de donde resulta que

$$-4D = 1; \quad -2E = 1\,; \quad 4A = 0; \quad 2B + 2D = 0$$

Así tenemos $D = -\frac{1}{4}$; $E = -\frac{1}{2}$; $A = 0$; $B = \frac{1}{4}$ consecuentemente la solución particular será

$$y_p = \frac{xsenx}{4} - \frac{x^2cosx}{4} - \frac{xcosx}{2}$$

luego la solución general de la EDO es

$$y(x) = c_1cosx + c_2senx + \frac{xsenx}{4} - \frac{x^2cosx}{4} - \frac{xcosx}{2}$$

donde c_1 y c_2 son constante arbitrarias.

Ejemplo 4.14

Resolver $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x} + 2e^{-x}senx$.

Solución

En este caso la ecuación característica a la EDO homogénea asociada es:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

que tiene por solución $\lambda = -1, -2$. Luego dos soluciones l.i. de la EDO homogénea son $y_1 = e^{-x}$ e $y_2 = e^{-2x}$. Para resolver la EDO no homogénea, separamos en dos EDOs no homogéneas de la forma

$$y'' + 3y' + 2y = xe^{-x} = r_1(x) \qquad y \qquad y'' + 3y' + 2y = 2e^{-x}sen(x) = r_2(x),$$

Aplicando el método de coeficientes indeterminados, las soluciones particulares de cada una de estas EDOs tienen la forma

$$y_{p_1}(x) = x(Ax + B)\,e^{-x}$$

$$y_{p_2}(x) = De^{-x}cos(x) + Ee^{-x}sen(x)$$

consecuentemente la solución particular y_p de la EDO es

$$y_p = x(Ax + B)\,e^{-x} + De^{-x}cos(x) + Ee^{-x}sen(x)$$

Al derivar por primera o segunda vez cada solución particular, se tiene

$y'_{p_1} = e^{-x}\left[-Ax^2 + (2A - B)\,x + B\right]$
$y''_{p_1} = e^{-x}\left[Ax^2 + (B - 4A)\,x + 2A - 2B\right]$
$y'_{p_2} = e^{-x}\left[(E - D)\,cos(x) - (D + E)\,sen(x)\right]$
$y''_{p_2} = e^{-x}\left[2Dsen(x) - 2Ecos(x)\right]$

además, como

$$y''_{p_1} + 3y'_{p_1} + 2y_{p_1} = xe^{-x}$$

obtenemos

$$e^{-x}\left[Ax^2 + (B - 4A)\,x + 2A - 2B\right] + 3e^{-x}\left[-Ax^2 + (2A - B)\,x + B\right] + 2x(Ax + B)\,e^{-x} = xe^{-x}$$

luego
$$e^{-x}[2Ax+2A+B]=xe^{-x}$$
consecuentemente $2A=1$; $2A+B=0 \Longrightarrow A=\frac{1}{2}$ y $B=-1$.

Por lo tanto, $y_{p_1}(x)=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)e^{-x}$. Por otro lado dado que
$$y''_{p_2}+3y'_{p_2}+2y_{p_2}=2e^{-x}sen(x)$$
obtenemos
$$\begin{aligned}&e^{-x}[2Dsen(x)-2Ecos(x)]+3e^{-x}[(E-D)cos(x)-(D+E)sen(x)]+\\&+2\left[De^{-x}cos(x)+Ee^{-x}sen(x)\right]=2e^{-x}sen(x)\end{aligned}$$
de donde resulta que
$$e^{-x}[(E-D)cos(x)-(D+E)sen(x)]=2e^{-x}sen(x)$$
$\Longrightarrow E-D=0$ y $-D-E=2 \Longrightarrow D=E=-1$. Por tanto,
$$y_{p_2}(x)=e^{-x}[-cos(x)-sen(x)],$$
luego la solución particular de la EDO no homogénea es
$$y_p=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)e^{-x}+e^{-x}[-cos(x)-sen(x)].$$
Finalmente la solución general es
$$y_p(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+e^{-x}\left(\frac{x^2}{2}-x-cos(x)-sen(x)\right)$$
donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Teorema 4.4

Considere el problema de valor inicial
$$\begin{cases}y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)\\ y(x_0)=y_0,\, y'(x_0)=y_1\end{cases}\tag{4.26}$$
donde $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones continuas en un intervalo abierto I, $y_0, y_1\in\mathbb{R}$. Si y_p es una solución de la ecuación no homogénea
$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x),\tag{4.27}$$
entonces existirán constantes únicas c_1 y c_2 tal que la solución del PVI (4.26) es
$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_p(x),$$
donde y_1, y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea
$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

Ejemplo 4.15

Considere el PVI
$$\begin{cases}xy''-y'=0, & x>0\\ y(1)=1,\, y'(1)=-1\end{cases}$$
Solución:

En este caso tenemos que la solución general de la EDO es $y(x) = K\frac{x^2}{2} + C$, donde K y C son constantes arbitrarias. Además aplicando las condiciones iniciales se tiene

$$1 = y(1) = \frac{K}{2} + C$$

ya que $y'(x) = kx$ tenemos que $-1 = y'(1) = K \Rightarrow C = \frac{3}{2}$. Por lo tanto, la solución del PVI es

$$y(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}.$$

4.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior

Una EDO lineal de orden superior es una ecuación de la forma

$$a_0(x)\frac{d^{(n)}y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x) \tag{4.28}$$

donde $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$, F son funciones continuas en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$, con $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Definición Problemas con valores iniciales (PVIs)

Un PVI es un problema formado por una ecuación diferencial de orden n junto con los valores fijos que debe tomar la solución y sus derivadas hasta el orden $n-1$ en un mismo punto $x = x_0$.

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_1, \;\; y''(x_0) = y_2, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

Definición Problema de valores en la frontera

Es el problema formado por la ecuación diferencial junto con los valores fijados que debe tomar la solución de la EDO para diferentes valores de $x(x = x_0, x = x_1, \ldots, x = x_{n-1})$, es decir

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2, \cdots, y(x_{n-1}) = y_{n-1}.$$

Teorema 4.5 Teorema (Existencia de una solución única)

Sean $a_n(x), a_{n-1}(x), \cdots, a_1(x), a_0(x)$ y $F(x)$ funciones continuas en el intervalo abierto I y sea $a_0(x) \neq 0$ para toda x en este intervalo. Si $x = x_0$ es cualquier punto en este intervalo, entonces para cualesquiera valores de $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ existe una solución única $y(x)$ de la EDO (4.28) en el intervalo I tal que

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

4.3.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior con coeficientes constantes

Una EDO lineal de orden superior con coeficientes constantes es una ecuación de la forma

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = r(x) \tag{4.29}$$

donde $a_1, \cdots, a_n$ son constantes y r es una función que depende de la variable independiente x.

Ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas lineales de coeficientes constantes

Si en la ecuación anterior $r(x) = 0$ para toda x, entonces la ecuación se denomina homogénea, es decir

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \tag{4.30}$$

donde $a_1, \cdots, a_n$ son constantes. El polinomio característico $p(\lambda)$ correspondiente a la ecuación (4.30) es

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n. \tag{4.31}$$

luego la ecuación característica asociada a la EDO homogénea es

$$p(\lambda) = 0$$

es decir

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

Proposición 4.1

- Si λ es una raíz simple real de la ecuación característica $p(\lambda) = 0$ entonces $y = e^{\lambda x}$ es una solución de la EDO (4.30).
- Si λ es una raíz repetida real de multiplicidad r, entonces todas las funciones

  $$y = x^{k-1}e^{\lambda x},$$

  para $k = 1, 2, \cdots, r$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación (4.30).
- Si $\lambda = \sigma + i\omega$ es una raíz simple compleja de la ecuación característica $p(\lambda) = 0$ entonces

  $$y = e^{\sigma x}cos(\omega x) \text{ e } y = e^{\sigma x}sen(\omega x)$$

  son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación(4.30)
- Si $\lambda = \sigma + i\omega$ es una raíz compleja con multiplicidad r, entonces todas la funciones

  $$y = x^{k-1}e^{\sigma x}cos(\omega x) \text{ e } y = x^{k-1}e^{\sigma x}sen(\omega x),$$

  para $k = 1, 2, \cdots, r$ son soluciones linealmente independientes de la EDO (4.30).

Definición Sistema fundamental de soluciones

Un conjunto de n funciones $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ es llamado sistema fundamental de soluciones de la EDO (4.30) en $]a, b[$ si son soluciones linealmente independientes en el intervalo $]a, b[$.

Definición

Dado un sistema fundamental de soluciones de la EDO(4.30) $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ su **solución general** de (4.30) esta dada por la combinación lineal de dichas soluciones, es decir tiene la forma

$$y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

donde $c_1, c_2, \cdots, c_n$ son constantes arbitrarias

Ejemplo 4.16

Resolver $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.
Solución:
La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

al factorizar

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

de donde se obtienen las soluciones, $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3$, entonces $y_1 = e^x$; $y_2 = e^{2x}$; $y_3 = e^{3x}$ son soluciones l.i. de la EDO, consecuentemente la solución general de la EDO será

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes arbitrarias.

Ejemplo 4.17

Resolver $y^{(4)} - y' = 0$.

Solución:

La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^4 - \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda\left(\lambda^3 - 1\right) = 0 \Longrightarrow \lambda(\lambda - 1)\left(\lambda^2 + \lambda + 1\right) = 0$$

que tiene por solución a $\lambda = 0, \lambda = 1, \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ luego, las soluciones linealmente independientes de la EDO son

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 \\ y_2(x) &= e^x \\ y_3(x) &= e^{-\frac{x}{2}} cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \\ y_4(x) &= e^{-\frac{x}{2}} sen\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \end{aligned}$$

consecuentemente la solución general de la EDO es

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-\frac{x}{2}} cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_4 e^{-\frac{x}{2}} sen\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$$

donde c_1, c_2, c_3 y c_4 son constantes arbitrarias.

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no Homogéneas de orden superior con coeficientes constantes

Una EDO lineal de orden superior con coeficientes constantes no homogénea es una ecuación de la forma

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = r(x) \tag{4.32}$$

donde $a_1, \cdots, a_n$ son constantes.

Teorema 4.6

Cualquier solución de la EDO (4.32) tiene la forma

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + C_n y_n + y_p, \tag{4.33}$$

donde $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2, \cdots y_n$ son soluciones linealmente independientes de su ecuación homogénea asociada e y_p es solución particular de la EDO (4.32).

La solución (4.33) será llamada solución general de la ecuación (4.32).

A continuación presentamos dos métodos para encontrar una solución particular y_p de la EDO no homogénea.

4.3.2. Método de Variación de parámetros

Asumamos que $y_1, y_2, \cdots, y_n$ son n soluciones linealmente independientes de la ecuación (4.30). Definamos

$$y_p = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 + c_3(x) y_3 + \cdots + c_n(x) y_n,$$

donde $c_i(x)$ son funciones por determinar, además para simplificar cuentas supondremos que

$$\begin{aligned}
y_1c_1' + y_2c_2' + y_3c_3' + \cdots + y_nc_n' &= 0\\
y_1'c_1' + y_2'c_2' + y_3'c_3' + \cdots + y_n'c_n' &= 0\\
y_1''c_1' + y_2''c_2' + y_3''c_3' + \cdots + y_n''c_n' &= 0\\
&\vdots\\
y_1^{(n-2)}c_1' + y_2^{(n-2)}c_2' + y_3^{(n-2)}c_3' + \cdots + y_n^{(n-2)}c_n' &= 0
\end{aligned}$$

Luego sustituyendo $y_p, y_p', y_p'', \cdots, y_p^n$ en la ecuación no homogénea (4.29) tal que

$$y_p^{(n)} + a_1y_p^{(n-1)} + \cdots + a_ny_p = r(x) \tag{4.34}$$

se verificará que

$$y_1^{(n-1)}c_1' + y_2^{(n-1)}c_2' + y_3^{(n-1)}c_3' + \cdots + y_n^{(n-1)}c_n' = r(x).$$

entonces se tiene un sistema de n ecuaciones y n incógnitas, $c_i'(x)$, por resolver. Luego estas incognitas deben cumplir:

$$c_i'(x) = \frac{(-1)^{n-i}W(y_1, y_2, \cdots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots, y_n)r(x)}{W(y_1, y_2, \cdots, y_n)}$$

para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, donde $W(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ es el wronskiano de las funciones $y_1, y_2, \cdots, y_n$. Por lo tanto,

$$c_i(x) = \int \frac{(-1)^{n-i}W(y_1, y_2, \cdots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots, y_n)r(x)}{W(y_1, y_2, \cdots, y_n)}dx$$

para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$

Ejemplo 4.18

Resolver la EDO $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = \frac{2e^{4x}}{1+e^x}$
Solución:
Notemos que la ecuación característica correspondiente a la EDO homogénea asociada es

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0,$$

que tiene por solución $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3$, así obtenemos que $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ e $y_3 = e^{3x}$ son tres soluciones l.i. de la EDO homogénea asociada, buscamos la solución particular y_p aplicando el método de variación de parámetros, es decir proponemos la solución particular como siendo

$$y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + c_3(x)y_3,$$

donde las funciones c_i satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
y_1c_1' + y_2c_2' + y_3c_3' &= 0\\
y_1'c_1' + y_2'c_2' + y_3'c_3' &= 0\\
y_1''c_1' + y_2''c_2' + y_3''c_3' &= r(x)
\end{aligned}$$

luego

$$c_1'(x) = \frac{(-1)^{3-1}W(y_2,y_3)r(x)}{W(y_1,y_2,y_3)},\ c_2'(x) = \frac{(-1)^{3-2}W(y_1,y_3)r(x)}{W(y_1,y_2,y_3)} \text{ y } c_3'(x) = \frac{(-1)^{3-3}W(y_1,y_2)r(x)}{W(y_1,y_2,y_3)}$$

donde el Wronskiano está dado por

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x}\\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x}\\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x}\end{vmatrix} = e^x(18e^{5x} - 12e^{5x}) - e^{2x}(9e^{4x} - 3e^{4x}) +$$

$$+e^{3x}(4e^{3x} - 2e^{3x}) = 6e^{6x} - 6e^{6x} + 2e^{6x} = 2e^{6x}$$

y

$$
\begin{aligned}
W(y_2, y_3) &= \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{5x} - 2e^{5x} = e^{5x} \\
W(y_1, y_3) &= \begin{vmatrix} e^{x} & e^{3x} \\ e^{x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{4x} - e^{4x} = 2e^{4x} \\
W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} \\ e^{x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x}
\end{aligned}
$$

Así tenemos que

$$
\begin{aligned}
c_1(x) &= \int \tfrac{W(y_2,y_3)r(x)}{W(y_1,y_2,y_3)}dx = \int \tfrac{1}{2}e^{-x}r(x)\,dx = \int \tfrac{e^{3x}}{1+e^x}dx = \frac{e^{2x}}{2} - e^x + ln(1+e^x), \\
c_2(x) &= -\int \tfrac{W(y_1,y_3)r(x)}{W(y_1,y_2,y_3)}dx = -\int e^{-2x}r(x)\,dx = -\int \tfrac{2e^{2x}}{1+e^x}dx = 2ln(1+e^x) - 2e^x
\end{aligned}
$$

y

$$
c_3(x) = \int \tfrac{W(y_1,y_2)r(x)}{W(y_1,y_2,y_3)}dx = \int \tfrac{1}{2}e^{-3x}r(x)\,dx = \int \tfrac{e^x}{1+e^x}dx = ln(1+e^x).
$$

luego la solución particular se escribe

$$
\begin{aligned}
y_p &= \left(\tfrac{e^{2x}}{2} - e^x + ln(1+e^x)\right)e^x + (2ln(1+e^x) - 2e^x)\,e^{2x} + ln(1+e^x)\,e^{3x} \\
y_p &= e^x(1+e^x)^2\,ln(1+e^x) - \tfrac{3e^{2x}}{2} - e^x
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la solución de la EDO es $y = k_1y_1(x) + k_2y_2(x) + k_3y_3 + y_p(x)$

4.3.3. Método de coeficientes indeterminados.

Este método solo podrá aplicarse en el caso de tener una ecuación ordinaria lineal de orden n de la forma

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = r(x) \tag{4.35}$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ y si la función $r(x)$ toma las siguientes formas

- Exponencial: $r(x) = e^{\alpha x}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$
- Polinomial: $r(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n$, donde $p_i \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
- Trigonométrica: $r(x) = cos(\omega x)$ o $r(x) = sen(\omega x)$ con $\omega \in \mathbb{R}$.
- Combinaciones: $r(x) = e^{\alpha x}cos(\omega x)$ o $r(x) = e^{\alpha x}sen(\omega x)$ o $r(x) = e^{\alpha x}\left(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n\right)$ o $r(x) = \left(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n\right)cos(\omega x)$ o $r(x) = \left(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n\right)sen(\omega x)$ con $\omega, p_i, \alpha \in \mathbb{R}$.

Función exponencial $r(x) = e^{\alpha x}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$

- Si $\lambda = \alpha$ no es una solución de la ecuación característica asociada, entonces la solución particular de la EDO tiene la forma $y_p = Ae^{\alpha x}$, donde A es una constante a determinar.
- Si $\lambda = \alpha$ es una solución de multiplicidad k de la ecuación característica asociada , entonces la solución particular de la EDO tiene la forma $y_p = Ax^ke^{\alpha x}$,

  donde A es una constante a determinar sustituyendo y_p en la ecuación (4.35).

Función polinomial
$r(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n; n \geq 0$

- Si $\lambda = 0$ no es una raíz de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces la solución particular de la EDO tiene la forma

$$y_p = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_nx^n.$$

- Si $\lambda = 0$ es una raíz de multiplicidad k de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces la solución particular de la EDO tendrá la forma

$$y_p = x^k\left(q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_nx^n\right).$$

donde $q_i \in \mathbb{R}$ son valores indeterminados que posteriormente serán calculados sustituyendo y_p en la ecuación (4.35).

Función trigonométrica
$r(x) = cos(\omega x)$ o $r(x) = sen(\omega x)$

- Si $\lambda = \pm i\omega$ no es una raíz de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces la solución particular de la EDO tendrá la forma

$$y_p = Acos(\omega x) + Bsen(\omega x).$$

- Si $\lambda = \pm i\omega$ es una raíz de multiplicidad k de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces la solución particular de la EDO tiene la forma

$$y_p = x^k\left(Acos(\omega x) + Bsen(\omega x)\right).$$

donde $A, B \in \mathbb{R}$ son valores por determinar que serán calculados sustituyendo y_p en la ecuación (4.35).

En los casos anteriores encontramos la solución particular de la EDO no homogénea en el caso de que $r(x)$ tenga la forma de una función exponencial, polinómica , o función trigonométrica seno, coseno o la combinación lineal de ellos (a través de sumas, restas). Ahora veremos que este método también puede aplicarse cuando $r(x)$ es obtenido como multiplicación de estas funciones, es decir

- Si $r(x) = e^{\alpha x}cos(\omega x)$ o $r(x) = e^{\alpha x}sen(\omega x)$ y $\lambda = \alpha \pm \omega i$ no son raíces de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces

$$y_p = Ae^{\alpha x}cos(\omega x) + Be^{\alpha x}sen(\omega x).$$

- Si $r(x) = e^{\alpha x}cos(\omega x)$ o $r(x) = e^{\alpha x}sen(\omega x)$ y $\lambda = \alpha \pm \omega i$ son raíces de multiplicidad k de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces

$$y_p = x^k\left(Ae^{\alpha x}cos(\omega x) + Be^{\alpha x}sen(\omega x)\right).$$

- Si $r(x) = e^{\alpha x}\left(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n\right)$ y si $\lambda = \alpha$ no es raíz de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces

$$y_p = e^{\alpha x}\left(q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_nx^n\right).$$

- Si $r(x) = e^{\alpha x}\left(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n\right)$ y si $\lambda = \alpha$ es una raíz de multiplicidad k de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces

$$y_p = x^ke^{\alpha x}\left(q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_nx^n\right).$$

- Si $r(x) = \left(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n\right)cos(\omega x)$ o
$r(x) = \left(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n\right)sen(\omega x)$ y $\lambda = \pm\omega i$ no son raíces de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces

$$y_p = \left(q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_nx^n\right)cos(\omega x) + \left(r_0 + r_1x + r_2x^2 + \cdots + r_nx^n\right)sen(\omega x).$$

- Si $r(x) = (p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n)\cos(\omega x)$ o $r(x) = (p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n)\operatorname{sen}(\omega x)$ y $\lambda = \pm\omega i$ son raíces de multiplidad k de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada, entonces

$$y_p = x^k(q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_n x^n)\cos(\omega x) + x^k(r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \cdots + r_n x^n)\operatorname{sen}(\omega x).$$

donde $A, B, q_i, r_i \in \mathbb{R}$ son valores indeterminados que posteriormente serán calculados sustituyendo y_p en la ecuación (4.35).

Ejemplo 4.19

Resuelva $y''' + y'' = e^x\cos(x)$

Solución:

La ecuación característica correspondiente a la EDO homogénea asociada es

$$\lambda^3 + \lambda^2 = 0,$$

y tiene por solución $\lambda = 0$(doble), $\lambda = -1$, entonces $y_1 = 1$, $y_2 = x$ e $y_3 = e^{-x}$ son tres soluciones l.i. de la EDO homogénea asociada, luego

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}.$$

Por otro lado la solución particular tomará la forma

$$y_p = Ae^x\cos(x) + Be^x\operatorname{sen}(x)$$

luego

- $y_p' = e^x[(A+B)\cos(x) + (B-A)\operatorname{sen}(x)]$
- $y_p'' = e^x[2B\cos(x) - 2A\operatorname{sen}(x)]$
- $y_p''' = e^x[(2B-2A)\cos(x) - (2A+2B)\operatorname{sen}(x)]$

Dado que y_p debe satisfacer la EDO dada tenemos que

$$y_p''' + y_p'' = (-2A+4B)e^x\cos(x) + (-4A-2B)e^x\operatorname{sen}(x) = e^x\cos(x)$$

entonces $-2A + 4B = 1, -4A - 2B = 0$, luego $A = -\frac{1}{10}$ y $B = \frac{1}{5}$ consecuentemente

$$y_p = -\frac{1}{10}e^x\cos(x) + \frac{1}{5}e^x\operatorname{sen}(x).$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación es

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} - \frac{1}{10}e^x\cos(x) + \frac{1}{5}e^x\operatorname{sen}(x)$$

Ejemplo 4.20

Resuelva $y^{(4)} + y''' = 1 - x^2e^{-x}$

Solución: La ecuación característica correspondiente a la EDO homogénea asociada es

$$\lambda^4 + \lambda^3 = 0.$$

y tiene por soluciones a $\lambda = 0, \lambda = -1$. Para encontrar la solución particular de la EDO subdividimos el problema como sigue:

$$y^{(4)} + y''' = 1 = r_1(x) \quad \text{e} \quad y^{(4)} + y''' = -x^2e^{-x} = r_2(x)$$

luego las soluciones particulares y_{p_1}, y_{p_2} tendrán la siguiente estructura

$$y_{p_1} = Ax^3 \quad \text{e} \quad y_{p_2} = x(B + Cx + Dx^2)e^{-x}$$

y la solución particualr de la EDO dada tendrá la forma

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

es decir,

$$y_p(x) = Ax^3 + \left(Bx^3 + Cx^2 + Dx\right)e^{-x}$$

$$\begin{aligned} y_p'' &= 3Ax^2 + \left(3Bx^2 + 2Cx + D\right)e^{-x} - \left(Bx^3 + Cx^2 + Dx\right)e^{-x} \\ &= 3Ax^2 + \left(D + (2C - D)x + (3B - C)x^2 - Bx^3\right)e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p'' &= 6Ax + \left[2C - 2D + (6B - 4C + D)x + (C - 6B)x^2 + Bx^3\right]e^{-x} \\ y_p''' &= 6A + \left[6B - 6C + 3D + (6C - 18B - D)x + (9B - C)x^2 - Bx^3\right]e^{-x} \\ y_p^{(4)} &= \left[12C - 24B - 4D + (36B - 8C + D)x + (C - 12B)x^2 + Bx^3\right]e^{-x} \end{aligned}$$

al sumar estas últimas derivadas

$$y_p^{(4)} + y_p''' = 6A + \left[6C - 18B - D + (18B - 2C)x - 3Bx^2\right]e^{-x}$$

Así, tenemos que

$$6A + \left[6C - 18B - D + (18B - 2C)x - 3Bx^2\right]e^{-x} = 1 - x^2e^{-x}$$

de donde $6A = 1$, $6C - 18B - D = 0$, $18B - 2C = 0$ y $-3B = -1$ consecuentemente $A = 1/6$, $B = 1/3$, $C = 3$ y $D = 12$. Luego,

$$y_p = \frac{x^3}{6} + \left(\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 12x\right)e^{-x}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x} + \frac{x^3}{6} + \left(\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 12x\right)e^{-x}.$$

4.4. Ejercicios Resueltos

1. Resuelva la ecuación diferencial $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$ si se sabe que $y_1(x) = x^{-1/2}sen(x)$ es una solución de la EDO.
   Solución:
   Dividiendo esta EDO entre x^2obtenemos

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0$$

identificamos $p(x) = \frac{1}{x}$ y $q(x) = 1 - \frac{1}{4x^2}$

La otra solución $y_2(x)$ de la EDO, es de la forma $y_2(x) = c(x)y_1(x)$ donde

$$c'(x) = \frac{1}{y_1^2(x)} \cdot e^{-\int p(x)dx} \Longrightarrow c'(x) = \frac{1}{x^{-1}sen^2x} \cdot e^{-\int \frac{1}{x}dx} = xcsc^2x \cdot e^{-ln|x|} = csc^2x$$

integrando

$$c(x) = \int csc^2 x dx = -cotx \Longrightarrow y_2(x) = -cotx \cdot x^{-1/2} senx = -x^{-1/2} cosx.$$

Por lo tanto, la solución general de la EDO esta dada por

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 x^{-1/2} senx + c_2 \left(-x^{-1/2} cosx\right)$$

donde $c_{1,} c_2$ son constantes arbitrarias.

2. Dada la EDO $y^{(4)} + 4y'' + 4y = 3cos(2x) + x + e^{-2x}$. Determinar la forma de la solución particular usando el método de coeficientes indeterminados.
   Solución:
   La ecuación característica de la EDO homogénea asociada es

   $$r^4 + 4r^2 + 4 = 0$$

   factorizando se tiene $\left(r^2+2\right)^2 = 0 \Longrightarrow r = \pm\sqrt{2}i$ (doble multiplicidad)
   Notemos que ninguna raiz es -2, 0 o $0 \pm 2i$, luego dividamos la EDO no homogénea en tres problemas
   $P_1 : y^{(4)} + 4y'' + 4y = 3cos(2x)$
   $P_2 : y^{(4)} + 4y'' + 4y = x$
   $P_3 : y^{(4)} + 4y'' + 4y = e^{-2x}$
   entonces
   $y_{p_1} = Acos(2x) + Bsen(2x)$
   $y_{p_2} = Cx + D$
   $y_{p_3} = Ke^{-2x}$

   La solución particular propuesta es de la forma

   $$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = Acos(2x) + Bsen(2x) + Cx + D + Ke^{-2x}$$

   donde A, B, C, D y K son constantes.

3. Considerando la ecuación

   $$y'' - \frac{3}{t}y' + \frac{4}{t^2}y = 0$$

   encuentre su solución general si $y_1(t) = t^2$ es una solución de la ecuación dada.
   Solución:
   Apliquemos el método de reducción de orden, entonces para encontrar la otra solución $y_2(t)$ escribimos $y_2(t) = y_1(t)c(t)$ donde

   $$c'(t) = \frac{1}{(y_1)^2} e^{-\int\left(-\frac{3}{t}\right)dt} = \frac{e^{3ln|t|}}{t^4} = \frac{1}{t}$$

   luego $c(t) = ln|t|$, consecuentemente $y_2(t) = t^2 ln|t|$, entonces la solución general es

   $$y(t) = c_1 t^2 + c_2 t^2 ln|t|.$$

   donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

4. Resolver $x'' + x = 2sec^3(t)$ con $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$
   Solución:
   La ecuación característica correspondiente a la EDO homogénea asociada es

   $$\lambda^2 + 1 = 0$$

y tiene por solución a $\lambda = \pm i$

luego $x_1 = cos(t)$ y $x_2 = sen(t)$ son soluciones l.i. de la EDO homogénea. Para encontrar la solución particular x_p de la EDO no homogénea aplicamos el método de variación de parámetros, es decir

$$x_p = C_1(t)x_1 + C_2(t)x_2$$

donde

$$C_1(t) = -\int \underbrace{\frac{sen(t)\left(2sec^3(t)\right)}{W(x_1,x_2)}}_{=1} dt = -\int 2sec^2(t)\,tan(t)\,dt = -tan^2(t)$$

y

$$C_2(t) = \int \underbrace{\frac{cos(t)\left(2sec^3(t)\right)}{W(x_1,x_2)}}_{=1} dt = \int 2sec^2(t)\,dt = 2tan(t),$$

consecuentemente

$$x_p = -tan^2(t)x_1 + 2tan(t)x_2 = tan(t)sen(t).$$

Por lo tanto, la solución general es

$$x(t) = c_1 cos(t) + c_2 sen(t) + tan(t)sen(t)$$

de la condición inicial $0 = x(0) \Longrightarrow c_1 = 0$, además

$$x'(t) = c_2 cos(t) + sec^2(t)sen(t) + tan(t)cos(t)$$

y como $0 = x'(0) \Longrightarrow c_2 = 0$. Finalmente la solución del PVI es

$$x = tan(t)sen(t).$$

5. Dada la EDO $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$ para $x > 0$

   a) Verifique que $y_1(x) = xe^x$ es una solución de la EDO.

   b) Usando el método de reducción de orden obtenga una segunda solución linealmente independiente de la EDO dada.

   Solución: Calculamos las derivadas de y_1

$$y_1'(x) = e^x + xe^x$$

$$y_1''(x) = 2e^x + xe^x$$

al reemplazar en la EDO

$$\begin{aligned} x^2y_1'' - x(x+2)y_1' + (x+2)y_1 &= x^2(2e^x + xe^x) - x(x+2)(e^x + xe^x) + (x+2)(xe^x) \\ &= e^x\left(2x^2 + x^3 - x(x+2)(x+1) + x(x+2)\right) = e^x \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Lo que prueba que y_1 es solución de la EDO. Por otro lado aplicando el método de reducción de orden tenemos que reescribir la EDO como

$$y'' - \left(\frac{x+2}{x}\right)y' + \left(\frac{x+2}{x^2}\right)y = 0$$

y tenemos que la solución y_2 es tal que

$$y_2(x) = C(x)y_1$$

donde

$$C'(x) = \frac{e^{-\int -\frac{x+2}{x}dx}}{(xe^x)^2} = \frac{e^{\int\left(1+\frac{2}{x}\right)dx}}{x^2e^{2x}} = \frac{e^{x+2ln|x|}}{x^2e^{2x}} = \frac{1}{e^x}$$

luego $C(x) = \int C'(x)dx = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$. Así $y_2 = -e^{-x} \cdot x \cdot e^x = -x$. Por lo tanto, la segunda solución es

$$y_2(x) = -x.$$

6. Resolver la EDO $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$
   Solución:
   La ecuación característica asociada es $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, al factorizar

   $$(\lambda - 1)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1(\text{multiplicidad } 2)$$

   luego dos soluciones linealmente independientes de la EDO homogénea asociada son

   $$y_1 = e^x \quad e \quad y_2 = xe^x.$$

   Aplicando el método de variación de parámetros tenemos que la solución particular debe tener la forma

   $$y_p(x) = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

   donde c_1', c_2' son funciones tales que cumplen

   $$c_1'(x) = -\frac{r(x)y_2(x)}{W(y_1, y_2)(x)} \quad y \quad c_2'(x) = \frac{r(x)y_1(x)}{W(y_1, y_2)(x)}$$

   Luego, $c_1(x) = -\int \frac{r(x)y_2(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx \quad \text{y} \quad c_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx$
   Además como $r(x) = \frac{e^x}{x}$ y $W(y_1, y_2) = e^{2x}$ se tiene que

   - $c_1(x) = -\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}}dx = -x$

     y

   - $c_2(x) = \int \frac{e^{2x}}{xe^{2x}}dx = ln|x|$

   Por lo tanto,

   $$y_p = -xy_1 + ln|x|y_2$$

   luego la solución general de la EDO es

   $$y = k_1e^x + k_2xe^x - xe^x + ln|x|e^x x.$$

   donde k_1, k_2 son constantes arbitrarias.

7. Dada la EDO $y'' - 5y' + 6y = e^t cos(2t) + e^{2t}(3t + 4)$
   Aplique el método de coeficientes indeterminados, determine la forma de la solución particular .
   Solución:
   Como la ecuación característica es $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ entonces $(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$
   luego dos soluciones linealmente independientes de la EDO homogénea asociada son

   $$y_1 = e^{2t} \quad e \quad y_2 = e^{3t}$$

   entonces $y_p = Ae^t cos(2t) + Be^t sen(2t) + t(Ct + D)e^{2t}$ donde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$

4.5. Ejercicios Propuestos

1. Verificar si las de funciones dadas son linealmente independientes en la recta real:

   a) $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$
   b) $y_1(x) = sen(x)$, $y_2(x) = cos(x)$
   c) $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$
   d) $y_1(x) = 2x^2$, $y_2(x) = 3x^2$

2. Resolver los siguientes PVIs

   a) $y'' + 9y = 0$ sujeto a $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ Rpta. $y = cos(3t)$
   b) $y'' + 3y' + 2y = 0$ sujeto a $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ Rpta. $y = -2e^{-2t} + 3e^{-t}$
   c) $y'' - 4y' + 4y = e^{3t}$ sujeto a $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ Rpta. $y = e^{3t} - e^{2t}$
   d) $y'' - 4y' = -e^{3t}$ sujeto a $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$Rpta. $y = \frac{e^{3t}}{3} + \frac{2}{3}$
   e) $y'' - 3y' + 2y = e^{5t}$ sujeto a $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ Rpta. $y = \frac{e^t}{4} + \frac{2e^{2t}}{3} + \frac{e^{5t}}{12}$
   f) $y''' + y' = 2e^{2t}$ sujeto a $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$ Rpta. $y = \frac{e^{2t}}{5} - \frac{cost}{5} - \frac{2sent}{5}$
   g) $y''' - 4y'' + y' + 6y = 10sent$ sujeto a $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$ Rpta. $y = \frac{5e^{-t}}{12} - \frac{2e^{2t}}{3} + \frac{e^{3t}}{4} + sent$

3. El PVI que modela la posición $x(t)$ de un objeto en cualquier instante de tiempo t es:
   $x'' + 4x' + 3x = 0$ sujeto a $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$
   determine la posición del objeto en cualquier instante.

4. El PVI que modela la posición $x(t)$ de un objeto en cualquier instante de tiempo t es:
   $x'' + 10x' + 16x = 0$ sujeto a $x(0) = 1$, $x'(0) = -6$
   determine la posición del objeto en cualquier instante.

5. Verifique que $y(x) = x$ es una solución de la EDO lineal homogénea

$$x^2y'' + xy' - y = 0$$

   Determine una segunda solución, linealmente independiente con la primera.

6. Sea la ecuación diferencial $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$, para $x > 0$ donde α y β son constantes y $(\alpha - 1)^2 \leq 4\beta$. Considere el cambio de variable $x = e^z$. Resuelva la nueva EDO y determine la solución general de la EDO original.

7. Muestre que $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - 1/4\right)y = 0$; para $x > 0$ puede ser reducida a la EDO

$$v'' + v = 0$$

   mediante la sustitución $y(x) = x^{-1/2}v(x)$. Determine la solución general de la EDO original.

8. Halle las Transformadas de Laplace de las siguientes funciones:

   a) $f(t) = t^2 + 6t - 3$
   b) $f(t) = 3e^{-4t} + \frac{cos(5t)}{2} + \frac{3t^3}{4} + 8$
   c) $f(t) = \frac{sen(t)}{t}$

9. Resolver las siguientes EDO

a) $y''' + y' = sec(x)$

b) $y'' + y = cot(x)$

c) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

10. Resolver los siguientes PVI

a) $y'' + 3y' + 2y = e^x + e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

b) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

c) $y'' + 4y = 2sen(2x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$

11. Use el método de variación de parámetros para resolver los siguientes PVI

a) $y'' + y = sec(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

b) $y'' + 3y' + 2y = sen(e^x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

c) $y'' - y = \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}$, $y(0) = y'(0) = 0$

12. Considere el problema $\begin{cases} y'' + y = r(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

a) Verifique que la función $\phi(x) = \int_0^x sen(x - t) r(t) dt$ es una solución del problema dado.

b) Obtenga esta formula usando el método de variación de parámetros.

13. Resolver las EDOs

a) $y'' + 4y' + 2 = 0$

b) $(y' - 6y)' + 9y = 0$

c) $(y' - 1)' = 1 - y$

d) $y'' + 7y' + 12y = 0$

14. Considere la ecuación

$$xy'' + (x - 1)y' - y = 0$$

a) Si existe una solución y_1 de la forma exponencial. Encuentre esta solución.

b) Use el método de reducción de orden y encuentre la solución del PVI

$$\begin{cases} xy'' + (x - 1)y' - y = 0 \\ y(1) = 1, y'(1) = 0 \end{cases}$$

15. Encuentre la solución general de la ecuación $x^2y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 0$, si se sabe que una de las soluciones es un polinomio de orden 1.

16. Demuestre que el cambio de variable $v = x'/x$ transforma la ecuación

$$x'' + tx' + t^2x = 0$$

en la ecuación

$$v' + t^2 + tv + v^2 = 0$$

17. Demuestre que el cambio de variable $v = x'/x$ transforma la ecuación

$$tx'' - x' - t^3x = 0$$

en la ecuación

$$tv' - t^3 - v + tv^2 = 0$$

18. Muestre que la EDO $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - 1/4\right)y = 0$ para $x > 0$ puede ser reducida a la EDO

$$v'' + v = 0$$

mediante la sustitución $y = x^{-1/2}v(x)$. Determine la solución general de la EDO original.

19. Resolver los siguientes PVI

    a) $y'' + 3y + 2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
    b) $y'' - 4y + 4 = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$
    c) $y'' + 9y = 0$, $y(\frac{\pi}{3}) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$
    d) $y''' + y'' - 2y = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$
    e) $y^{(4)} - 3y'' + 2y = 0$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, $y'''(0) = 1$

20. Resolver las siguientes EDO

    a) $3y^{(5)} - 2y^{(4)} - 15y''' + 10y'' - 12y' - 8y = 0$
    b) $y^{(6)} + 2y^{(5)} - 2y^{(4)} = 0$
    c) $y^{(6)} + y^{(5)} - 12y^{(4)} + 76y''' - 109y'' + 195y' = 0$
    d) $y^{(5)} - y^{(4)} - 10y''' - 10y'' + 4y' + 16y = 0$
    e) $2y^{(5)} + y^{(4)} - 25y''' - 12y'' = 0$
    f) $y^{(5)} + 32y = x^6 + x^4 + x^2 + 1$
    g) $y^{(4)} + 4y'' + 4y = 3cos(2x)$
    h) $y''' - y'' + y' - y = e^x senx + e^x$
    i) $y''' - y'' + y' - y = e^x - xcosx$

Capítulo 5

Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una herramienta que permite resolver problemas de valor inicial de manera mas sencilla. La idea es remplazar un problema de valor inicial en el dominio del tiempo t por una ecuación algebraica en el dominio s.

Definición Transformada de Laplace

Para una función f definida para $t \geq 0$ definimos la transformada de Laplace de f como la función $\mathcal{L}\{f\}$ definida por

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt, \tag{5.1}$$

donde el dominio de la función $\mathcal{L}\{f\}$ será el conjunto de los valores de la variable s para los cuales la integral impropia converge.

Ejemplo 5.1

Calcule la transformada de Laplace de la función f definida por $f(t) = 1$.

Solución:

De la definición (5.1) tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-st} dt = \lim_{b \to +\infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^b = \\
&= \lim_{b \to +\infty} -\frac{(e^{-sb} - 1)}{s} = \begin{cases} \frac{1}{s} & , s > 0 \\ +\infty & , s < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

y $\mathcal{L}\{f\}(s) = +\infty$ si $s = 0$

entonces observamos que esta integral solo es convergente para valores de s positivos, entonces el dominio de transformada de Laplace de esta función estará dada por el intervalo $]0, +\infty[$.

Ejemplo 5.2

Calcular la trasformada de Laplace de la función f definida por $f(t) = e^{at}$.

Solución:

De la definición (5.1) tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{(a-s)t} dt = \lim_{b \to +\infty} \left. \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right|_0^b = \\
&= \lim_{b \to +\infty} \frac{(e^{(a-s)b} - 1)}{a-s} = \begin{cases} +\infty & , a - s > 0 \\ \frac{1}{s-a} & , a - s < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

y $\mathcal{L}\{f\}(s) = +\infty$ si $a - s = 0$

entonces observamos que esta integral solo es convergente para valores de $s > a$, entonces el dominio de transformada de Laplace de esta función estara dada por el intervalo $]a, +\infty[$.

Ejemplo 5.3

Calcule la trasformada de Laplace de la función definida por $f(t) = sen(bt)$.

Solución:

De la definición (5.1) e integrando por partes obtenemos

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} sen(bt)\, dt = \lim_{r \to +\infty} \int_0^r e^{-st} sen(bt)\, dt =$$

$$= \lim_{r \to +\infty} \left. \frac{e^{-st}}{s^2 + b^2} [-sen(bt) - b cos(bt)] \right|_0^r =$$

$$= \lim_{r\to+\infty}\left[\frac{e^{-sr}}{s^2+b^2}(-sen(br)-bcos(br))\right]+\left[\frac{b}{s^2+b^2}\right]=\begin{cases}\frac{b}{s^2+b^2} & s>0\\ oscila & s=0\\ \pm\infty & s<0\end{cases}$$

observamos que esta integral es convergente para $s>0$, entonces el dominio de la transformada de Laplace de esta función es el intervalo $]0,+\infty[$.

Definición Función de Orden exponencial

Decimos que la función f es de orden exponencial si existe $\alpha\in\mathbb{R}$ y una constante $C\geq 0$ tal que

$$|f(t)|\leq Ce^{\alpha t},$$

para todo $t\geq T$ y para cierto $T>0$.

Ejemplo 5.4

Verifique que la función definida por $f(t)=e^{2t}sen(-3t)$ es de orden exponencial.

Solución:

$$|f(t)|=\left|e^{2t}sen(-3t)\right|=e^{2t}\,|sen(-3t)|\leq e^{2t}$$

para todo $t\in\mathbb{R}$, entonces eligiendo $C=1$, $\alpha=2$ y $T=1$

$$|f(t)|\leq e^{2t},\qquad \forall t\geq 1$$

luego la función f es de orden exponencial.

Teorema 5.1

Si f es una función continua o acotada de orden exponencial entonces existe su transformada de Laplace.

en efecto, dado que f es de orden exponencial entonces existe $\alpha\in\mathbb{R}$ y una constante $C\geq 0$ tal que

$$|f(t)|\leq Ce^{\alpha t},$$

para todo $t\geq T$ y para cierto $T>0$. Luego el módulo de su transformada de Laplace se puede acotar por:

$$\begin{aligned}|\mathcal{L}\{f\}(s)| &= \left|\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt\right|\leq\left|\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt+\int_T^\infty e^{-st}f(t)\,dt\right|\\ &\leq\left|\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt\right|+\left|\int_T^\infty e^{-st}f(t)\,dt\right|\\ &\leq\int_0^T\left|e^{-st}f(t)\right|dt+\int_T^\infty\left|e^{-st}f(t)\right|dt=\\ &=\int_0^T e^{-st}\,|f(t)|\,dt+\int_T^\infty e^{-st}\,|f(t)|\,dt\leq A+\int_T^\infty e^{-st}Ce^{\alpha t}dt\\ &\leq A+C\int_T^\infty e^{(\alpha-s)t}dt\leq A+C\frac{e^{(\alpha-s)T}}{s-\alpha}\end{aligned}$$

Así, para todo $s>\alpha$ se tiene

$$|\mathcal{L}\{f\}(s)|\leq A+C\frac{1}{s-\alpha}<+\infty$$

☞ Observación

En caso que existe $\alpha\in\mathbb{R}$ y una constante $C\geq 0$ tal que $|f(t)|\leq Ce^{\alpha t}$, $\forall t\geq 0$, entonces f es de orden exponencial y siguiendo el mismo proceso anterior, para todo $s>\alpha$ se cumple

$$|\mathcal{L}\{f\}(s)|\leq C\frac{1}{s-\alpha}$$

Por lo tanto,

$$0 \leq \lim_{s \to +\infty} |\mathcal{L}\{f\}(s)| = \lim_{s \to +\infty} C\left(\frac{1}{s-\alpha}\right) = 0,$$

así,

$$\lim_{s \to +\infty} |\mathcal{L}\{f\}(s)| = 0 \Longrightarrow \lim_{s \to +\infty} \mathcal{L}\{f\}(s) = 0.$$

Podemos determinar la transformada de Laplace de expresiones más complejas aplicando los resultados de la siguiente tabla de transformadas y algunas propiedades

Tabla Básica de transformadas de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}(s)$
1	$\frac{1}{s},\ s > 0$
$t^n,\ n = 1, 2, 3, \cdots$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s > a$
$sen(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2},\ s > 0$
$cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2},\ s > 0$
$e^{at}t^n,\ n = 1, 2, \cdots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ s > a$
$e^{at}sen(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$e^{at}cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$

5.1. Propiedades Fundamentales

Teorema 5.2

La transformada de Laplace es un operador lineal , es decir, si α y $\beta \in \mathbb{R}$ y f, g son funciones que tienen transformada de Laplace, entonces

$$\mathcal{L}\{\alpha f\} = \alpha\mathcal{L}\{f\}$$

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha\mathcal{L}\{f\} + \beta\mathcal{L}\{g\}$$

Ejemplo 5.5

Halle la transformada de Laplace de la función definida por $f(t) = 5sen(3t) - \sqrt{2}e^{4t}$.

Solución:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{5sen(3t) - \sqrt{2}e^{4t}\right\}(s) = 5\mathcal{L}\{sen(3t)\}(s) - \sqrt{2}\mathcal{L}\left\{e^{4t}\right\}(s) =$$

$$= 5 \cdot \frac{3}{s^2+9} - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{s-4}.$$

Teorema 5.3

Sea f una función y F su transformada de Laplace definida para $s > \alpha$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{e^{bt}f(t)\right\} = F(s-b)$$

y el dominio de la transformada de Laplace de la función $e^{bt}f(t)$ es el intervalo $]\alpha + b, +\infty[$

Ejemplo 5.6

Halle la transformada de Laplace de la función definida por $f(t) = e^{2t}t^2$.

Solución: Al aplicar el teorema anterior se tiene:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{e^{2t}\underbrace{t^2}_{g(t)}\right\}(s) = \underbrace{\frac{2}{(s-2)^3}}_{G(s-2)}.$$

Teorema 5.4

Sea f una función definida para $t \geq 0$ y derivable con transformada de Laplace F definida para $s > \alpha$, entonces f' tiene transformada de Laplace definida por

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0)$$

cuyo dominio es el intervalo $]\alpha, +\infty[$.

Ejemplo 5.7

Calcule la transformada de Laplace de $g(t) = cos(bt), \quad b > 0$.
Solución:Aplicando el teorema anterior

$$\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\left[\underbrace{\frac{sen(bt)}{b}}_{f(t)}\right]'\right\}(s) = \underbrace{s \cdot \frac{b}{b(s^2+b^2)} - 0}_{sF(s)-f(0)} = \frac{s}{s^2+b^2}$$

Corolario 5.1

Si f es una función de orden exponencial α (es decir, tendrá una transformada de Laplace $F(s)$ definida para $s > \alpha$) y además f es n-veces diferenciable, entonces

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

para $s > \alpha$.

Teorema 5.5

Si f es un función con transformada de Laplace $F(s)$ definida en $s > \alpha$, entonces para $n = 1, 2, \cdots$ se tiene

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n}(s),$$

para $s > \alpha$.

Ejemplo 5.8

Calcule la transformada de Laplace de $\mathcal{L}\{tcos(2t)\}$.

Solución: Aplicando el teorema anterior

$$\mathcal{L}\{tcos(2t)\}(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) = -\left(\frac{s^2+4-s(2s)}{(s^2+4)^2}\right) = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}.$$

5.2. Transformada de Laplace Inversa

La transformada de Laplace inversa es una herramienta alternativa que permitirá resolver problemas de valor inicial de manera más sencilla.

Definición

Dada una función $F(s)$, decimos que $f(t)$ es la transformada de Laplace inversa de $F(s)$ si $f(t)$ es continua para $t \geq 0$ y satisface que

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$$

Usualmente se denota $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = f(t) \quad$ o $\quad F^{-1}(s) = f(t)$

Ejemplo 5.9

Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{24}{s^5}\right\}(t)$.

Solución:
Siendo $\mathcal{L}\left\{t^4\right\}(s) = \frac{4!}{s^5} = \frac{24}{s^5}$, entonces $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{24}{s^5}\right\}(t) = t^4$.

Ejemplo 5.10

Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{20}}{24-4s+s^2}\right\}(t)$.

Solución:
Note que, $\mathcal{L}\left\{e^{2t}sen\left(\sqrt{20}t\right)\right\}(s) = \frac{\sqrt{20}}{(s-2)^2+20}$, además

$$\frac{\sqrt{20}}{24-4s+s^2} = \frac{\sqrt{20}}{(s-2)^2+20}$$

luego $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{20}}{24-4s+s^2}\right\} = e^{2t}sen\left(\sqrt{20}t\right)$.

Teorema 5.6

La transformada de Laplace inversa es un operador lineal , es decir, si α y $\beta \in \mathbb{R}$ y F, G son transformadas de Laplace de las funciones f, g respectivamente, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F\}(t) = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F + \beta G\}(t) = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) + \beta\mathcal{L}^{-1}\{G\}(t)$$

Ejemplo 5.11

Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}(t)$.

Solución:

Apliquemos la descomposición en fracciones parciales,

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+4}$$

luego

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{A(s-2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s+4)}$$

$$\Longrightarrow s^2+6s+9 = A(s-2)(s+4)+B(s-1)(s+4)+C(s-1)(s-2)$$

observamos que

- Si $s=2 \Longrightarrow 25 = B6 \Longrightarrow B = \frac{25}{6}$.
- Si $s=1 \Longrightarrow 16 = -5A \Longrightarrow A = -\frac{16}{5}$.
- Si $s=-4 \Longrightarrow 1 = 30C \Longrightarrow C = \frac{1}{30}$

consecuentemente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{16}{5}}{s-1}+\frac{\frac{25}{6}}{s-2}+\frac{\frac{1}{30}}{s+4}\right\} = \\ &= -\frac{16}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+\frac{25}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+\frac{1}{30}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} = -\frac{16e^t}{5}+\frac{25e^{2t}}{6}+\frac{e^{-4t}}{30}.$$

5.3. Transformada de Laplace para resolver PVIs

Para resolver PVIs aplicando la Transformada de Laplace es recomendable seguir los siguientes pasos:

1. Aplique la transformada de Laplace y sus propiedades a la ecuación del PVI.
2. Utilice las condiciones inciales.
3. Resolver algebraicamente la ecuación donde la incógnita es la transformada de Laplace de la función incógnita de la EDO inicial.
4. Aplique la transformada de Laplace inversa para obtener la solución de la EDO inicial.

Ejemplo 5.12

Resolver el PVI $y'+3y = 13sen(2t)$ sujeto a $y(0)=6$
Solución:
Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'+3y\}(s) &= \mathcal{L}\{13sen(2t)\}(s) \\ sY(s)-y(0)+3Y(s) &= 13\cdot\frac{2}{s^2+4} \\ (s+3)Y(s)-6 &= \frac{26}{s^2+4} \\ Y(s) &= \frac{6}{s+3}+\frac{26}{(s^2+4)(s+3)} \end{aligned}$$

Al descomponer la última fracción en sus fracciones parciales, se tiene

$$\frac{26}{(s^2+4)(s+3)} = \frac{As+B}{s^2+4}+\frac{C}{s+3} = \frac{(As+B)(s+3)+C(s^2+4)}{(s^2+4)(s+3)}$$

$\Longrightarrow 26 = (As+B)(s+3)+C(s^2+4)$,

- Si $s=-3$ entonces $26 = 13C \Longrightarrow C = 2$.
- Si $s=0$ entonces $26 = 3B+8 \Longrightarrow B = 6$.
- Si $s=1$ entonces $26 = (A+6)4+10 \Longrightarrow 26 = 4A+34 \Longrightarrow A = -2$.

$$\frac{26}{(s^2+4)(s+3)} = \frac{-2s+6}{s^2+4}+\frac{2}{s+3} = \frac{-2s}{s^2+4}+\frac{6}{s^2+4}+\frac{2}{s+3}.$$

Aplicando la transformada de Laplace inversa para encontrar la solución del PVI

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{6}{s+3} + \tfrac{26}{(s^2+4)(s+3)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{6}{s+3} + \tfrac{-2s}{s^2+4} + \tfrac{6}{s^2+4} + \tfrac{2}{s+3}\right\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{8}{s+3} + \tfrac{-2s}{s^2+4} + \tfrac{6}{s^2+4}\right\} = 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s+3}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{s}{s^2+4}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{2}{s^2+4}\right\} = \\ &= 8e^{-3t} - 2cos(2t) + 3sen(2t). \end{aligned}$$

Ejemplo 5.13

Resolver el PVI $y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}$ sujeto a $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$

Solución:

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación

$$\mathcal{L}\{y'' - 3y' + 2y\}(s) = \mathcal{L}\{e^{-4t}\}(s)$$

luego

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''\}(s) - 3\mathcal{L}\{y'\}(s) + 2\mathcal{L}\{y\}(s) &= \mathcal{L}\{e^{-4t}\}(s) \\ [s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) &= \tfrac{1}{s+4} \\ s^2Y(s) - s - 5 - 3sY(s) + 3 + 2Y(s) &= \tfrac{1}{s+4} \\ (s^2 - 3s + 2)Y(s) - s - 2 &= \tfrac{1}{s+4} (s^2 - 3s + 2)Y(s) = \tfrac{1}{s+4} + s + 2 \\ (s-1)(s-2)Y(s) &= \tfrac{1+(s+2)(s+4)}{(s+4)} \end{aligned}$$

de donde

$$Y(s) = \frac{s^2 + 6s + 9}{(s+4)(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2}$$

y obtenemos que $A = \frac{1}{30}$, $B = -16$, $C = \frac{25}{61}$

Así

$$Y(s) = \frac{1}{30(s+4)} - \frac{16}{s-1} + \frac{25}{61(s-2)}$$

para obtener $y(t)$ aplicamos la transformada de Laplace inversa de $Y(s)$, entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{30(s+4)} - \tfrac{16}{s-1} + \tfrac{25}{61(s-2)}\right\}(t) \\ y(t) &= \tfrac{1}{30}\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{(s+4)}\right\}(t) - 16\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{(s-1)}\right\}(t) + \tfrac{25}{61}\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{(s-2)}\right\}(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y(t) = \frac{1}{30}e^{-4t} - 16e^{t} + \frac{25}{61}e^{2t}$$

5.3.1. EDOs lineales con coeficientes variables

La transformada de Laplace funciona bastante bien para EDOs lineales con coeficientes constantes, sin embargo, en algunos casos también se puede utilizar para resolver EDOs lineales con coeficientes variables.

Ejemplo 5.14

Resolver el PVI $ty'' - ty' + y = 2$ sujeto a $y(0) = 2$, $y'(0) = -4$

Solución:

Aplicando la transformada de Laplace a la EDO obtenemos

$$\mathcal{L}\{ty'' - ty' + y\}(s) = \mathcal{L}\{2\}(s),$$

$$\mathcal{L}\{ty''\}(s) - \mathcal{L}\{ty'\}(s) + \mathcal{L}\{y\}(s) = 2\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{2}{s},$$

observemos que

- $\mathcal{L}\{y\}(s) = Y(s)$
- $\mathcal{L}\{ty'\}(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y'\}(s) = -\frac{d}{ds}[sY(s) - y(0)] = -Y(s) - sY'(s)$
- $\mathcal{L}\{ty''\}(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y''\}(s) = -\frac{d}{ds}\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] =$

$$= -2sY(s) - s^2Y'(s) + y(0)$$

consecuentemente

$$\left[-2sY(s) - s^2Y'(s) + y(0)\right] - \left[-Y(s) - sY'(s)\right] + Y(s) = \frac{2}{s}$$

reescribiendo obtenemos

$$\left(s - s^2\right)Y'(s) + (2 - 2s)Y(s) + 2 = \frac{2}{s}$$

$$s(1-s)Y'(s) + 2(1-s)Y(s) = \frac{2}{s} - 2$$

luego dividiendo entre $s(1-s)$ obtenemos

$$Y'(s) + \frac{2}{s}Y(s) = \frac{(2-2s)}{s^2(1-s)} = \frac{2(1-s)}{s^2(1-s)} = \frac{2}{s^2}.$$

Notemos que la ecuación resultante es una EDO lineal de primer orden, luego el correspondiente factor integrante es

$$\mu(s) = e^{\int \frac{2}{s}ds} = e^{2ln|s|} = s^2,$$

consecuentemente la solución de esta última ecuación diferencial es

$$Y(s) = s^{-2}\left[\int s^2 . \frac{2}{s^2}ds + C\right] = s^{-2}(2s + C) = \frac{2}{s} + \frac{C}{s^2},$$

donde C es una constante arbitraria. Por otro lado tenemos que

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} + \frac{C}{s^2}\right\}(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) + C\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t) = 2 + Ct,$$

Además, como $-4 = y'(0)$ y $y'(t) = C$,tenemos que $C = -4$.
Por lo tanto, la solución es:

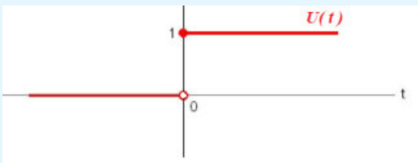
$$y(t) = 2 - 4t.$$

5.3.2. Funciones con discontinuidades de salto

Definición Función escalón unitario

La función escalón unitario se define como

$$U(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \geq 0 \\ 0 & si \quad t < 0 \end{cases}$$



☞ **Observación**

1. Si $a \in \mathbb{R}$, la traslación de la función escalón unitario a unidades se escribe:
$$U(t-a) = \begin{cases} 1 & si \quad t \geq a \\ 0 & si \quad t < a \end{cases}$$
2. Para $m \in \mathbb{R}$ tenemos que
$$mU(t-a) = \begin{cases} m & si \quad t \geq a \\ 0 & si \quad t < a \end{cases}$$
3. La expresión $1 - U(t-a)$ se escribe como
$$1 - U(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t \geq a \\ 1 & si \quad t < a \end{cases}$$
4. Considerando $a < b$ se tiene:
$$U(t-a) - U(t-b) = \begin{cases} 1 & si \quad a \leq t \leq b \\ 0 & si \quad t < a \quad ó \quad t > b \end{cases}$$

Una de las virtudes que tiene la función escalón unitario es que permite escribir funciones continuas por partes usando una sola fórmula.
Por ejemplo la función f definida por
$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 < t < \pi \\ 3cos(t) & si \quad t > \pi \end{cases}$$
puede reescribirse como
$$\begin{aligned} f(t) &= 3cos(t) \begin{cases} 0 & si \quad 0 < t < \pi \\ 1 & si \quad t > \pi \end{cases} \\ &= 3cos(t)U(t-\pi) \end{aligned}$$
donde $Dom(f) =]0, +\infty[- \{\pi\}$
En el caso de la función
$$g(t) = \begin{cases} t & si \quad t < 1 \\ 4t^2 & si \quad 1 < t < 2 \\ cos(t) & si \quad t > 2 \end{cases}$$
tenemos que
$$g(t) = \begin{cases} t & si \quad t < 1 \\ 0 & si \quad 1 < t < 2 \\ 0 & si \quad t > 2 \end{cases} + \begin{cases} 0 & si \quad t < 1 \\ 4t^2 & si \quad 1 < t < 2 \\ 0 & si \quad t > 2 \end{cases} + \begin{cases} 0 & si \quad t < 1 \\ 0 & si \quad 1 < t < 2 \\ cos(t) & si \quad t > 2 \end{cases}$$
equivalentemente
$$g(t) = t\begin{cases} 1 & si \quad t < 1 \\ 0 & si \quad 1 < t \end{cases} + 4t^2 \begin{cases} 0 & si \quad t < 1 \\ 1 & si \quad 1 < t < 2 \\ 0 & si \quad t > 2 \end{cases} + cos(t)\begin{cases} 0 & si \quad t < 2 \\ 1 & si \quad t > 2 \end{cases}$$
luego
$$g(t) = t(1 - U(t-1)) + 4t^2(U(t-1) - U(t-2)) + cos(t)(U(t-2)).$$
Finalmente,
$$g(t) = (4t^2 - t)U(t-1) + (cos(t) - 4t^2)U(t-2) + t$$

donde $Dom(g) =]-\infty, +\infty[- \{1, 2\}$.

Teorema 5.7

La función $U(t-a)$ posee transformada de Laplace dada por

$$\mathcal{L}\{U(t-a)\}(s) = \begin{cases} \frac{e^{-sa}}{s} & si \quad a > 0 \\ \frac{1}{s} & si \quad a \leq 0 \end{cases}$$

cuyo dominio es el intervalo $]0, +\infty[$.
Considerando $a > 0$, la transformada inversa de $\frac{e^{-as}}{s}$ esta dada por

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\}(t) = U(t-a).$$

Ejemplo 5.15

Calcule la transformada de Laplace de la función f definida por $f(t) = 3U(t-\pi) + 2U(t+2)$
Solución:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{3U(t-\pi)(s) + 2U(t+2)\}(s) = 3\mathcal{L}\{U(t-\pi)\}(s) + 2\mathcal{L}\{U(t+2)\}(s) \\ &= 3 \cdot \frac{e^{-\pi s}}{s} + 2 \cdot \frac{1}{s} = \frac{3e^{-\pi s} + 2}{s}. \end{aligned}$$

Teorema 5.8

Si la función f posee transformada de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \qquad s > \alpha$$

Para $a > 0$ se tiene

$$\mathcal{L}\{f(t-a)U(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s),$$

recíprocamente, se cumple

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = f(t-a)U(t-a).$$

Teorema 5.9

Si la función g posee transformada de Laplace. Para todo $a > 0$ se cumple

$$\mathcal{L}\{g(t)U(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{g(t+a)\}(s)$$

Ejemplo 5.16

Calcule la transformada de Laplace de la función f definida por $f(t) = t^2U(t-1)$

Solución:
Aplicando la transformada de Laplace, se tiene

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{t^2U(t-1)\right\}(s) = e^{-s}\mathcal{L}\left\{(t+1)^2\right\} = e^{-s}\mathcal{L}\left\{t^2 + 2t + 1\right\} =$$

$$= e^{-s}\left[\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s} + \frac{1}{s}\right] = \frac{2e^{-s}}{s^3} + \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s}.$$

Ejemplo 5.17

Calcule la transformada de Laplace de la función $f(t) = sen(t)U(t-\pi)$
Solución:

Aplicando la transformada de Laplace, se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{sen(t)U(t-\pi)\}(s) = e^{-\pi s}\mathcal{L}\{sen(t+\pi)\}\\ &= e^{-\pi s}\mathcal{L}\{sen(t)cos(\pi)+cos(t)sen(\pi)\} = e^{-\pi s}\mathcal{L}\{-sen(t)\} = -e^{-\pi s}\tfrac{1}{s^2+1}.\end{aligned}$$

Ejemplo 5.18

Calcule la transformada de Laplace inversa de $G(s)(t) = \dfrac{4s\, e^{-\pi s}}{s^2+1}(t)$

Solución: Aplicando la transformada de laplace inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4se^{-\pi s}}{s^2+1}\right\} = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s}\underbrace{\frac{s}{s^2+1}}_{\mathcal{L}\{cos(t)\}}\right\} = 4cos(t-\pi)U(t-\pi).$$

Ejemplo 5.19

Resolver el PVI $y'+y=f(t)$ sujeto a $y(0)=5$ donde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0<t<\pi \\ 3cos(t) & si \quad t>\pi \end{cases}$$

Solución:
Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación del PVI se tiene

$$\mathcal{L}\{y'+y\} = \mathcal{L}\{f(t)\},$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{3cos(t)U(t-\pi)\} = 3e^{-\pi s}\mathcal{L}\{cos(t+\pi)\}\\ &= 3e^{-\pi s}\mathcal{L}\{cos(t)cos(\pi)-sen(t)sen(\pi)\} = 3e^{-\pi s}\mathcal{L}\{-cos(t)\} = -3e^{-\pi s}\cdot\tfrac{s}{s^2+1},\end{aligned}$$

luego

$$sY(s)-5+Y(s) = -3e^{-\pi s}\cdot\frac{s}{s^2+1}$$

seguidamente

$$Y(s) = \frac{5}{s+1} - \frac{3e^{-\pi s}s}{(s+1)(s^2+1)}$$

aplicando la transformada de laplace inversa se tiene

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+1} - \frac{3e^{-\pi s}s}{(s+1)(s^2+1)}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3e^{-\pi s}s}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$$

ya que se tiene que

$$\frac{s}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{Bs+C}{(s^2+1)}$$

resulta que $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2}$ y $C=\frac{1}{2}$ obtenemos

$$\begin{aligned}y(t) &= 5e^{-t} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{-\tfrac{e^{-\pi s}}{2(s+1)} + \tfrac{e^{-\pi s}s}{2(s^2+1)} + \tfrac{e^{-\pi s}}{2(s^2+1)}\right\}\\ y(t) &= 5e^{-t} - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{e^{-\pi s}}{(s+1)}\right\} - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{e^{-\pi s}s}{(s^2+1)}\right\} - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{e^{-\pi s}}{(s^2+1)}\right\}\\ y(t) &= 5e^{-t} - \tfrac{3}{2}\left\{-e^{-(t-\pi)}U(t-\pi) + cos(t-\pi)U(t-\pi) + sen(t-\pi)U(t-\pi)\right\}\\ y(t) &= 5e^{-t} + \tfrac{3}{2}e^{-(t-\pi)}U(t-\pi) - \tfrac{3}{2}cos(t-\pi)U(t-\pi) - \tfrac{3}{2}sen(t-\pi)U(t-\pi)\\ y(t) &= 5e^{-t} + \tfrac{3}{2}e^{-(t-\pi)}U(t-\pi) + \tfrac{3}{2}cos(t)U(t-\pi) - \tfrac{3}{2}cos(t)U(t-\pi)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y(t) = 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-(t-\pi)}U(t-\pi),$$

es la solución del PVI dado.

Ejemplo 5.20

Resolver $y^{(4)} - y = U(t-1)$ sujeto a $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, $y^{(3)}(0) = 1$

Solución:

Aplicando la transformada de Laplace y sus propiedades a la EDO obtenemos

$$\mathcal{L}\left\{y^{(4)}\right\}(s) - \mathcal{L}\left\{y\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{U(t-1)\right\}(s)$$

luego

$$s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y^{(3)}(0) - Y(s) = \frac{e^{-s}}{s},$$

reemplazando los datos iniciales y simplificando, se tiene

$$\left(s^4 - 1\right)Y(s) = \frac{e^{-s}}{s} + 1$$

así,

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s-1)(s+1)}\left(\frac{e^{-s}}{s} + 1\right)$$

aplicando la transformada de laplace inversa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s-1)(s+1)s}.e^{-s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s-1)(s+1)}\right\}$$

notemos que

- $\dfrac{1}{(s^2+1)(s-1)(s+1)s} = \dfrac{As+B}{s^2+1} + \dfrac{C}{s-1} + \dfrac{D}{s+1} + \dfrac{E}{s}$, dicha ecuación se cumple para
$$A = 1/2,\ B = 0, C = 1/4,\ D = 1/4, E = 1$$
- $\dfrac{1}{(s^2+1)(s-1)(s+1)} = \dfrac{Fs+G}{s^2+1} + \dfrac{H}{s-1} + \dfrac{K}{s+1}$ de donde
$$F = 0, G = -1/2,\ H = 1/4,\ K = -1/4.$$

Luego,

- $$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s-1)(s+1)s}.e^{-s}\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)}.e^{-s}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}e^{-s}\right\}(t) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}e^{-s}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-s}\right\} \\
&= \frac{1}{2}(cos(t-1)U(t-1)) + \tfrac{1}{4}e^{t-1}U(t-1) + \frac{1}{4}e^{-(t-1)}U(t-1) + U(t-1) \\
&= \left[\frac{1}{2}cos(t-1) + \frac{1}{4}e^{t-1} + \frac{1}{4}e^{-t+1} + 1\right]U(t-1)
\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s-1)(s+1)}\right\} &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\
&= -\frac{1}{2}sen(t) + \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-t}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y(t)=\left[\frac{1}{2}cos(t-1)+\frac{1}{4}e^{t-1}+\frac{1}{4}e^{-t+1}+1\right]U(t-1)+\left(-\frac{1}{2}sen(t)+\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}\right)$$

Definición Convolución

Dadas dos funciones continuas por partes en el intervalo $[0,+\infty[$, entonces se define la convolución (producto de convolución) entre f y g como

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(r)\,g(t-r)\,dr$$

Ejemplo 5.21

Si $f(t)=1$ y $g(t)=t$. Determine $f*g$.

Solución: Por definición de convolución tenemos

$$(f*g)(t)=\int_0^t 1\,(t-r)\,dr=\int_0^t (t-r)\,dr=tr-\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^t=\frac{t^2}{2},$$

también note que al calcular $g*f$ se tiene:

$$(g*f)(t)=\int_0^t (r)(1)\,dr=\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^t=\frac{t^2}{2}$$

una pregunta natural es ¿ el producto convolución es conmutativo,$f*g=g*f$?, veamos algunas propiedades importantes de la convolución

Teorema 5.10

Sean f,g dos funciones continuas por partes, se cumple

1. $f*g=g*f$
2. $(f*g)*h=f*(g*h)$
3. $f*(g+h)=f*g+f*h$
4. $f*0=0$

Sin embargo como vimos en el ejemplo anterior, no se cumple que

$$f*1=f$$

Una de las principales propiedades de la convolución de funciones tiene que ver con la transformada de Laplace, es decir la transformada de Laplace de una convolución es el producto de sus transformadas, como lo dice el siguiente teorema

Teorema 5.11

Sean f y g funciones que tienen por transformadas de Laplace a $F(s)$ y $G(s)$ respectivamente para $s>\alpha$. Entonces se cumple que

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}(s)=F(s)\,G(s),$$

o en términos de la transformada de Laplace inversa se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,G(s)\}(t)=(f*g)(t)$$

Notese que este resultado permite calcular transformadas de Laplace inversas de productos de funciones.

Ejemplo 5.22

Calcule la transformada de Laplace inversa de $F(s) = \frac{s}{(s^2+4)^2}$

Solución: Al aplicar la transformada de Laplace inversa a F se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t) = & \ \tfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\cdot\frac{2}{s^2+4}\right\}(t) = \tfrac{1}{2}\cos(2t) * \operatorname{sen}(2t) \\
= & \ \tfrac{1}{2}\int_0^t \cos(2r)\operatorname{sen}(2(t-r))\,dr = \tfrac{1}{2}\int_0^t \cos(2r)[\operatorname{sen}(2t-2r)]\,dr \\
= & \ \tfrac{1}{2}\int_0^t \cos(2r)[\operatorname{sen}(2t)\cos(2r)-\operatorname{sen}(2r)\cos(2t)]\,dr \\
= & \ \tfrac{1}{2}\left[\int_0^t \operatorname{sen}(2t)\cos^2(2r)\,dr - \int_0^t \cos(2t)\operatorname{sen}(2r)\cos(2r)\,dr\right] \\
= & \ \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\int_0^t \frac{1+\cos(4r)}{2}\,dr - \left[\frac{\cos(2t)}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2(2r)}{4}\right]\Big|_0^t \\
= & \ \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\left(r+\frac{\operatorname{sen}(4r)}{4}\right)\Big|_0^t - \frac{\cos(2t)\operatorname{sen}^2(2t)}{8} \\
= & \ \frac{t\operatorname{sen}(2t)}{4} + \frac{2\operatorname{sen}^2(2t)\cos(2t)}{16} - \frac{\cos(2t)\operatorname{sen}^2(2t)}{8} = \frac{t\operatorname{sen}(2t)}{4}.
\end{aligned}$$

5.3.3. EDOs lineales y transformadas de Laplace

Para resolver la EDO

$$ay'' + by' + cy = g(t)$$

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación,

$$a\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + b(sY(s) - y(0)) + cY(s) = G(s)$$

si hacemos que $y(0) = C_1$ y $y'(0) = C_2$, entonces

$$a\left(s^2Y(s) - sC_1 - C_2\right) + b(sY(s) - C_1) + cY(s) = G(s)$$

luego

$$\left(as^2 + bs + c\right)Y(s) = G(s) + (as+b)C_1 + aC_2$$

despejando $Y(s)$ obtenemos

$$Y(s) = \frac{G(s)}{as^2+bs+c} + \frac{(as+b)C_1}{as^2+bs+c} + \frac{aC_2}{as^2+bs+c}$$

aplicando la transformada de Laplace inversa a esta última expresión:

$$\begin{aligned}
y(t) = & \ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{as^2+bs+c} + \frac{(as+b)C_1}{as^2+bs+c} + \frac{aC_2}{as^2+bs+c}\right\}(t) \\
= & \ \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\frac{1}{as^2+bs+c}\right\} + C_1\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(as+b)}{as^2+bs+c}\right\} + C_2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{as^2+bs+c}\right\} \\
= & \ (g*h)(t) + C_1y_1(t) + C_2y_2(t)
\end{aligned}$$

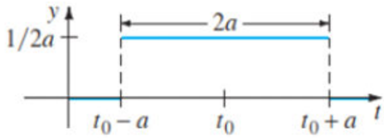
donde

- $\mathcal{L}\{h(t)\} = \dfrac{1}{as^2+bs+c}$
- $\mathcal{L}\{y_1(t)\} = \dfrac{(as+b)}{as^2+bs+c}$
- $\mathcal{L}\{y_2(t)\} = \dfrac{a}{as^2+bs+c}$

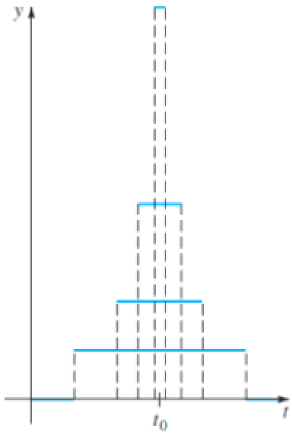
5.3.4. Impulso Unitario

Para todo $a > 0$, se define la función impulso en $t_0 \geq 0$ como:

$$\delta_a(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 - a \\ \frac{1}{2a} & \text{si } t_0 - a \leq t < t_0 + a \\ 0 & \text{si } t_0 + a \leq t \end{cases}$$



Nótese que el área por debajo de la gráfica de la función impulso y sobre el eje x se mantiene igual a 1 cualquiera que sea el valor de a. Si a se hace progresivamente pequeño, el área se mantiene igual a 1, obteniéndose un pulso de gran altura.



Función delta de Dirac

Sea δ_a la función impulso unitario, definimos la función delta de Dirac como el límite de δ_a cuando a tiende a cero. Es decir:

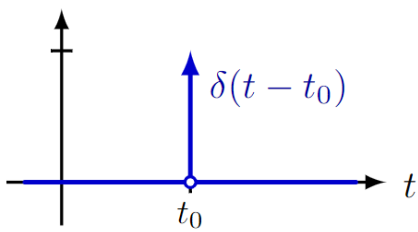
$$\delta(t - t_0) = \lim_{a \to 0} \delta_a(t - t_0)$$

Observación

La función delta de Dirac realmente es una distribución y no una función como tal, pero no es objetivo de este curso detallar la definición de distribución y para evitar confusiones nos referiremos a esta distribución delta de Dirac simplemente como la función Delta.

La función Delta de Dirac tiene las siguientes propiedades

1. $\delta(t - t_0) = \begin{cases} +\infty & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases}$



2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, dt = 1$

Teorema 5.12 Transformada de Laplace de la función Delta de Dirac

Para $t_0 \geq 0$,

$$\mathcal{L}\left\{\delta\left(t-t_0\right)\right\}(s) = e^{-st_0}$$

En particular $\mathcal{L}\left\{\delta\left(t\right)\right\} = 1$

Ejemplo 5.23

Resolver el PVI $y' + y = \delta\left(t-1\right), y(0) = 2$

Solución:

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación y obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{y'+y\right\}(s) = & \ \mathcal{L}\left\{\delta\left(t-1\right)\right\}(s) \\
\mathcal{L}\left\{y'\right\} + \mathcal{L}\left\{y\right\} = & \ e^{-s} \\
sY(s) - y(0) + Y(s) = & \ e^{-s} \\
(s+1)Y(s) - 2 = & \ e^{-s} \\
Y(s) = & \ \frac{2+e^{s}}{s+1}
\end{aligned}$$

al aplicar la transformada de Laplace inversa y sus propiedades se tiene

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2+e^{-s}}{s+1}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s+1}\right\} = 2e^{-t} + e^{-(t-1)}U(t-1)$$

luego la solución es $y(t) = 2e^{-t} + e^{-t+1}U(t-1)$.

Ejemplo 5.24

Resolver el PVI $y'' + y = 4\delta\left(t-2\pi\right)$ sujeto a $y(0) = 1, y'(0) = 0$

Solución:

Aplicamos la Transformada de Laplace y sus propiedades, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{y''+y\right\}(s) = & \ \mathcal{L}\left\{4\delta\left(t-2\pi\right)\right\}(s) \\
\mathcal{L}\left\{y''\right\}(s) + \mathcal{L}\left\{y\right\}(s) = & \ 4\mathcal{L}\left\{\delta\left(t-2\pi\right)\right\}(s) \\
s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = & \ 4e^{-2\pi s}
\end{aligned}$$

luego

$$\left(s^2+1\right)Y(s) - s = 4e^{-2\pi s} \Longrightarrow Y(s) = \frac{s+4e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

aplicando la transformada de Laplace inversa y sus propiedades, se tiene

$$\begin{aligned}
y(t) = & \ \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{s+4e^{-2\pi s}}{s^2+1}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{s}{s^2+1}\right\}(t) + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}\right\}(t) \\
= & \ cos(t) + 4sen(t-2\pi)U(t-2\pi).
\end{aligned}$$

5.4. Ejercicios Resueltos

1. Resover el PVI $y' + 2y = t^3\delta\left(t-2\right) - U\left(t-7\right)$ sujeto a $y\left(0\right) = 1$.
   Solución:
   Aplicando la transformada de Laplace y sus propiedades obtenemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{y'+2y\right\} &= \mathcal{L}\left\{t^3\delta(t-2)-U(t-7)\right\}\\
\mathcal{L}\left\{y'\right\}+2\mathcal{L}\left\{y\right\} &= \underbrace{\mathcal{L}\left\{t^3\delta(t-2)\right\}}_{\mathcal{L}\{t^nf(t)\}=(-1)^n\frac{d^nF(s)}{d^ns}} -\mathcal{L}\left\{U(t-7)\right\}\\
sY(s)-y(0)+2Y(s) &= -\frac{\partial^3(e^{-2s})}{\partial^3 s}-\frac{e^{-7s}}{s}\\
(s+2)Y(s)-1 &= +8e^{-2s}-\frac{e^{-7s}}{s}\\
Y(s) &= \frac{1}{s+2}+8\frac{e^{-2s}}{s+2}-\frac{e^{-7s}}{s(s+2)}
\end{aligned}
$$

luego

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}+8\frac{e^{-2s}}{s+2}-\frac{e^{-7s}}{s(s+2)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+8\cdot\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s+2}\right\}}_{\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=f(t-a)U(t-a)}-\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-7s}}{s(s+2)}\right\}}_{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}=(f*g)(t)}$$

Por lo tanto, $y(t)=e^{-2t}+8e^{-2(t-2)}U(t-2)-e^{-2t}*U(t-7)$.

2. Resolver el PVI $y''+3y'+2y=2U(t-1)+e^t\delta(t-2)$ sujeto a $y(0)=y'(0)=0$.

Solución:

Al aplicar la transformada de Laplace y sus propiedades a la EDO se tiene:

$$\mathcal{L}\left\{y''+3y'+2y\right\}(s)=\mathcal{L}\left\{2U(t-1)+e^t\delta(t-2)\right\}(s)$$

luego

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{y''\right\}(s)+3\mathcal{L}\left\{y'\right\}(s)+2\mathcal{L}\left\{y\right\}(s) &= 2\mathcal{L}\left\{U(t-1)\right\}(s)+\mathcal{L}\left\{e^t\underbrace{\delta(t-2)}_{f(t)}\right\}(s\\
\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+3\left(sY(s)-y(0)\right)+2Y(s) &= 2\frac{e^{-s}}{s}+\underbrace{e^{-2(s-1)}}_{F(s-1)}\\
s^2Y(s)+3sY(s)+2Y(s) &= 2\frac{e^{-s}}{s}+\underbrace{e^{-2(s-1)}}_{F(s-1)}\\
s^2Y(s)+3sY(s)+2Y(s) &= 2\frac{e^{-s}}{s}+\underbrace{e^{-2(s-1)}}_{F(s-1)}\\
\left(s^2+3s+2\right)Y(s) &= 2\frac{e^{-s}}{s}+e^{-2s+2}\\
Y(s) &= \frac{2e^{-s}}{(s+1)(s+2)s}+\frac{e^2e^{-2s}}{(s+1)(s+2)}
\end{aligned}
$$

aplicando la transformada de Laplace inversa y sus propiedades, se tiene

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2e^{-s}}{(s+1)(s+2)s}+\frac{e^2e^{-2s}}{(s+1)(s+2)}\right\}=2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s+1)(s+2)s}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^2e^{-2s}}{(s+1)(s+2)}\right.$$

considerando sus fracciones parciales

- $\frac{1}{(s+1)(s+2)s}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s}\Longrightarrow C=1/2,\ A=-1\,,B=1/2$
- $\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{D}{s+1}+\frac{E}{s+2}\Longrightarrow D=1,E=-1$

Así, se cumple que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s+1)(s+2)s}\right\} &= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s+1}\right\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s+2}\right\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s}\right\}\\
&= -e^{-(t-1)}U(t-1)+\frac{1}{2}e^{-2(t-1)}U(t-1)+\frac{1}{2}U(t-1)\\
&= e^2\left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s+1}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s+2}\right\}\right]\\
&= e^2\left[e^{-(t-1)}U(t-2)-e^{-2(t-1)}U(t-2)\right].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$y(t) = \left(-2e^{-(t-1)} + e^{-2(t-1)} + 1\right)U(t-1) + \left(\left(e^{3-t}\right) - e^{4-2t}\right)U(t-2).$$

3. Resuelva la EDO $y^{(4)} + y'' = f(t)$ sujeto a $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

donde $f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < -2 \\ 1 & si \quad -2 < t < 2 \\ 0 & si \quad t > 2 \end{cases}$

Solución:

Observemos que $f(t) = U(t+2) - U(t-2)$ luego aplicamos la trasformada de Laplace a la EDO

$$\mathcal{L}\left\{y^{(4)} + y''\right\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

consecuentemente

$$\begin{aligned}&\left[s^4Y(s) - s^3y'''(0) - s^2y''(0) - sy'(0) - y(0)\right] + \\ &+ \left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] = \mathcal{L}\{U(t+2) - U(t-2)\}\end{aligned}$$

reemplazando los valores de las condiciones iniciales obtenemos

$$\begin{aligned}\left(s^4 + s^2\right)Y(s) = \mathcal{L}\{U(t+2)\} - \mathcal{L}\{U(t-2)\} = &\ \tfrac{1}{s} - \tfrac{e^{-2s}}{s} \\ Y(s) = &\ \tfrac{1}{s^3(s^2+1)} - \tfrac{e^{-2s}}{s^3(s^2+1)}\end{aligned}$$

Al aplicar la transformada de Laplace inversa y sus propiedades, se tiene

$$\begin{aligned}y(t) = &\ \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s^3}.\tfrac{1}{(s^2+1)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s^3}.\tfrac{e^{-2s}}{(s^2+1)}\right\} \\ = &\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{\tfrac{t^2}{2}\right\}\mathcal{L}\{sen(t+2)U(t+2)\}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{\tfrac{t^2}{2}\right\}.\mathcal{L}\{sen(t-2)U(t-2)\}\right\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$y(t) = \left(\frac{t^2}{2}\right) * (sen(t+2)U(t+2)) - \left(\frac{t^2}{2}\right) * (sen(t-2)U(t-2))$$

4. Resolver la EDO $y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t}$.

Solución:

Aplicamos la transformada de Laplace

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y'\} + 6\mathcal{L}\{y\} = &\ \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\left\{e^{-t}\right\} \\ s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = &\ \tfrac{1}{s} + \tfrac{1}{s+1} \\ \left(s^2 + 4s + 6\right)Y(s) = &\ \tfrac{1}{s} + \tfrac{1}{s+1} + (s+4)y(0) + y'(0) \\ Y(s) = &\ \tfrac{\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + (s+4)y(0) + y'(0)}{(s+2)^2+2}\end{aligned}$$

Despejamos $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s}}{(s+2)^2+2} + \frac{\frac{1}{s+1}}{(s+2)^2+2} + \frac{(s+2)y(0)}{(s+2)^2+2} + \frac{2y(0)+y'(0)}{(s+2)^2+2}$$

Aplicando la transformada de Laplace inversa y sus propiedades obtenemos

$$\begin{aligned} y(t) = &\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s}\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{(s+2)^2+2}\right\} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s+1}\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{(s+2)^2+2}\right\} + y(0)\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{(s+2)}{(s+2)^2+2}\right\} + \\ &+ (2y(0)+y'(0))\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{(s+2)^2+2}\right\} \\ y(t) = &\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}(f * g)(t) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}(h * g)(t) + y(0)e^{-2t}cos\left(\sqrt{2}t\right) + (2y(0)+y'(0))\,e^{-2t}sen\left(\sqrt{2}t\right) \end{aligned}$$

donde $f(t) = 1, g(t) = e^{-2t}sen(\sqrt{2}t)$ y $h(t) = e^{-t}$.

5. Determine $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-4)e^{-3s}}{s^2+4s+5}\right\}(t)$.
   Solución:
   Aplicando las propiedades de la transformada inversa de Laplace inversa, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{(s-4)e^{-3s}}{s^2+4s+5}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{(s+2)e^{-3s}}{(s+2)^2+1}\right\} - 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{e^{-3s}}{(s+2)^2+1}\right\} \\ &= e^{-2(t-3)}cos(t-3)U(t-3) - 6e^{-2(t-3)}sen(t-3)U(t-3) \\ &= (cos(t-3) - 6sen(t-3))\,e^{-2t+6}U(t-3) \end{aligned}$$

6. Resolver $y^{(4)} - y = U(t-1)$ sujeto a $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,\ y^{(3)}(0) = 1$
   Solución:
   Aplicamos la transformada de Laplace a la EDO

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{y^{(4)}\right\}(s) - \mathcal{L}\left\{y\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{U(t-1)\right\}(s) \\ s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y^{(3)}(0) - Y(s) &= \tfrac{e^{-s}}{s} \\ \left(s^4-1\right)Y(s) &= \tfrac{e^{-s}}{s} + 1 \\ Y(s) &= \tfrac{1}{(s^2+1)(s-1)(s+1)}\left(\tfrac{e^{-s}}{s} + 1\right) \end{aligned}$$

al aplicar la transformada de Laplace inversa, se tiene

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s-1)(s+1)s}.e^{-s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s-1)(s+1)}\right\}$$

Además notemos que

- $\frac{1}{(s^2+1)(s-1)(s+1)s} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s+1} + \frac{E}{s}$ de donde se obtiene:

$$A = 1/2,\ B = 0, C = 1/4,\ D = 1/4, E = 1$$

- $\frac{1}{(s^2+1)(s-1)(s+1)} = \frac{Fs+G}{s^2+1} + \frac{H}{s-1} + \frac{K}{s+1}$ de donde se obtiene:

$$F = 0, G = -1/2,\ H = 1/4,\ K = -1/4.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{(s^2+1)(s-1)(s+1)s}.e^{-s}\right\} &= \tfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{s}{(s^2+1)}.e^{-s}\right\} + \tfrac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s-1}e^{-s}\right\} + \tfrac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s+1}e^{-s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s}e^{-} \right. \\ &= \tfrac{1}{2}cos(t-1)U(t-1) + \tfrac{1}{4}e^{t-1}U(t-1) + \tfrac{1}{4}e^{-(t-1)}U(t-1) + U(t- \\ &= \left[\tfrac{1}{2}cos(t-1) + \tfrac{1}{4}e^{t-1} + \tfrac{1}{4}e^{-t+1} + 1\right]U(t-1) \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{(s^2+1)(s-1)(s+1)}\right\} &= -\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\tfrac{1}{s^2+1}\right\} + \tfrac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s-1}\right\} - \tfrac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s+1}\right\} \\ &= -\tfrac{1}{2}sen(t) + \tfrac{1}{4}e^{t} - \tfrac{1}{4}e^{-t}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y(t) = \left[\frac{1}{2}cos(t-1) + \frac{1}{4}e^{t-1} + \frac{1}{4}e^{-t+1} + 1\right]U(t-1) + \left(-\frac{1}{2}sen(t) + \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-t}\right).$$

7. Resolver el PVI $y'' + y = sen(t)\,U(t-\pi)$ sujeto a $y(0) = y'(0) = 0$.
Solución:
Aplicamos la transformada Laplace a la EDO

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' + y\}(s) &= \mathcal{L}\{sen(t)\,U(t-\pi)\}(s) \\ \mathcal{L}\{y''\}(s) + \mathcal{L}\{y\}(s) &= e^{-\pi s}\mathcal{L}\{sen(t-\pi)\}(s) \\ s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) &= e^{-\pi s}\mathcal{L}\{sen(t)\cos(\pi) - \cos(t)\,sen(\pi)\}(s) \\ \left(s^2+1\right)Y(s) &= -e^{-\pi s}\mathcal{L}\{sen(t)\} = -e^{-\pi s}\left(\tfrac{1}{s^2+1}\right) \end{aligned}$$

luego

$$Y(s) = -\frac{e^{-\pi s}}{\left(s^2+1\right)^2}$$

al aplicar la transformada de Laplace inversa, se tiene

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\tfrac{e^{-\pi s}}{\left(s^2+1\right)^2}\right\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(e^{-\pi s}\cdot\tfrac{1}{s^2+1}\right)\cdot\tfrac{1}{s^2+1}\right\} \\ y(t) &= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\mathcal{L}\{sen(t-\pi)\,U(t-\pi)\}\right]\cdot\left[\mathcal{L}\{sen(t)\}\right]\right\} \\ &= -\left[sen(t-\pi)\,U(t-\pi)\right] * sen(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y(t) = -\left[-sen(t)\,U(t-\pi)\right] * sen(t) = \left[sen(t)\,U(t-\pi)\right] * sen(t)$$

8. Resolver el PVI $y^{(4)} - 11y'' + 18y = f(t)$ sujeto a $f(0) = f'(0) = 0; f''(0) = 1; f'''(0) = -2$
Donde $Dom(f) = [0, +\infty[$. Escriba su respuesta en términos del producto de convolución.
Solución:
Aplicamos la transformada de Laplace

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{y^{(4)} - 11y'' + 18y\right\} &= \mathcal{L}\{f(t)\} \\ \mathcal{L}\left\{y^{(4)}\right\} - 11\mathcal{L}\{y''\} + 18\mathcal{L}\{y\} &= F(s) \end{aligned}$$

luego

$$\left(s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)\right) - 11\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 18Y(s) = F(s)$$

aplicando las condiciones iniciales obtenemos

$$\begin{aligned} \left(s^4 - 11s^2 + 18\right)Y(s) - s + 2 &= F(s) \\ \left(s^2 - 9\right)\left(s^2 - 2\right)Y(s) &= F(s) + s - 2 \end{aligned}$$

entonces

$$Y(s) = \frac{F(s)+s-2}{(s-3)(s+3)\left(s-\sqrt{2}\right)\left(s+\sqrt{2}\right)} = F(s).\left[\frac{1}{(s-3)(s+3)\left(s-\sqrt{2}\right)\left(s+\sqrt{2}\right)}\right] + \frac{s-2}{(s-3)(s+3)\left(s-\sqrt{2}\right)\left(s+\sqrt{2}\right)}$$

Además note que

- $\frac{1}{(s-3)(s+3)\left(s-\sqrt{2}\right)\left(s+\sqrt{2}\right)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s-\sqrt{2}} + \frac{D}{s+\sqrt{2}}$ de donde se obtiene

$$A = \tfrac{1}{42}; B = -\tfrac{1}{42}; C = -\tfrac{1}{14\sqrt{2}}; D = \tfrac{1}{14\sqrt{2}}$$

- $\frac{s-2}{(s-3)(s+3)(s-\sqrt{2})(s+\sqrt{2})} = \frac{E}{s-3} + \frac{F}{s+3} + \frac{G}{s-\sqrt{2}} + \frac{H}{s+\sqrt{2}}$ de donde se obtiene

$$E = \tfrac{1}{42}; F = \tfrac{5}{42}; G = \tfrac{\sqrt{2}-1}{14}; H = \tfrac{-1-\sqrt{2}}{14}$$

luego tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)(s+3)(s-\sqrt{2})(s+\sqrt{2})}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{A}{s-3} + \tfrac{B}{s+3} + \tfrac{C}{s-\sqrt{2}} + \tfrac{D}{s+\sqrt{2}}\right\} \\
&= A\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s-3}\right\} + B\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s+3}\right\} + C\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s-\sqrt{2}}\right\} + D\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s+\sqrt{2}}\right\} \\
&= \tfrac{1}{42}e^{3t} - \tfrac{1}{42}e^{-3t} - \tfrac{1}{14\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}t} + \tfrac{1}{14\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}t} =: g(t)\cdots\cdots(\star)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-3)(s+3)(s-\sqrt{2})(s+\sqrt{2})}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{E}{s-3} + \tfrac{F}{s+3} + \tfrac{G}{s-\sqrt{2}} + \tfrac{H}{s+\sqrt{2}}\right\} \\
&= E\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s-3}\right\} + F\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s+3}\right\} + G\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s-\sqrt{2}}\right\} + H\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s+\sqrt{2}}\right\} \\
&= \tfrac{1}{42}e^{3t} + \tfrac{5}{42}e^{-3t} + \tfrac{\sqrt{2}-1}{14}e^{\sqrt{2}t} - \tfrac{\sqrt{2}+1}{14}e^{-\sqrt{2}t}
\end{aligned}$$

al aplicar la transformada de Laplace inversa, se tiene

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s).\left[\frac{1}{(s-3)(s+3)(s-\sqrt{2})(s+\sqrt{2})}\right] + \frac{s-2}{(s-3)(s+3)(s-\sqrt{2})(s+\sqrt{2})}\right\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s).\left[\frac{1}{(s-3)(s+3)(s-\sqrt{2})(s+\sqrt{2})}\right]\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-3)(s+3)(s-\sqrt{2})(s+\sqrt{2})}\right\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s).G(s)\} + \tfrac{1}{42}e^{3t} + \tfrac{5}{42}e^{-3t} + \tfrac{\sqrt{2}-1}{14}e^{\sqrt{2}t} - \tfrac{\sqrt{2}+1}{14}e^{-\sqrt{2}t}$$

$$y(t) = (f * g)(t) + +\frac{1}{42}e^{3t} + \frac{5}{42}e^{-3t} + \frac{\sqrt{2}-1}{14}e^{\sqrt{2}t} - \frac{\sqrt{2}+1}{14}e^{-\sqrt{2}t}$$

donde $g(t)$ es como en $(\star)$.

9. Resolver $t^2y'' + 4ty' + (t^2+2)y = 1$ sujeto a $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$.
Solución:
Aplicamos la transformada de Laplace y sus propiedades a la EDO

$$\mathcal{L}\{t^2y''\} + 4\mathcal{L}\{ty'\} + \mathcal{L}\{(t^2+2)y\} = \frac{1}{s}$$

luego

$$\begin{aligned}
(-1)^2\tfrac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\{y''\} - 4\tfrac{d}{ds}\mathcal{L}\{y'\} + (-1)^2\tfrac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\{y\} + 2\mathcal{L}\{y\} &= \tfrac{1}{s} \\
\tfrac{d^2}{ds^2}\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] - 4\tfrac{d}{ds}\left[sY(s) - y(0)\right] + Y''(s) + 2Y(s) &= \tfrac{1}{s} \\
\tfrac{d}{ds}\left[2sY(s) + s^2Y'(s) - 1\right] - 4\left[Y(s) + sY'(s)\right] + Y''(s) + 2Y(s) &= \tfrac{1}{s} \\
2Y(s) + 2sY'(s) + 2sY'(s) + s^2Y''(s) - 4\left[Y(s) + sY'(s)\right] + Y''(s) + 2Y(s) &= \tfrac{1}{s} \\
(s^2+1)Y''(s) &= \tfrac{1}{s} \\
Y''(s) &= \tfrac{1}{s}.\tfrac{1}{s^2+1}
\end{aligned}$$

dado que

$$Y''(s) = \mathcal{L}\{t^2y(t)\}$$

tenemos

$$\mathcal{L}\{t^2y(t)\} = \frac{1}{s}.\frac{1}{s^2+1} \Longrightarrow t^2y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}.\frac{1}{s^2+1}\right\} = (f * g)(t)$$

donde $f(t)=1$ y $g(t)=sen(t)$. Por lo tanto,

$$y(t)=\frac{(f*g)(t)}{t^2}.$$

10. Resolver $y''-7y'+6y=e^t+\delta(t-2)+\delta(t-4)$ sujeto a $y(0)=y'(0)=0$.
Solución:
Aplicamos la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{y''\}-7\mathcal{L}\{y'\}+6\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{e^t\}+\mathcal{L}\{\delta(t-2)\}+\mathcal{L}\{\delta(t-4)\}$$

luego

$$\begin{aligned} s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-7[sY(s)-y(0)]+6Y(s)=&\ \tfrac{1}{s-1}+e^{-2t}+e^{-4t}\\ \left(s^2-7s+6\right)Y(s)=&\ \tfrac{1}{s-1}+e^{-2t}+e^{-4t}\\ Y(s)=\frac{\frac{1}{s-1}+e^{-2t}+e^{-4t}}{(s^2-7s+6)}=&\ \frac{1}{(s-1)^2(s-6)}+\frac{e^{-2t}}{(s-1)(s-6)}+\frac{e^{-4t}}{(s-1)(s-6)} \end{aligned}$$

al aplicar la transformada de Laplace inversa, se tiene

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2(s-6)}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2t}}{(s-1)(s-6)}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-4t}}{(s-1)(s-6)}\right\}$$

Además note que

- $\frac{1}{(s-1)^2(s-6)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{C}{s-6}$ de donde se obtiene

$$A=-1/25, B=-1/5 \text{ y } C=1/25$$

- $\frac{1}{(s-1)(s-6)}=\frac{D}{s-1}+\frac{E}{s-6}$ de donde se obtiene

$$D=-1/5 \text{ y } E=1/5$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2(s-6)}\right\}=&\ -\tfrac{1}{25}\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s-1}\right\}-\tfrac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{(s-1)^2}\right\}+\tfrac{1}{25}\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s-6}\right\}=-\tfrac{1}{25}e^t-\tfrac{1}{5}e^tt+\tfrac{1}{25}e^{6t}\\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2t}}{(s-1)(s-6)}\right\}=&\ -\tfrac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{e^{-2t}}{(s-1)}\right\}+\tfrac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{e^{-2t}}{(s-6)}\right\}=-\tfrac{1}{5}e^{t-2}U(t-2)+\tfrac{1}{5}e^{6(t-2)}U(t-2)\\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-4t}}{(s-1)(s-6)}\right\}=&\ -\tfrac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{e^{-2t}}{(s-1)}\right\}+\tfrac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{e^{-2t}}{(s-6)}\right\}=-\tfrac{1}{5}e^{t-4}U(t-4)+\tfrac{1}{5}e^{6(t-4)}U(t-4) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y(t)=-\frac{1}{25}e^t-\frac{1}{5}e^tt+\frac{1}{25}e^{6t}-\frac{1}{5}U(t-2)\left[e^{t-2}-e^{6t-12}\right]-\frac{1}{5}U(t-4)\left[e^{t-4}-e^{6t-24}\right].$$

11. Resolver la ecuación $y''+2y=\delta(x-2\pi)$ con $y(0)=1$, $y'(0)=0$.
Solución:
Aplicando la transformada de Laplace y sus propiedades

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''+2y\}=&\ \mathcal{L}\{\delta(x-2\pi)\}\\ \mathcal{L}\{y''\}+2\mathcal{L}\{y\}=&\ \mathcal{L}\{\delta(x-2\pi)\}\\ s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2Y(s)=&\ e^{-2s\pi} \end{aligned}$$

consecuentemente

$$\left(s^2+2\right)Y(s) = e^{-2\pi s} + s \Longrightarrow Y(s) = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+2} + \frac{s}{s^2+2}$$

al aplicar la transformada de Laplace inversa y sus propiedades, se tiene

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+2} + \frac{s}{s^2+2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\}$$

dado que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+2}\right\} = sen\left(\sqrt{2}\,(t-2\pi)\right)U(t-2\pi).$$

pues $\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = f(t-a)\,U(t-a)$ tenemos que la solución del PVI es

$$y(t) = sen\left(\sqrt{2}t - \sqrt{2}2\pi\right)U(t-2\pi) + cos\left(\sqrt{2}t\right)$$

.

12. Resuelva el siguiente problema de valor inicial $y'' + 4y' + 4y = 1 + \delta(t-2)$ sujeto a $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.
Solución:
Aplicamos la transformada de Laplace y sus propiedades,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y'' + 4y' + 4y\} &= \mathcal{L}\{1 + \delta(t-2)\} \\
s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4sY(s) - 4y(0) + 4Y(s) &= \tfrac{1}{s} + e^{-2s} \\
\left(s^2 + 4s + 4\right)Y(s) - 2s - 3 - 8 &= \tfrac{1}{s} + e^{-2s} \\
\left(s^2 + 4s + 4\right)Y(s) &= 2s + 11 + \tfrac{1}{s} + e^{-2s} \\
Y(s) = \frac{2s+11+\frac{1}{s}+e^{-2s}}{(s+2)^2} &= \frac{2s+4}{(s+2)^2} + \frac{7}{(s+2)^2} + \frac{1}{s(s+2)^2} + \frac{e^{-2s}}{(s+2)^2}
\end{aligned}$$

al aplicar la transformada de Laplace inversa y sus propiedades, se tiene

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+4}{(s+2)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{(s+2)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s+2)^2}\right\}$$

Además notemos que

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+4}{(s+2)^2}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = 2e^{-2t}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{(s+2)^2}\right\} = 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} = 7te^{-2t}$ ya que $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$ y

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n$$

- $$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)^2}\right\} &= 1 * te^{-2t} = \int_0^t \tau e^{-2\tau}d\tau = \tau\frac{e^{-2\tau}}{-2}\Big|_0^t - \int_0^t \frac{e^{-2\tau}}{-2}d\tau = -\frac{te^{-2t}}{2} - \frac{e^{-2\tau}}{4}\Big|_0^t = \\ &= -\frac{te^{-2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{4} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s+2)^2}\right\} = U(t-2)\,(t-2)\,e^{-2(t-2)}$ ya que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-cs}F(s)\right\} = U(t-c)f(t-c)$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
y(t) = &\ 2e^{-2t} + 7te^{-2t} + -\frac{te^{-2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{4} + \frac{1}{4} + U(t-2)(t-2)e^{-2(t-2)} \\
y(t) = &\ \frac{7}{4}e^{-2t} + \frac{13t}{2}e^{-2t} + \frac{1}{4} + U(t-2)(t-2)e^{-2t+4}.
\end{aligned}
$$

5.5. Ejercicios Propuestos

1. Halle la transformada de Laplace inversa de:

   a) $F(s) = \frac{1}{s^2+6s+13}$

   b) $G(s) = \frac{6s-4}{s^2-4s+20}$

2. Resolver los PVIs aplicando la trasnformada de Laplace

   a) $y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t}, y(0) = 2, y'(0) = 12$

   b) $y'' - 6y' + 13y = 2e^{3t}cos(2t), y(0) = 1, y'(0) = 1$

   c) $y'' - y = 4e^{t} - 2e^{-t}, y(0) = 1, y'(0) = 4$

   d) $y'' - 2y' = 1, y(0) = 2, y'(0) = 1$

3. Sea $F(s) = \frac{1}{(s+1)^4}$, calcule, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ y $\mathcal{L}^{-1}\left\{F^{(5)}(s)\right\}$ utilizando propiedades de la transformada de Laplace.

4. Halle la transformada de Laplace de la función f definida por $f(t) = \begin{cases} 2 & ,si \quad 0 \le t \le 5 \\ 6 & ,si \quad t > 5 \end{cases}$

5. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales aplicando la transformada de Laplace:

   a) $x'' + 2x' + 5x = 1, x(0) = x'(0) = 0$

   b) $x''' - 2x'' + 3x' - 6x = 4t, x(0) = x'(0) = 0, x''(0) = 1/6$

6. Resolver utilizando transformadas de Laplace, el siguiente problema de valor inicial:

$$
\begin{cases} y'' + y = U(t-1) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}
$$

7. Resolver el problema de valor inicial aplicando la transformada de Laplace:

$$
\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = U(t) - U(t-1) \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}
$$

8. Resolver $y' - y = sent, y(0) = 0$

   Rpta. $y(t) = e^{t} * sen(t)$

9. Resolver $y'' + 3y' - 10y = 4\delta(t-2), y(0) = 2, y'(0) = -3$

   Rpta. $y(t) = \begin{cases} cost & 0 \le t < 2\pi \\ cost + 4sent & t \ge 2\pi \end{cases}$

Capítulo 6

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer orden

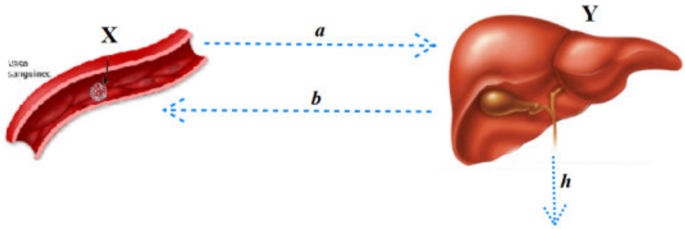
6.1. Introducción

Los modelos matemáticos de problemas del mundo real usualmente son formulados en términos de sistemas de ecuaciones diferenciales. Veamos un ejemplo

Un modelo de Farmacocinética

Una prueba simple para saber sobre el funcionamiento del hígado es inyectar tinta en el fluido sanguíneo(suponer que la tinta y la sangre se mezclan uniformemente) y ver que tan rápido el hígado lo aclara de la sangre y lo excreta en bilis. Si el hígado lo limpia rápido, la función del hígado será normal.

Para entender la dinámica de este proceso, nosotros presentaremos un modelo lineal simple. En el modelo serán considerados dos compartimentos interconectados, primero el compartimento sangre representado por X y luego el compartimento hígado representado por Y. Existe un fluido continuo de un compartimento a otro en diferentes tasas de cambio.
Representaremos gráficamente el movimiento de tinte entre el hígado y el fluido sanguíneo



donde a es la tasa de transferencia de tinta de la sangre (X) al higado (Y) y b es la tasa de transferencia de tinta del hígado (Y) a la sangre (X), también consideremos h como la tasa de aclaramiento del hígado en bilis.
Para construir el modelo definiremos las variables como sigue:

$x(t)$: Concentración de tinta en la sangre en el tiempo t.

$y(t)$: Concentración de tinta en el higado en el tiempo t.

$$\begin{aligned} x'(t) &= by - ax \\ y'(t) &= ax - by - hy \end{aligned}$$

donde $a, b, h > 0$.

En adelante buscaremos modelar, resolver y analizar este tipo de problemas.

Definición Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de primer orden

Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es una expresión de la forma

$$\begin{cases} F_1\left(t, y_1, y_1', y_2, y_2', \cdots, y_n, y_n'\right) = 0 \\ F_2\left(t, y_1, y_1', y_2, y_2', \cdots, y_n, y_n'\right) = 0 \\ \vdots \\ F_m\left(t, y_1, y_1', y_2, y_2', \cdots, y_n, y_n'\right) = 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

donde $y_1, y_2, \cdots, y_n$ son funciones reales a determinar que dependen de la variable t y $F_i : A \subseteq \mathbb{R}^{1+2n} \longrightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, son funciones reales de varias variables.

Se suele suponer que hay igual número de ecuaciones que de incógnitas de manera que todas las ecuaciones son independientes, es decir, ninguna puede seducirse de las demás. Estamos interesados en aquellos sistemas de ecuaciones diferenciales en los que podemos despejar la primera derivada de cada una de las funciones incógnita, es decir, sistemas de la forma

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{cases} \tag{6.2}$$

donde $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, son funciones reales.

Ejemplo 6.1

Si y_1, y_2 son funciones diferenciables en la variable independiente t,

$$\begin{cases} y_1' = ty_1 + y_2^2 \\ y_2' = t + y_1 + y_2 \end{cases}$$

es un sistema de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 6.2

Si y_1, y_2 son funciones diferenciables en la variable independiente t,

$$\begin{cases} y_1' = ty_1 + y_2^2 - y_3 \\ y_2' = t + y_1 + y_2 y_3 \\ y_3' = y_1 y_2 y_3 \end{cases}$$

es un sistema de ecuaciones diferenciales.

Definición

Una solución de un sistema de ecuaciones diferenciales de $n \times n$ de la forma (6.2) es una función vectorial $Y(t) = (y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t))$ tal que

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)) \\ y_2'(t) = f_2(t, y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)) \\ \vdots \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)) \end{cases}$$

para todo $t \in I$ donde I es un intervalo abierto.

En general la resolución de estos sistemas no es posible, salvo en casos excepcionales. Para el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, veremos más adelante que existen algoritmos que permiten el cálculo explícito de las soluciones. Sin embargo, es relativamente sencillo saber cuándo un sistema tiene solución, o más precisamente cuándo un problema de condiciones iniciales asociado tiene solución. Primero claro está, debemos definir qué entendemos por un problema de condiciones iniciales para sistemas de ecuaciones diferenciales como haremos a seguir

6.2. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales con Condiciones Iniciales

Un problema con condiciones iniciales (PVI) para sistemas de ecuaciones diferenciales es un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \\ y_1(t_0) = \bar{y}_1, y_2(t_0) = \bar{y}_2, \cdots, y_n(t_0) = \bar{y}_n \end{cases} \tag{6.3}$$

donde $t_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 6.3

Un problema de valor inicial de un sistema de EDO de 3×3 es:

$$\begin{cases} y_1' = ty_1 + y_2^2 - y_3 \\ y_2' = t + y_1 + y_2y_3 \\ y_3' = y_1y_2y_3 \\ \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1 \end{cases}$$

En el ejemplo anterior note que las condiciones iniciales implican el conocimiento de la función en $t = 0$. Sin embargo el sistema

$$\begin{cases} y_1' = ty_1 + y_2^2 - y_3 \\ y_2' = t + y_1 + y_2y_3 \\ y_3' = y_1y_2y_3 \\ \\ y_1(0) = 2, y_2(1) = 0, y_3(0) = 1 \end{cases}$$

no sería un problema de condiciones iniciales, ya que conocemos el valor de y_2 en $t = 1$ e y_1 e y_3 en $t = 0$ simultáneamente.
Para el caso de los problemas de condiciones iniciales para sistemas de ecuaciones diferenciales tenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.1 Existencia y unicidad

Sean las funciones $f_i : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas, donde I=]a,b[es un intervalo abierto y $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, si las derivadas parciales $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ son funciones continuas, entonces para todo $t_0 \in I$ e $\overline{y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2, \cdots, \overline{y}_n) \in U$, el problema inicial (6.3) tiene solución única en algún intervalo conteniendo a t_0.

☞ **Observación**

Si las funciones f_i solo son continuas lo único que se puede garantizar es la existencia de soluciones.

Este resultado es fácil de aplicar. Por ejemplo el problema que consideramos anteriormente.

$$\begin{cases} y_1' = ty_1 + y_2^2 - y_3 \\ y_2' = t + y_1 + y_2y_3 \\ y_3' = y_1y_2y_3 \\ \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1 \end{cases}$$

es tal que

- $f_1(t, y_1, y_2, y_3) = ty_1 + y_2^2 - y_3,$

- $f_2(t, y_1, y_2, y_3) = t + y_1 + y_2 y_3$
- $f_3(t, y_1, y_2, y_3) = y_1 y_2 y_3$

que son funciones definidas en $\mathbb{R}^4$, continuas y tiene como derivadas parciales respecto a y_i

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} = t & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = 2y_2 & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} = -1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 1 & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = y_3 & \frac{\partial f_2}{\partial y_3} = y_2 \\ \frac{\partial f_3}{\partial y_1} = y_2 y_3 & \frac{\partial f_3}{\partial y_2} = y_1 y_3 & \frac{\partial f_3}{\partial y_3} = y_1 y_2 \end{array}$$

que son también funciones continuas por ser funciones polinómicas en $\mathbb{R}^4$. Así este problema de condiciones iniciales tiene solución única, aunque no tengamos idea de cómo calcularla.

6.3. Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias Lineales de Primer Orden

Un sistema de ecuaciones ordinarias lineales de primer orden se expresa en la forma

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t) y_1 + a_{12}(t) y_2 + \ldots + a_{1n}(t) y_n + b_1(t) \\ y_2' = a_{21}(t) y_1 + a_{22}(t) y_2 + \ldots + a_{2n}(t) y_n + b_2(t) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(t) y_1 + a_{n2}(t) y_2 + \ldots + a_{nn}(t) y_n + b_n(t) \end{cases} \tag{6.4}$$

donde para cada $1 \leq i, j \leq n$, las funciones reales a_{ij}, b_j están definidas sobre un intervalo I.
Notamos que este sistema puede escribirse matricialmente como sigue:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

Si denotamos

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \text{ e } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

el sistema anterior puede reescribirse de forma matricial como

$$Y' = A(t) Y + b(t) \tag{6.5}$$

donde por Y' se entenderá la derivada coordenada a coordenada, es decir, $Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}$.

Ejemplo 6.4

El sistema de EDO lineal:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + t^2 y_2 + y_3 + 1 - t^2 \\ y_2' &= t y_1 - t^2 y_2 + e^{-t} \\ y_3' &= y_1 + (1-t) y_2 + y_3 \end{aligned}$$

se puede reescribir como:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & t^2 & 1 \\ t & -t^2 & 0 \\ 1 & 1-t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-t^2 \\ e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

o

$$Y' = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t^2 & 1 \\ t & -t^2 & 0 \\ 1 & 1-t & 1 \end{bmatrix}}_{A(t)} Y + \underbrace{\begin{bmatrix} 1-t^2 \\ e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}}_{b(t)}.$$

6.3.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de la forma (6.5) será homogénea si

$$b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En caso contrario el sistema se llamará no homogéneo.

Ejemplo 6.5

El sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + t^2 y_2 + y_3 \\ y_2' &= t y_1 - t^2 y_2 \\ y_3' &= y_1 + (1-t) y_2 + y_3 \end{aligned}$$

es homogéneo.

Proposición 6.1

Si la matriz $A = A(t)$ es de orden $n \times n$ y continua en un intervalo abierto I alrededor de t_0, entonces el sistema lineal homogéneo

$$Y' = AY \tag{6.6}$$

tiene exactamente n soluciones linealmente independientes definidas en el intervalo I.

Definición Solución General sistema homogéneo

La solución general del sistema homogéneo $Y' = AY$ es una función vectorial Y_h que puede ser escrito como combinación lineal de n soluciones linealmente independientes de este sistema. Es decir

$$Y_h(t) = c_1 Y^1(t) + c_2 Y^2(t) + \cdots + c_n Y^n(t)$$

donde las c_i son constantes arbitrarias, $\{Y^1, Y^2, \cdots, Y^n\}$ son funciones l.i. tal que $Y^{i\prime} = AY^i$.

Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden lineales homogéneo con coeficientes constantes

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de la forma (6.5) se dirá de coeficientes constantes si la matriz $A(t) = A$ es constante.

Ejemplo 6.6

El sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 - y_2 + 7y_3 \\ y_3' &= -4y_1 + y_2 + y_3 \end{aligned}$$

es de coeficientes constantes pues el sistema dado puede reescribirse de la forma

$$Y' = AY$$

donde $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 7 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Como hemos comentado anteriormente en general no va a ser posible resolver sistemas de ecuaciones diferenciales salvo en ciertos casos particulares como es el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, cuya teoría general estudiaremos a seguir.
Para resolver un sistema lineal homógeneo de primer orden de coeficientes constantes

$$Y' = AY \tag{6.7}$$

donde A es una matriz de orden $n \times n$ con entradas constantes, usaremos el método de los autovalores, es decir encontraremos soluciones de la forma

$$Y = ve^{\lambda t} \tag{6.8}$$

Observemos que si derivamos Y con respecto a t se tiene, $Y' = \lambda ve^{\lambda t}$ como buscamos que Y sea solución de (6.6) tendremos que $A\left(ve^{\lambda t}\right) = \lambda ve^{\lambda t}$ luego $e^{\lambda t}A(v) = e^{\lambda t}\lambda v$ consecuentemente

$$A(v) = \lambda v$$

Esta última expresión indica que λ debe ser un autovalor de la matriz A y v su autovector asociado. Así que, cuando calculemos los autovalores y autovectores de la matriz A, obtendremos soluciones de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, no se debe olvidar que necesitamos obtener n soluciones linealmente independientes para obtener la solución general. Luego con el objetivo de encontrar las n soluciones consideraremos las dos situaciones siguientes:

a) La matriz A de orden $n \times n$ tiene n autovectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ linealmente independientes, asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ respectivamente (los n autovalores no necesariamente son distintos).

b) La matriz A de orden $n \times n$ tiene menos de n autovectores linealmente independientes.

☞ **Observación**

Para los sistemas lineales homogéneos con coeficientes variables, no se cuenta con un método general para determinar las n soluciones l.i.

☞ **Observación**

Los cálculos para determinar los autovalores y autovectores de una matriz se encuentran desarrollados en el apédndice B.

A seguir detallaremos cada caso

Caso a)

En esta situación contamos con n autovectores linealmente independientes para la matriz A del sistema lineal $Y' = AY$, estos autovectores generaran

$$Y^1 = e^{\lambda_1 t}v_1, Y^2 = e^{\lambda_2 t}v_2, \cdots, Y^n = e^{\lambda_n t}v_n$$

que son n soluciones linealmente independientes del sistema lineal. Por lo tanto, la solución general del sistema se puede expresar en la forma

$$Y(t) = C_1Y^1 + C_2Y^2 + \cdots + C_nY^n$$

donde $C_1, C_2, \cdots, C_n \in \mathbb{R}$.

Un caso particular en el que podemos asegurar que la matriz A contará con n autovectores linealmente independientes se produce cuando los n autovalores de la matriz A son distintos.

Observación

El conjunto $\{Y^1, Y^2, \cdots, Y^n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema

$$Y' = AY.$$

Ejemplo 6.7

Resolver el sistema $\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 \\ y_2' = y_1 + 5y_2 \end{cases}$

Solución:

Este sistema se puede escribir de la forma $Y' = AY$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de esta matriz son $\lambda = 2, \lambda = 4$ y $v_1 = (-3, 1)$ es un autovector asociado a $\lambda = 2$ y $v_2 = (-1, 1)$ es autovector asociado a $\lambda = 4$ (ver cálculos en Apéndice B), luego dos soluciones l.i. del sistema son

$$Y^1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} \quad \text{e} \quad Y^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t},$$

así, la solución general del sistema es

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$$

donde C_1 y C_2 son constante arbitrarias.

Ejemplo 6.8

Resolver el sistema $\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 + 7y_3 \\ y_2' = -y_1 - y_2 + y_3 \\ y_3' = -y_1 + y_2 - 3y_3 \end{cases}$

Solución:

Este sistema se puede escribir de la forma $Y' = AY$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de esta matriz son $\lambda = 0, \lambda = -1$, $\lambda = -2$ y $v_1 = (-1, 2, 1)$ es un autovector asociado a $\lambda = 0$; $v_2 = (1, 3, 1)$ es autovector asociado a $\lambda = -1$ y $v_3 = (1, 1, 0)$ es autovector asociado a $\lambda = -2$ (ver cálculos en Apéndice B) . Entonces tres soluciones l.i. del sistema son

$$Y^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{0t} \quad , \quad Y^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \quad \text{e} \quad Y^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

luego la solución general del sistema es

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

donde C_1, C_2 y C_3 son constante arbitrarias.

Ejemplo 6.9

Resuelver el sistema $X' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} X.$

Solución:
Los autovalores de esta matriz son $\lambda = -1$(de multiplicidad 2) y $\lambda = 5$. Al encontrar el autovector asociado a $\lambda = -1$ se obtienen dos autovectores l.i. que son $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ por otro lado el autovector asociado al autovalor $\lambda = 5$ es $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ver cálculos en Apéndice B). Entonces tres soluciones l.i. del sistema son

$$X^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \quad , \quad X^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \quad \text{e} \quad X^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t}$$

luego la solución general del sistema es

$$X(t) = c_1 X^1 + c_2 X^2 + c_3 X^3 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

donde C_1, C_2 y C_3 son constantes arbitrarias.

Autovalores Complejos

Debe observarse que cuando algún autovalor λ de la matriz A es compleja (no real), los autovectores v asociados son también complejos. Si $\lambda = \alpha + i\beta$ es autovalor complejo de la matriz A con autovector asociado $v = u + iw$, entonces la solución del sistema tendrá la siguiente forma

$$\begin{aligned} Y(t) = {} & e^{\lambda t} v = e^{(\alpha + i\beta)t} (u + iw) = e^{\alpha t} (cos(\beta t) + isen(\beta t))(u + iw) \\ = {} & e^{\alpha t} (ucos(\beta t) - wsen(\beta t)) + ie^{\alpha t} (wcos(\beta t) + usen(\beta t)) \end{aligned}$$

por lo que tendríamos una solución compleja (no real). Dado que interesa expresar las soluciones en el campo real, bastará saber que las parte real e imaginaria de la solución compleja obtenida también son soluciones del sistema homogéneo dado, es decir

$$Y^1(t) = e^{\alpha t} (ucos(\beta t) - wsen(\beta t))$$

y

$$Y^2(t) = e^{\alpha t} (wcos(\beta t) + usen(\beta t)),$$

serán dos soluciones reales linealmente independientes del sistema

$$Y' = AY.$$

Ejemplo 6.10

Resolver el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

Solución:

Este sistema se puede escribir de la forma $Y' = AY$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

para resolver este sistema encontraremos los autovalores de la matriz A resolviendo la respectiva ecuación característica $det(A - \lambda I) = 0$, entonces

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm i$$

luego calculamos los autovectores $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$

- Si $\lambda = i \Longrightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$
- Si $\lambda = -i \Longrightarrow \overline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

Luego dos soluciones reales l.i. del sistema son

$$Y^1(t) = e^{0t}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} cos(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} sen(t)\right)$$

y

$$Y^2(t) = e^{0t}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} cos(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} sen(t)\right)$$

Entonces la solución general es

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} cos(t) \\ -sen(t) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} sen(t) \\ cos(t) \end{bmatrix}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Caso $b)$

Esta situación se presenta cuando la matriz A tiene algún autovalor repetido cuya multiplicidad algebraica no coincide con su multiplicidad geométrica. En este caso, los k autovectores linealmente independientes determinarán k soluciones linealmente independientes, pero aún nos faltan otras $n-k$ soluciones. Para determinar las $n-k$ soluciones que formen con las anteriores un sistema fundamental de soluciones tendremos en cuenta el siguiente resultado:

Si λ es un autovalor de multiplicidad algebraica m y multiplicidad geométrica 1 siendo un autovector asociado v^1, entonces, existirán m soluciones linealmente independientes generados como sigue:

$$Y^1(t) = e^{\lambda t} v^1$$

$$Y^2(t) = te^{\lambda t} v^1 + e^{\lambda t} v^2$$

donde v^2 es un vector que verifica que

$$(A - \lambda I)\, v^2 \neq 0 \qquad \text{y} \qquad (A - \lambda I)^2\, v^2 = 0.$$

$$Y^3(t) = \frac{t^2}{2}e^{\lambda t}v^1 + te^{\lambda t}v^2 + e^{\lambda t}v^3$$

donde v^3 es un vector que verifica que

$$(A-\lambda I)^2 v^3 \neq 0 \qquad \text{y} \qquad (A-\lambda I)^3 v^3 = 0$$
$$\vdots$$
$$Y^m(t) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t}v^1 + \cdots + te^{\lambda t}v^{m-1} + e^{\lambda t}v^m$$

donde v^m es un vector que verifica que $(A-\lambda I)^{m-1} v^m \neq 0 \quad$ y $\quad (A-\lambda I)^m v^m = 0$.

Los vectores $v^2, \cdots, v^m$ se denominan autovectores generalizados asociados al autovalor λ. Se puede comprobar que efectivamente

$$Y^1(t), \qquad Y^2(t), \ldots, \qquad Y^m(t)$$

son soluciones l.i. del sistema homogéneo $Y' = A \cdot Y$.

Ejemplo 6.11

Resolver el sistema: $Y' = AY$ si $A = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Solución:

Para resolver este sistema se necesita encontar los autovalores de la matriz A, entonces se resolverá la ecuación característica $det(A-\lambda I) = 0$, entonces

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -8 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (6-\lambda)(-2-\lambda)+16 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$$

Notese que el autovalor $\lambda = 2$ tiene multiplicidad algebraica 2, luego los autovectores $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$ dan como resultado el autovector $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ver cálculos en Apéndice B), entonces una solución del sistema estará dada por

$$Y^1(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

por otro lado notemos que no es posible encontrar otro autovector asociado al autovalor $\lambda = 2$ que sea linealmente independiente con el autovector v, entonces para encontrar otra solución del sistema que sea l.i. con la solución Y^1 tenemos que buscar un vector generalizado $w \neq 0$,entonces w debe ser tal que

$$(A-2I)w = v$$

luego $\begin{bmatrix} 6-2 & -8 \\ 2 & -2-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ que es equivalente a resolver

$$\begin{cases} 4w_1 - 8w_2 = 2 \\ \\ 2w_1 - 4w_2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \quad 2w_1 = 4w_2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad w = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

así la otra solución l.i. es $Y^2 = te^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ luego la solución general está dada por

$$Y(t) = C_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{2t} + C_2\left(te^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Ejemplo 6.12

Resolver el sistema $Y' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} Y.$

Solución:
Al resolver, la ecuación característica

$$det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 6 \\ 0 & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (2-\lambda)^3 = 0$$

se tiene un sólo autovalor $\lambda = 2$ de multiplicidad algebraica 3. Luego al calcular los autovectores v correspondientes

$$Av = 2v \Longleftrightarrow (A-2I)\,v = 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se obtiene $v_2 + 6v_3 = 0$ y $5v_3 = 0 \Longrightarrow v_2 = v_3 = 0$. Luego si consideramos $v_1 = 1$ entonces $v^1 = v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Así encontramos una solución del sistema

$$Y^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}$$

luego necesitamos encontrar dos vectores generalizados, l.i. con v^1. Uno de estos vectores debe cumplir la ecuación

$$(A-2I)\,v^2 = v^1$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} b + 6c = 1 \\ 5c = 0 \end{cases}$$

de donde $c = 0$ y $b = 1$ luego si se considera $a = 0,$entonces $v^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Así encontramos otra solución l.i. $Y^2 = tv^1e^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}$ para encontrar la tercera solución X_3 l.i. calcularemos v^3 tal que $(A-2I)\,v^3 = v^2$, es decir

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} b + 6c = 0 \\ 5c = 1 \end{cases}$$

de donde $c = \frac{1}{5}$ y $b = -\frac{6}{5}$ luego si se considera $a = 0,$entonces $v^3 = (a, b, c) = \left(0, -\frac{6}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Así $Y^3 = \frac{t^2}{2} v^1 e^{2t} + tv^2 e^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} e^{2t}$. Por lo tanto la solución general del sistema es

$$Y = c_1Y^1 + c_2Y^2 + c_3Y^3$$

equivalentemente

$$Y(t)=c_1e^{2t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2e^{2t}\left(t\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)+c_3e^{2t}\left(\frac{t^2}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-\frac{6}{5}\\\frac{1}{5}\end{bmatrix}\right).$$

donde C_1, C_2 y C_3 son constantes arbitrarias.

Definición Matriz Fundamental

Una matriz fundamental $M(t)$ asociado al sistema lineal $Y' = AY$ (de orden $n \times n$) es una matriz de orden $n \times n$ tal que cada una de sus columnas son soluciones linealmente independientes del sistema dado, es decir

$$M(t)=\begin{bmatrix} Y^1 & Y^2 & \cdots & Y^n \end{bmatrix}$$

donde $Y^1, Y^2, \ldots, Y^n$ son n soluciones linealmente independientes del sistema .

Observación

Como Y^i es una solución, se tiene $\left[Y^i\right]' = A(t)Y^i$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} Y^1 & Y^2 & \cdots & Y^n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} A(t)Y^1 & A(t)Y^2 & \cdots & A(t)Y^n \end{bmatrix} = A(t)\begin{bmatrix} Y^1 & Y^2 & \cdots & Y^n \end{bmatrix}$$

luego

$$M(t)' = A(t)M(t).$$

6.4. Ecuaciones lineales de orden n y sistemas de ecuaciones equivalentes

Los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden también pueden resultar útiles en el estudio de ecuaciones diferenciales de orden superior. Debido a que si una función x es una solución de la ecuación diferencial de orden n

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}) \tag{6.9}$$

y se pueden hacer los cambios de variable

$$y_1 = x, y_2 = x', \cdots, y_n = x^{(n-1)}$$

entonces $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ es una solución del sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_3 \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{cases} \tag{6.10}$$

Recíprocamente, si $(y_1, \cdots, y_n)$ es una solución del sistema (6.10) entonces y_1 es una solución de la edo de orden n (6.9) . En este sentido podemos considerar que las ecuaciones(6.9) y (6.10) son equivalentes. Obsérvese que si la ecuación diferencial de orden n es lineal entonces el sistema de ecuación diferencial correspondiente será lineal.

Ejemplo 6.13

Escriba la EDO $x'' + 6x' + 9x = tanx$ como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.
Solución:
Si hacemos $y_1 = x$, $y_2 = x'$, entonces

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = -6y_2 - 9y_1 + tany_1$$

Notemos también que en el caso de sistemas lineales de dos variables de coeficientes constantes, es posible resolverlos a través de una ecuación ordinaria de orden 2.

Ejemplo 6.14

Resolver el sistema $\begin{cases} x' = 3x - 18y \\ y' = 2x - 9y \end{cases}$

Solución:
Si derivamos la primera ecuación obtenemos $x'' = 3x' - 18y' \cdots\cdots\cdots (*)$
luego sustituyendo $y' = 2x - 9y$ en (*) se tiene

$$x'' = 3x' - 18(2x - 9y) = 3x' - 36x + 162y = 3x' - 36x + 162\left(\frac{3x - x'}{18}\right)$$

Es decir, $x'' = -6x' - 9x$ que es equivalente a $x'' + 6x' + 9x = 0$, luego su solución general es $x = c_1e^{-3t} + c_2te^{-3t}$, como

$$\begin{aligned} y = & \frac{3x - x'}{18} = \frac{3\left(c_1e^{-3t} + c_2te^{-3t}\right) - \left(-3c_1e^{-3t} + c_2e^{-3t} - 3c_2te^{-3t}\right)}{18} = \\ = & \frac{(6c_1 - c_2)e^{-3t} + 6c_2te^{-3t}}{18} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \frac{6c_1 - c_2}{18} \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} c_2 \\ \frac{c_2}{3} \end{bmatrix} te^{-3t}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{18} \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}\right) te^{-3t}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

6.5. Sistemas lineales de primer orden no homogéneos

Pretendemos ahora resolver un sistema diferencial lineal no homogéneo de la forma

$$Y' = A(t)Y + B(t) \tag{6.11}$$

para ello consideramos el siguiente teorema que nos da información acerca de sus soluciones.

Teorema 6.2

Dado el sistema lineal de ecuaciones diferenciales no homogéneo

$$Y' = A(t)Y + B(t)$$

siendo $A(t)$ y $B(t)$ matrices cuyas entradas son funciones continuas en el intervalo I, y $t_0 \in I$, se verifican las siguientes propiedades:

1. *Si $X(t)$ e $Y(t)$ son dos soluciones tales que $X(t_0) \neq Y(t_0)$, entonces $X(t) \neq Y(t)$ para todo $t \in I$.*
2. *Si $Y_p(t)$ es una solución del sistema no homogéneo y $Y_g(t)$ es la solución general del sistema*

homogéneo asociado $Y' = A(t)Y$, entonces todas las soluciones $Y(t)$ del sistema no homogéneo se pueden expresar en la forma

$$Y(t) = Y_g(t) + Y_p(t)$$

esta expresión constituye la solución general del sistema no homogéneo.

De acuerdo al último resultado de este teorema, cuando se quiera resolver el sistema no homogéneo

$$Y' = A(t) \cdot Y + B(t),$$

bastará encontrar la solución general $Y_g(t)$ del sistema homogéneo $Y' = A(t) \cdot Y$ y una solución particular $Y_p(t)$ del sistema completo. Ya hemos desarrollado un método para obtener la solución general $Y_g(t)$ del sistema homogéneo cuando los coeficientes son constantes. Ahora, nos dedicaremos a desarrollar métodos para encontrar una solución particular del sistema completo tales como el método de variación de parámetros y coeficientes indeterminados, en el caso que se tiene resuelto el sistema lineal homogéneo asociado.

6.5.1. Método de variación de parámetros

Supongamos que $Y^1(t)$, $Y^2(t)$, $\cdots$, $Y^n(t)$ son n soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo $Y' = A(t)Y$ y que por tanto su solución general $Y_g(t)$ puede expresarse de la forma

$$Y_g(t) = C_1 Y^1(t) + C_2 Y^2(t) + \cdots + C_n Y^n(t)$$

donde $C_1, C_2, \cdots C_n \in \mathbb{R}$. Observamos que también se puede reescribir Y_g de formal matricial como sigue

$$Y_g(t) = \begin{bmatrix} Y^1(t) & Y^2(t) & \cdots & Y^n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = M(t).C$$

Notemos que $M(t)$ es una matriz en general no constante que depende de las soluciones l.i. del sistema homogéneo asociado, es decir es una matriz fundamental y C es una matriz columna de componentes constantes. El método de variación de parámetros sugiere que una solución particular del sistema no homogéneo podrá ser encontrado suponiendo que tiene la forma

$$Y_p(t) = M(t) \cdot K(t)$$

donde $K(t)$ es una matriz columna por encontrar, en general no constante que depende de la variable independiente t. Para encontrar esta matriz $K(t)$ observemos que $Y_p(t)$ debe satisfacer la siguiente igualdad

$$Y_p'(t) = A(t)Y_p(t) + B(t)$$

ya que $Y_p(t)$ es una solución del sistema no homogéneo. Así tenemos que

$$\begin{aligned} [M(t) \cdot K(t)]' &= A(t)[M(t) \cdot K(t)] + B(t) \\ M'(t)K(t) + M(t)K'(t) &= A(t)M(t)K(t) + B(t) \\ M(t)K'(t) = A(t)M(t)K(t) - M'(t)K(t) + B(t) &= [A(t)M(t) - M'(t)]K(t) + B(t) = B(t) \end{aligned}$$

entonces

$$K'(t) = [M(t)]^{-1} B(t)$$

luego

$$K(t) = \int [M(t)]^{-1} B(t)\, dt$$

Por lo tanto, una solución particular del sistema completo es

$$Y_p(t) = M(t) \cdot \int [M(t)]^{-1} B(t)\, dt$$

Así que la solución del sistema no homogéneo se puede expresar en la forma

$$Y(t) = M(t) \cdot C + M(t) \cdot \int [M(t)]^{-1} B(t)\, dt$$

Ejemplo 6.15

Resolver el sistema no homogéneo

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 - e^{-4t} \\ y_2' = 2y_1 + y_2 + e^t(1 + 4e^{-3t}) \end{cases}$$

Solución: Podemos reescribir este sistema matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e^{-4t} \\ e^t(1 + 4e^{-3t}) \end{bmatrix}$$

donde $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ el sistema homogéneo asociado es

$$Y' = AY$$

para encontrar sus soluciones l.i. del sistema homogéneo debemos de resolver la ecuación característica

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

luego $(1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Longrightarrow (-1-\lambda)(3-\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$ y $\lambda = 3$

- $\lambda = -1$ tiene por autovector asociado $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\lambda = 3$ tiene por autovector asociado $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Así, $Y^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$ y $Y^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$ son soluciones l.i. del sistema homogéneo, luego

$$M(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} & e^{3t} \\ e^{-t} & e^{3t} \end{bmatrix}$$

es una matriz fundamental y su determinante es

$$det(M(t)) = -e^{2t} - e^{2t} = -2e^{2t}$$

para encontrar una solución particular Y_p del sistema no homogéneo usando el método de variación de parámetros debemos calcular

$$Y_p = M(t) \int [M(t)]^{-1} B(t) dt$$

Es decir,

$$
\begin{aligned}
Y_p &= \begin{bmatrix} -e^{-t} & e^{3t} \\ e^{-t} & e^{3t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} -e^{-t} & e^{3t} \\ e^{-t} & e^{3t} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -e^{-4t} \\ e^{t}\left(1+4e^{-3t}\right) \end{bmatrix} dt \\
&= \begin{bmatrix} -e^{-t} & e^{3t} \\ e^{-t} & e^{3t} \end{bmatrix} \int \frac{1}{-2e^{2t}} \begin{bmatrix} e^{3t} & -e^{3t} \\ -e^{-t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{-4t} \\ e^{t}+4e^{-2t} \end{bmatrix} dt \\
&= \begin{bmatrix} -e^{-t} & e^{3t} \\ e^{-t} & e^{3t} \end{bmatrix} \int \frac{1}{-2e^{2t}} \begin{bmatrix} -e^{-t} & - & e^{4t}-4e^{t} \\ e^{-5t} & - & 1-4e^{-3t} \end{bmatrix} dt \\
&= -\tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} -e^{-t} & e^{3t} \\ e^{-t} & e^{3t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} -e^{-3t} & - & e^{2t}-4e^{-t} \\ e^{-7t} & - & e^{-2t}-4e^{-5t} \end{bmatrix} dt \\
&= -\tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} -e^{-t} & e^{3t} \\ e^{-t} & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{e^{-3t}}{3} & - & \frac{e^{2t}}{2}+4e^{-t} \\ \frac{e^{-7t}}{-7} & + & \frac{e^{-2t}}{2}+\frac{4}{5}e^{-5t} \end{bmatrix} \\
&= -\tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{e^{-4t}}{3}+\frac{e^{t}}{2}-4e^{-2t}-\frac{e^{-4t}}{7}+\frac{e^{t}}{2}+\frac{4e^{-2t}}{5} \\ \frac{e^{-4t}}{3}-\frac{e^{t}}{2}+4e^{-2t}-\frac{e^{-4t}}{7}+\frac{e^{t}}{2}+\frac{4e^{-2t}}{5} \end{bmatrix} = -\tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{10e^{-4t}}{21}+e^{t}-\frac{16e^{-2t}}{5} \\ \frac{4e^{-4t}}{21}+\frac{24e^{-2t}}{5} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la solución general del sistema no homogéneo dado es

$$
Y(t) = M(t)C + Y_p = \begin{bmatrix} -e^{-t} & e^{3t} \\ e^{-t} & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{10e^{-4t}}{21}+e^{t}-\frac{16e^{-2t}}{5} \\ \frac{4e^{-4t}}{21}+\frac{24e^{-2t}}{5} \end{bmatrix} \right)
$$

o

$$
Y(t) = \begin{bmatrix} -C_1e^{-t}+C_2e^{3t}+\frac{10e^{-4t}}{42}-\frac{e^{t}}{2}+\frac{16e^{-2t}}{10} \\ C_1e^{-t}+C_2e^{3t}-\frac{4e^{-4t}}{42}-\frac{24e^{-2t}}{10} \end{bmatrix}
$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Ejemplo 6.16

Resuelva el sistema $X' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix}$ sujeto a $X(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Solución: Resolveremos el sistema homogéneo asociado

$$
X' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} X
$$

la ecuación característica de la matriz de coeficientes es

$$
\begin{aligned}
det\,(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(-4-\lambda)-2 \\
&= 12+3\lambda+4\lambda+\lambda^2-2 = \lambda^2+7\lambda+10 = (\lambda+2)(\lambda+5) = 0
\end{aligned}
$$

por lo que los autovalores son $\lambda = -2$ y $\lambda = -5$. Luego necesitamos encontrar los respectivos autovectores

- Si $\lambda = -2$

$$
Av = -2v \Longleftrightarrow (A+2I)\,v = 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} -v_1+v_2=0 \\ 2v_1-2v_2=0 \end{array}
$$

$\Longrightarrow$ si $v_1 = 1 \Rightarrow v_2 = 1$ luego $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Por lo tanto,

$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$ es una solución del sistema homogéneo.

- Si $\lambda = -5$, $Av = -5v \Longleftrightarrow (A+5I)\,v = 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$ $2v_1 + v_2 = 0$

  si $v_1 = -1 \Rightarrow v_2 = 2$ luego $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Por lo tanto, $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-5t}$ es una solución del sistema homogéneo, luego la matriz fundamental es

$$M(t) = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & -e^{-5t} \\ e^{-2t} & 2e^{-5t} \end{bmatrix}$$

y cumple

$$M(t)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 2e^{-5t} & e^{-5t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2t} & -e^{-5t} \\ e^{-2t} & 2e^{-5t} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 2e^{-5t} & e^{-5t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}}{3e^{-7t}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ -\frac{1}{3}e^{5t} & \frac{1}{3}e^{5t} \end{bmatrix}$$

por el método de variación de parámetros podemos obtener una solución particular X_p tal que

$$X_p(t) = M(t)\int M(t)^{-1}B(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & -e^{-5t} \\ e^{-2t} & 2e^{-5t} \end{bmatrix}\int \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ -\frac{1}{3}e^{5t} & \frac{1}{3}e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix} dt$$

luego

$$\begin{aligned} X_p = & \begin{bmatrix} e^{-2t} & -e^{-5t} \\ e^{-2t} & 2e^{-5t} \end{bmatrix}\int \begin{bmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ -te^{5t} + \frac{1}{3}e^{4t} \end{bmatrix} dt \\ = & \begin{bmatrix} e^{-2t} & -e^{-5t} \\ e^{-2t} & 2e^{-5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t}t - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ -\frac{1}{25}\left(e^{5t}\cdot 5t - e^{5t}\right) + \frac{1}{12}e^{4t} \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} t - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{5}t - \frac{1}{25} - \frac{1}{12}e^{-t} \\ t - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{2}{5}t + \frac{2}{25} + \frac{2}{12}e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{3}{12}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema no homogéneo es

$$X = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-5t} + \begin{bmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{3}{12}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}$$

teniendo en cuenta las condiciones iniciales tenemos

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = X(0) = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 - \frac{27}{50} + \frac{3}{12} \\ c_1 + 2c_2 - \frac{21}{50} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

de donde

$$5 = 3c_2 + \frac{6}{50} + \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow 5 - \frac{6}{50} - \frac{1}{4} = 3c_2 \Longrightarrow c_2 = \frac{460}{300} \text{ y } c_1 = -1 + \frac{460}{300} + \frac{27}{50} - \frac{3}{12} = \frac{5}{6}$$

consecuentemente la solución del PVI dado es:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{898}{900}e^{-2t} - \frac{1537}{900}e^{-5t} + \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{e^{-t}}{4} \\ \frac{898}{900}e^{-2t} + \frac{1537}{450}e^{-5t} + \frac{7}{5}t - \frac{29}{50} + \frac{e^{-t}}{6} \end{bmatrix}$$

☞ **Observación**

Notese que el método de variación de parámetros puede ser aplicado para encontrar una solución particular de cualquier sistema diferencial del cual conozcamos una matriz fundamental $M(t)$ del sistema homogéneo asociado, no necesariamente ha de ser éste un sistema con coeficientes constantes (aunque sea éste el único caso en el que tenemos un procedimiento sistemático para la obtención de $M(t)$).

6.5.2. Método de coeficientes indeterminados

Si consideramos un sistema diferencial de coeficientes constantes de la forma

$$Y' = A \cdot Y + B(t)$$

donde el término $B(t)$ posee una estructura determinada (está formado por funciones polinómicas, exponenciales, senos, cosenos o sumas y productos finitos de éstas) podemos, en tal caso recurrir al método de los coeficientes indeterminados para obtener una solución particular del sistema no homogéneo.

Dicho método se basa en la búsqueda de una solución particular $X_p(t)$ que sea del mismo tipo que la función vectorial $B(t)$ (este método ofrece mejores resultados, y es más sistemático, cuando se aplica sobre ecuaciones diferenciales lineales de orden n).

Ejemplo 6.17

Resolver el sistema no homogéneo $Y' = AY + B(t)$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad B(t) = \begin{bmatrix} -9t \\ 0 \\ -18t \end{bmatrix}$$

Solución:

Al resolver la ecuación $det(A - \lambda I) = 0$ se obtienen los autovalores $\lambda = 3(doble)$, $\lambda = -3$

- $\lambda = -3$ tiene por autovector $v = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\lambda = 3$ tiene por autovector $u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Observamos que $B(t) = \begin{bmatrix} -9t \\ 0 \\ -18t \end{bmatrix}$ tiene forma polinomial y tres soluciones l.i. del sistema son

$$Y^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}, \quad Y^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} \quad y \quad Y^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}.$$

Ahora una solución particular Y_p del sistema tendrá la forma polinimial (primer grado) $Y_p = at + b$, donde $a, b \in \mathbb{R}^3$, para calcular los vectores a, b recordemos que $Y_p' = AY_p + B(t)$, entonces

$$\begin{aligned} a = &\quad A(at+b)+B(t) \Longrightarrow a = Aat + Ab + \begin{bmatrix} -9t \\ 0 \\ -18t \end{bmatrix} t \\ a = &\quad \left(Aa + \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -18 \end{bmatrix} \right) t + Ab \Longrightarrow a = Ab \end{aligned}$$

y

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = Aa + \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -18 \end{bmatrix} \Longrightarrow Aa = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix} \Longrightarrow a = A^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

luego

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = Ab \Longrightarrow A^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = b \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = b$$

Así la solución particular esta dada por $Y_p = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto, la solución general del sistema es

$$\begin{aligned} Y(t) = &\quad C_1Y^1 + C_2Y^2 + C_3Y^3 + Y_p \\ = &\quad C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

o

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1e^{-3t} - C_2e^{3t} + C_3e^{3t} + 5t + 1 \\ -C_1e^{-3t} + C_2e^{3t} + 2t \\ C_1e^{-3t} + C_3e^{3t} + 4t + 2 \end{bmatrix}$$

donde C_1, C_2 y C_3 son costantes arbitrarias.

6.5.3. Matriz Exponencial

Definición

Para cualquier matriz cuadrada A de orden $n \times n$, denotamos su matriz exponencial como e^{At}, donde

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + A^k\frac{t^k}{k!} + \cdots$$

Respecto a la matriz exponencial, se cumple:

- $e^{A(0)} = I$
- $e^{At}.e^{-At} = I$
- $\left[e^{At}\right]^{-1} = e^{-At}$

- Si $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ entonces

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Proposición 6.2

Si C es una matriz invertible de orden $n \times n$ y A es una matriz de orden $n \times n$ se cumple que

$$e^{CAC^{-1}} = Ce^AC^{-1}.$$

Definición Derivada de e^{At}

La derivada de la matriz exponencial es similar a la propiedad de derivación de la exponencial escalar $\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$. Es decir,

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$

esta última igualdad se justifica a partir de

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}e^{At} &= \tfrac{d}{dt}\left[I + At + A^2\tfrac{t^2}{2!} + \cdots + A^k\tfrac{t^k}{k!} + \cdots\right] = A + A^2t + \cdots + A^k\tfrac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots \\ &= A\left[I + At + A^2\tfrac{t^2}{2!} + \cdots + A^k\tfrac{t^k}{k!} + \cdots\right] = Ae^{At}. \end{aligned}$$

Luego si C es un vector de valores constantes arbitrarios entonces $X = e^{At}C$ es una solución del sistema homogéneo $X' = AX$, pues se cumple

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}C\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{At}\right)C = \left(Ae^{At}\right)C = A\left(e^{At}C\right).$$

Así los vectores $e^{At}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e^{At}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e^{At}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, e^{At}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ son soluciones del sistema homogéneo y son l.i..

Por otro lado, dado que

$$e^{At} = \left[e^{At}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e^{At}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad e^{At}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad e^{At}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

es una matriz que tiene sus columnas l.i., entonces la matriz e^{At} es una matriz fundamental del sistema

$$X' = AX.$$

Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo se podrá escribir como

$$e^{At}C$$

donde C es un vector de constantes.

Sistema no Homogéneo

Para un sistema no homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, se puede demostrar que la solución general de la ecuación $Y' = AY + B(t)$, es

$$Y = Y_g + Y_p = e^{At}C + e^{At}\int e^{-At}B(t)dt$$

donde A es una matriz de constantes de orden n y Y_p es la solución particular que resulta al aplicar el método de variación de parámetros.

Cálculo de la matriz exponencial e^{At}

La definición de e^{At} siempre se puede usar para calcular e^{At}. Sin embargo, la utilidad práctica de la definición está limitada por el hecho de que los elementos de e^{At} son series de potencias en t. Por fortuna, hay muchas formas alternativas de calcular e^{At}; la siguiente explicación muestra cómo se puede usar la transformada de Laplace para hacer este cálculo.

Dado el PVI

$$\left| \begin{array}{l} X' = AX \\ X(0) = e_i \end{array} \right.$$

donde A es una matriz de constantes de orden n, aplicamos la Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{X'\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{AX\right\}(s)$$

denotamos $x(s) = \mathcal{L}\left\{X\right\}(s)$ entonces

$$\begin{aligned} sx(s) - X(0) = &\ Ax(s) \\ (sI - A)x(s) = &\ X(0) = e_i \end{aligned}$$

luego

$$x(s) = (sI - A)^{-1} e_i$$

Al aplicar la transformada de Laplace inversa se tiene que $X(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1} e_i\right\}$ será la solución del PVI, por otro lado

$$X(t) = e^{At}e_i$$

también es solución del mismo PVI, entonces por el teorema de existencia y unicidad aplicado al PVI ambas soluciones deben ser iguales, es decir

$$e^{At}e_i = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1} e_i\right\}$$

para $i = 1, 2, \cdots, n$, luego

$$\begin{aligned} e^{At} &= \left[\begin{array}{cccc} \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1} e_1\right\} & \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1} e_2\right\} & \cdots & \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1} e_n\right\} \end{array} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\begin{array}{cccc} (sI - A)^{-1} e_1 & (sI - A)^{-1} e_2 & \cdots & (sI - A)^{-1} e_n \end{array} \right] \end{aligned}$$

entonces $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}$.

Ejemplo 6.18

Resolver el sistema $Y' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} Y$

Solución:

Sea $Y(t) = e^{At}C$ solución del sistema EDO donde $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ luego

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -2 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\right\}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix}}{(s-1)(s+2)+2}\right\}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix}}{s^2+s-2+2}\right\}$$

seguidamente

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{s(s+1)} & \dfrac{-1}{s(s+1)} \\ \dfrac{2}{s(s+1)} & \dfrac{s-1}{s(s+1)} \end{bmatrix}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{s} & \dfrac{-1}{s}+\dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{2}{s}-\dfrac{2}{s+1} & -\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{s+1} \end{bmatrix}\right\}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s}\right\} & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s}+\frac{1}{s+1}\right\} \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s}-\frac{2}{s+1}\right\} & \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s}+\frac{2}{s+1}\right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t}+2 & -1+e^{-t} \\ 2-2e^{-t} & -1+2e^{-t} \end{bmatrix}$$

luego la solución del sistema homogéneo será de la forma

$$Y(t) = e^{At}C$$

donde C es una matriz columna de n componentes constantes.

$$Y(t) = \begin{bmatrix} c_1(-e^{-t}+2)+c_2(-1+e^{-t}) \\ c_1(2-2e^{-t})+c_2(-1+2e^{-t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}(-c_1+c_2)+2c_1-c_2 \\ (-2c_1+2c_2)e^{-t}+2c_1-c_2 \end{bmatrix}$$

$$Y(t) = (-c_1+c_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}e^{-t} + (2c_1-c_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Casos Especiales

- En el caso que la matriz A sea una matriz de autovalores diferentes y reales será una matriz diagonalizable, es decir

$$A = PDP^{-1}$$

  donde D es una matriz de diagonal formada por los autovalores de A y las columnas de la matriz P son los respectivos autovectores de la matriz A, luego

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$$

- Si $\sigma, w, x \in \mathbb{R}$ entonces $e^{\begin{bmatrix} \sigma & -w \\ w & \sigma \end{bmatrix}x} = e^{\sigma x}\begin{bmatrix} \cos(wx) & -\mathrm{sen}(wx) \\ \mathrm{sen}(wx) & \cos(wx) \end{bmatrix}$

- Si A es una matriz de orden 2×2 que tiene autovalores complejos $\lambda = \sigma \pm iw$ y autovectores complejos v y $\bar{v}$, se puede escribir

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \sigma & -w \\ w & \sigma \end{bmatrix}$$

  donde $Q = \begin{bmatrix} im(v) & Re(v) \end{bmatrix}$.
  Así se cumple

$$e^{At} = Qe^{\begin{bmatrix} \sigma & -w \\ w & \sigma \end{bmatrix}t}Q^{-1}$$

Ejemplo 6.19

Calcule e^{At} donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, sabiendo que los autovalores de la matriz son $\lambda = 1, 2, 3$ y sus respectivos autovectores son $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$.

Solución:

Dado que A es una matriz con autovalores reales y diferentes, es una matriz diagonalizable, entonces

$$A = PDP^{-1}$$

donde $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{PDtP^{-1}} = Pe^{Dt}P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & -2e^t \\ 3e^{2t} & e^{2t} & -12e^{2t} \\ 0 & 0 & 2e^{3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & -2e^t + 2e^{3t} \\ -3e^t + 3e^{2t} & e^{2t} & 6e^t - 12e^{2t} + 6e^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6.20

Resolver el siguiente sistema homogéneo $Y' = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} Y$, sabiendo que un autovalor de la matriz de coeficientes es es $\lambda = -1 + i$ y su vector asociado es $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 - i \end{bmatrix}$.

Solución:

Como la matriz de coeficientes $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ tiene un autovalor complejo $\lambda = -1 + i$ el otro autovalor será su conjugado $\lambda = -1 - i$, además su autovector asociado $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 - i \end{bmatrix}$ se escribe como $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} i$, luego e^{Bt} es una matriz fundamental del sistema dado e $Y(t) = e^{Bt}C$ es la solución general del sistema.
Calculemos e^{Bt}

$$e^{Bt} = e^{\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} t} = Qe^{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} t} Q^{-1}$$

donde $Q=\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, así tenemos que

$$\begin{aligned} e^{Bt} &= \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} e^{-t} \begin{bmatrix} cos(t) & -sen(t) \\ sen(t) & cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} e^{-t} \begin{bmatrix} cos(t) & -sen(t) \\ sen(t) & cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 & -1 \\ 0,2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

luego, la solución general es

$$\begin{aligned} Y(t) = \quad & e^{Bt}C = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} e^{-t} \begin{bmatrix} cos(t) & -sen(t) \\ sen(t) & cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 & -1 \\ 0,2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ = \quad & e^{-t} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(t) & -sen(t) \\ sen(t) & cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4c_1 - c_2 \\ 0,2c_1 \end{bmatrix} \\ = \quad & e^{-t} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(t)(0,4c_1 - c_2) & -sen(t)(0,2c_1) \\ sen(t)(0,4c_1 - c_2) & +cos(t)(0,2c_1) \end{bmatrix} \\ = \quad & e^{-t} \begin{bmatrix} 2c_1 sen(t) - 5c_2 sen(t) + c_1 cos(t) \\ -cos(t)(0,4c_1 - c_2) + sen(t)(0,2c_1) + 2sen(t)(0,4c_1 - c_2) + 2cos(t)(0,2c_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente tenemos que

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 2c_1 sen(t) - 5c_2 sen(t) + c_1 cos(t) \\ cos(t)(c_2) + sen(t)(c_1 - 2c_2) \end{bmatrix}$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

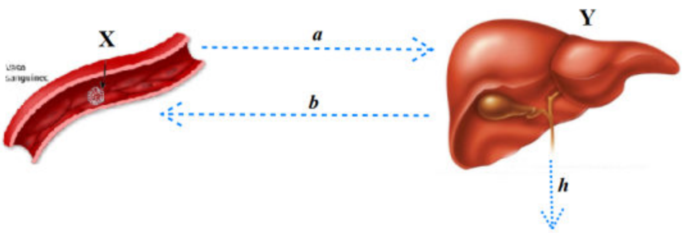
6.5.4. Aplicaciones sistemas Lineales

Un modelo de Farmacocinética

Una prueba simple para saber sobre el funcionamiento del hígado es inyectar tinta en el fluido sanguíneo(suponer que la tinta y la sangre se mezclan uniformemente) y ver que tan rápido el hígado lo aclara de la sangre y lo excreta en bilis. Si el hígado lo limpia rápido, la función del hígado será normal.

Para entender la dinámica de este proceso, nosotros presentaremos un modelo lineal simple. En el modelo serán considerados dos compartimentos interconectados, primero el compartimento sangre representado por X y luego el compartimento hígado representado por Y. Existe un fluido continuo de un compartimento a otro en diferentes tasas de cambio.

Representaremos gráficamente el movimiento de tinte entre el hígado y el fluido sanguíneo



donde a es la tasa de transferencia de tinta de la sangre (X) al higado (Y) y b es la tasa de transferencia de tinta del higado (Y) a la sangre (X), también consideremos h como la tasa de aclaramiento del hígado en bilis.

Para construir el modelo definiremos las variables como sigue:

$x(t)$: Concentración de tinta en la sangre en el tiempo t.
$y(t)$: Concentración de tinta en el higado en el tiempo t.
luego

$$\begin{aligned} x'(t) &= by - ax \\ y'(t) &= ax - by - hy \end{aligned}$$

donde $a, b, h > 0$
este sistema puede ser escrito matricialmente como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -a & b \\ a & -(b+h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Para modelar una sóla inyección de tinta podemos considerar que la concentración inicial de tinte en la sangre es c es decir $x(0) = c$ y en ese caso la concentración de tinta en el hígado seria $y(0) = 0$.

Ahora averiguaremos que pasa con $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ en el futuro. Para esto calcularemos los autovalores λ de la matriz $M = \begin{bmatrix} -a & b \\ a & -(b+h) \end{bmatrix}$ para esto resolveremos la ecuación característica $det(M - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} -a-\lambda & b \\ a & -(b+h)-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

resolviendo obtenemos

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}\left[-(a+b+h) \pm \sqrt{(a+b+h)^2 - 4ah}\right]$$

notemos que ambos autovalores son reales ya que

$$(a+b+h)^2 - 4ah = a^2 + b^2 + h^2 + 2ab + 2ah + 2bh - 4ah = a^2 + b^2 + h^2 + 2ab - 2ah + 2bh$$

luego
$(a+b+h)^2 - 4ah = (a-h)^2 + 2ab + 2bh + b^2 > 0$, entonces la solución del sistema tendrá la forma

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 A e^{\lambda_1 t} + c_2 B e^{\lambda_2 t}$$

donde A y B son los autovectores correspondientes a los autovalores λ_1 y λ_2 respectivamente y c_1, c_2 son constantes, luego notemos que siendo

$$(a+b+h)^2 - 4ah < (a+b+h)^2$$

implica

$$\sqrt{(a+b+h)^2 - 4ah} < a+b+h$$

por lo tanto

$$-(a+b+h) \pm \sqrt{(a+b+h)^2 - 4ah} < 0$$

luego $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, entonces si $t \to +\infty$ $x(t) \longrightarrow 0$ y $y(t) \longrightarrow 0$, lo que significa que la tinta será aclarada con el paso del tiempo, en este caso el punto de equilibrio $(0, 0)$ es un punto estable.

Por lo tanto, concluimos que con el pasar del tiempo, la concentración de tinta en el hígado tiende a desaparecer , lo cual indica que el modelo propuesto representa adecuadamente el comportamiento de un hígado en buen estado.

Modelo de Tanques conectados

Considere dos tanques de agua T_1, T_2 conectados por dos canales como se muestra en la figura. Si asumimos que:

- Los canales llevan un fluido constante a una razón de $Q\ m^3/s$ entre los tanques.
- El tanque T_1 contiene $V_1\ m^3$ y el tanque T_2 contiene $V_2\ m^3$ de agua pura en el inicio.
- Un fluido contaminado ingresa a una razón de $Q_1\ m^3/s$ en el tanque T_1 y concentración de $c_0\ gr/m^3$, simultáneamente es descargado fluido de este tanque a la misma razón.
- Los tanques son contaminados gradualmente por estos fluidos que llevan contaminantes.

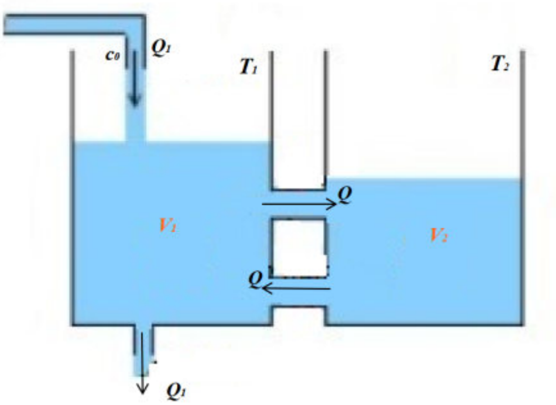


Figura 6.1: Sistemas de tanque conectados.

Ahora buscamos determinar las funciones $x_1(t)\,gr$ y $x_2(t)\,gr$ que indiquen la cantidad del contaminante existente en los tanques T_1 y T_2 en el instante t.

$$\frac{d(x_1)}{dt} = c_0Q_1 - \frac{x_1}{V_1}Q + \frac{x_2}{V_2}Q - \frac{x_1}{V_1}Q_1$$

y

$$\frac{d(x_2)}{dt} = \frac{x_1}{V_1}Q - \frac{x_2}{V_2}Q$$

estas ecuaciones también pueden ser escritas en forma matricial como sigue

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -\frac{Q+Q_1}{V_1} & \frac{Q}{V_2} \\ \frac{Q}{V_1} & -\frac{Q}{V_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_0Q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

las condiciones iniciales correspondientes a este sistema seran $x_1(0) = 0$ y $x_2(0) = 0$.

6.6. Ejercicios resueltos

1. Dado el sistema de ecuaciones diferenciables

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y + z \\ y' &= 6x - y \\ z' &= -x - 2y - z \end{aligned}$$

a) Encontrar su solución general.

b) Si $x(0) = 1, y(0) = 1$ y $z(0) = 0$. Calcular $x(2)$.

Solución:

a) Escribiremos el sistema en su forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

considerando $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ el sistema puede escribirse como

$$X' = AX,$$

cuya ecuación característica asociada es

$$det\,(A - \lambda I) = 0.$$

Esto es

$$det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

consecuentemente

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

entonces

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)^2 - 2(6)(-1-\lambda) + (-12 - 1 - \lambda) = -\lambda(\lambda - 3)(\lambda + 4) = 0,$$

luego los autovalores de la matriz A, son $\lambda = 0,\ \lambda = 3,\ \lambda = -4$, y sus respectivos autovectores se determinan asi:

- Si $\lambda = 0$ buscamos $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tal que $Av = \lambda v \Longrightarrow Av = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{r} v_1 + 2v_2 + v_3 = 0 \\ 6v_1 - v_2 = 0 \\ -v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} 6v_1 = v_2 \\ v_3 = -v_1 - 2v_2 \end{array}$$

si $v_1 = -1 \Longrightarrow v_2 = -6 \Longrightarrow v_3 = 13$ luego $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 13 \end{bmatrix}$. Así una solución del sistema es $Y^1(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 13 \end{bmatrix} e^{0t} = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 13 \end{bmatrix}$

- Si $\lambda = 3$ buscamos $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tal que $(A - \lambda I)v = 0 \Longrightarrow (A - 3I)v = 0$

consecuentemente

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 2 & 1 \\ 6 & -1-3 & 0 \\ -1 & -2 & -1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{r} -2v_1+2v_2+v_3=0 \\ 6v_1-4v_2=0 \\ -v_1-2v_2-4v_3=0 \end{array} \quad \text{de donde} \quad \begin{array}{l} v_3=2v_1-2v_2 \\ 6v_1=4v_2 \end{array}$$

si $v_1=-2 \Longrightarrow v_2=-3 \Longrightarrow v_3=2$ luego $v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ así una solución del sistema es $Y^2(t)=\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}e^{3t}$

- Si $\lambda=-4$ buscamos $v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tal que $(A-\lambda I)v=0 \Longrightarrow (A+4I)v=0$

$$\begin{bmatrix} 1+4 & 2 & 1 \\ 6 & -1+4 & 0 \\ -1 & -2 & -1+4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{rl} 5v_1+2v_2+v_3= & 0 \\ 6v_1+3v_2= & 0 \\ -v_1-2v_2+3v_3= & 0 \end{array} \quad \text{de donde} \quad \begin{array}{l} v_3=-5v_1-2v_2 \\ -2v_1=v_2 \end{array}$$

si $v_1=-1 \Longrightarrow v_2=2 \Longrightarrow v_3=1$luego $v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ luego una solución del sistema es $Y^3(t)=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-4t}$. Por lo tanto la solución general del sistema es

$$X(t)=c_1Y^1+c_2Y^2+c_3Y^3=c_1\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 13 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}e^{3t}+c_3\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-4t},$$

es decir

$$\begin{array}{l} x(t)=-c_1-2c_2e^{3t}-c_3e^{-4t} \\ y(t)=-6c_1-3c_2e^{3t}+2c_3e^{-4t} \\ z(t)=13c_1+2c_2e^{3t}+c_3e^{-4t} \end{array}$$

b) Para encontrar $x(2)$ reemplazamos el valor de las condiciones iniciales $x(0)=1, y(0)=1$ y $z(0)=0$ obteniendo el sistema

$$\begin{array}{l} 1=-c_1-2c_2-c_3 \\ 1=-6c_1-3c_2+2c_3 \\ 0=13c_1+2c_2+c_3 \end{array}$$

de donde se obtiene la solución $c_1=\frac{1}{12}$, $c_2=-\frac{11}{21}$ y $c_3=-\frac{1}{28}$ consecuentemente

$$x(2)=-\frac{1}{12}+\frac{22}{21}e^6+\frac{1}{28}e^{-8}.$$

2. Dado el sistema $X'=AX$ donde $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ y sus respectivos autovalores son $\lambda=1, \dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$. Determine

   a) Tres soluciones linealmente independientes del sistema.

b) La solución general del sistema.

Solución:

a) Dado que los autovalores son conocidos, determinaremos sus respectivos autovectores

- Si $\lambda = 1$ buscamos $v \neq 0$ tal que $(A - I)v = 0$, entonces

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{r} -2v_2 = 0 \\ 2v_1 - v_2 - v_3 = 0 \end{array} \begin{array}{l} \Longrightarrow v_2 = 0 \\ \Longrightarrow 2v_1 = v_3 \end{array}$$

luego si $v_1 = 1 \Longrightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Así, una solución del sistema será $X^1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} e^t$

- Si $\lambda = \frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ buscamos $w \neq 0$ tal que $\left(A - \left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right) I\right) w = 0$, entonces

$$\begin{bmatrix} 1 - \left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right) & -2 & 0 \\ 2 & -\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right) & -1 \\ 4 & -2 & -1 - \left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3-\sqrt{7}i}{2} & -2 & 0 \\ 2 & \frac{1-\sqrt{7}i}{2} & -1 \\ 4 & -2 & \frac{-1-\sqrt{7}i}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{r} \left(\frac{3-\sqrt{7}i}{2}\right) w_1 - 2w_2 = 0 \\ 2w_1 + \left(\frac{1-\sqrt{7}i}{2}\right) w_2 - w_3 = 0 \end{array}$$

luego si $w_1 = 1 \Longrightarrow w_2 = \frac{3-\sqrt{7}i}{4}$, usando la segunda ecuación tenemos

$$w_3 = 2 + \left(\frac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{7}i}{4}\right) = \frac{16 + 3 - \sqrt{7}i - 3\sqrt{7}i - 7}{8} = \frac{12 - 4\sqrt{7}i}{8} = \frac{3-\sqrt{7}i}{2}$$

entonces $w = \left(1, \frac{3-\sqrt{7}i}{4}, \frac{3-\sqrt{7}i}{2}\right)$. Consecuentemente obtenemos dos soluciones l.i.

$$X^2(t) = e^{-1/2t}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3/4 \\ 3/2 \end{bmatrix} cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) - \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{7}/4 \\ \sqrt{7}/2 \end{bmatrix} sen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)^T$$

$$X^3(t) = e^{-1/2t}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{7}/4 \\ \sqrt{7}/2 \end{bmatrix} cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 3/4 \\ 3/2 \end{bmatrix} sen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)^T$$

luego las tres soluciones l.i. son $X^1(t)$, $X^2(t)$ y $X^3(t)$.

b) La solución general X esta dada por

$$X = c_1X^1 + c_2X^2 + c_3X^3,$$

es decir $X(t)$ se escribe como

$$\begin{bmatrix} c_1e^t + e^{-t/2}\left[c_2cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + c_3cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right] \\ e^{-t/2}\left[c_2\left(\frac{3}{4}\right)cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{7}}{4}c_2sen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + c_3\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + c_3\left(\frac{3}{4}\right)sen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right] \\ 2c_1e^t + e^{-t/2}\left[c_2\left(\frac{3}{2}\right)cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{7}}{2}c_2sen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + c_3\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + c_3\left(\frac{3}{2}\right)sen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right] \end{bmatrix}$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes arbitrarias.

3. Resolver el sistema:
$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 \end{aligned} \quad \text{sujeto a} \quad \begin{aligned} y_1(0) &= 2 \\ y_2(0) &= -1 \end{aligned}.$$

Solución:
Escribimos el sistema matricialmente de la forma $Y' = AY$, es decir
$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$
donde $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}$ con ecuación característica
$$det(A - \lambda I) = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$
luego
$(-3-\lambda)(1-\lambda) + 4 = 0 \Longrightarrow (\lambda+1)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$ (multiplicidad algebraica 2). Ahora calculemos sus autovectores, es decir encontremos un vector $v \neq 0$ tal que $(A+I)v = 0$,
$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
de donde se tiene $-2v_1 + 2v_2 = 0 \Longrightarrow v_1 = v_2$, luego $v = (1,1)^T$, entonces $Y^1 = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es una solución, por otra parte observe que no podemos encontrar otro autovector l.i. entonces para encontrar la otra solución l.i. con la anterior buscaremos un vector propio generalizado, es decir un vector $w \neq 0$ tal que $(A+I)w = v$, entonces
$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow -2w_1 + 2w_2 = 1 \Longrightarrow w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$
luego, la otra solución del sistema será $Y^2 = te^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$. Por tanto la solución general del sistema Y esta dado por
$$Y = c_1Y^1 + c_2Y^2 = c_1e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\left(te^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}\right),$$
equivalente a
$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^{-t} + c_2te^{-t} \\ c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + c_2\frac{e^{-t}}{2} \end{bmatrix},$$
usando las condiciones iniciales tenemos que $2 = y_1(0) = c_1$, además como
$$-1 = y_2(0) = c_1 + c_2\frac{1}{2} \Longrightarrow c_2 = -6.$$
Así tenemos la solución del problema
$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - 6te^{-t} \\ -e^{-t} - 6te^{-t} \end{bmatrix}.$$

4. En un bosque tropical cohabitan conejos, liebres y picas. La razón de cambio de la población de conejos respecto del tiempo es igual al triple de la población presente de conejos menos la población presente de liebres más la población presente de picas. El cambio de la población de liebres respecto del tiempo es igual a cinco veces la población presente de liebres menos la población presente de conejos menos la población presente de picas y la razón de cambio respecto del tiempo de picas es igual a la población presente de conejos menos la población presente de liebres más el triple de la población presente de picas. Si la población inicial de conejos, liebres y picas es de 100, 300 y 500 respectivamente. Modele el sistema que describe la dinámica de estas poblaciones.

   Solución:
   Primero definiremos las variables
   $x(t)$: población de conejos en el instante t.

   $y(t)$: población de liebres en el instante t.

   $z(t)$: población de picas en el instante t.
   Luego modelaremos las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = 3x - y + z$$
$$\frac{dy}{dt} = 5y - x - z$$
$$\frac{dz}{dt} = x - y + 3z$$

   y las condiciones iniciales

$$x(0) = 100$$
$$y(0) = 300$$
$$z(0) = 500$$

5. Dos grandes tanques T_1 y T_2, cada uno de los cuales contiene 80 litros de una solución salina, están conectados entre sí mediante un par de tubos donde

   - El tanque T_1 recibe del exterior una solución salina a razón de 5 $litros/minuto$ y a una concentración de $0{,}4 kilogramos/litro$, además el líquido sale de este mismo tanque al exterior a la misma razón.
   - El tanque T_2 recibe del exterior una solución salina a razón de 8 $litros/minuto$ con una concentración de $0{,}5 kilogramos/litro$ y la mezcla sale del tanque T_2 al exterior a la misma razón.
   - Se bombean $7 litros/minuto$ de líquido del tanque T_1 al tanque T_2 y a $7 litros/minuto$ del tanque T_2 al tanque T_1.
   - Los líquidos dentro de cada tanque se mantienen bien revueltos, de modo que cada mezcla es homogénea.

   Si inicialmente el tanque T_1 contiene 20 kilogramos de sal y el tanque T_2 12 kilogramos de sal. Modele el PVI que permita calcular la concentración de sal en los tanques T_1 y T_2 en el instante t.
   Solución:

   Definiremos las variables

   $x(t)$:cantidad de sal en el instante t en el tanque T_1.

   $y(t)$:cantidad de sal en el instante t en el tanque T_2. construimos las ecuaciones

$$x' = (5)(0{,}4) + 7 \cdot \frac{y(t)}{80} - 7 \cdot \frac{x(t)}{80} - 5 \cdot \frac{x(t)}{80}$$

$$y' = (8)(0{,}5) + 7 \cdot \frac{x(t)}{80} - 8 \cdot \frac{y(t)}{80} - 7 \cdot \frac{y(t)}{80}$$

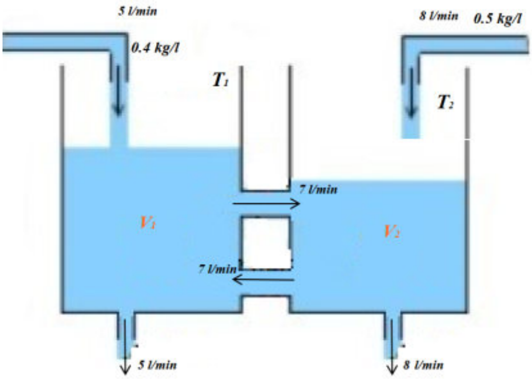


Figura 6.2: Sistema de tanques conectados T_1 y T_2.

luego

$$x' = 2 - \frac{12x}{80} + \frac{7y}{80}$$

$$y' = 4 + \frac{7x}{80} - \frac{15y}{80}$$

$$x(0) = 20, y(0) = 12$$

6. Considere el sistema lineal no homogéneo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{7t} \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Calcular $e^{\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} t}$.

b) Resolver el sistema dado.

Solución:

a) Calculemos los autovalores de la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ resolviendo la ecuación característica

$$det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow (2-\lambda)(4-\lambda) - 15 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0$$

los autovalores son $\lambda = 7, \lambda = -1.$, Los respectivos autovectores son $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$, luego

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = PDP^{-1}$$

donde $P = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ así tenemos que

$$e^{\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} t} = e^{PDP^{-1}t} = e^{PtDP^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

consecuentemente

$$e^{\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} t} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3e^{7t} & 5e^{7t} \\ -e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3e^{7t}+5e^{-t}}{8} & \frac{5e^{7t}-5e^{-t}}{8} \\ \frac{3e^{7t}-3e^{-t}}{8} & \frac{5e^{7t}+3e^{-t}}{8} \end{bmatrix}.$$

b) La solución particular del sistema dado es

$$X_p = e^{\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}t} \int e^{-\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}t} \begin{bmatrix} e^{7t} \\ 2 \end{bmatrix} dt$$

entonces

$$X_p = \begin{bmatrix} \frac{3e^{7t}+5e^{-t}}{8} & \frac{5e^{7t}-5e^{-t}}{8} \\ \frac{3e^{7t}-3e^{-t}}{8} & \frac{5e^{7t}+3e^{-t}}{8} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} \frac{3e^{-7t}+5e^{t}}{8} & \frac{5e^{-7t}-5e^{t}}{8} \\ \frac{3e^{-7t}-3e^{t}}{8} & \frac{5e^{-7t}+3e^{t}}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{7t} \\ 2 \end{bmatrix} dt$$

$$X_p = \begin{bmatrix} \frac{3e^{7t}+5e^{-t}}{8} & \frac{5e^{7t}-5e^{-t}}{8} \\ \frac{3e^{7t}-3e^{-t}}{8} & \frac{5e^{7t}+3e^{-t}}{8} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} \frac{3+5e^{8t}+10e^{-7t}-10e^{t}}{8} \\ \frac{3-3e^{8t}+10e^{-7t}+6e^{t}}{8} \end{bmatrix} dt$$

$$X_p = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 3e^{7t}+5e^{-t} & 5e^{7t}-5e^{-t} \\ 3e^{7t}-3e^{-t} & 5e^{7t}+3e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3t + \frac{5e^{8t}}{8} - \frac{10e^{-7t}}{7} - 10e^{t} \\ 3t - \frac{3e^{8t}}{8} - \frac{10e^{-7t}}{7} + 6e^{t} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 24te^{t} + 5e^{7t} - \frac{640}{7} \\ 24te^{7t} - 3e^{7t} + \frac{256}{7} \end{bmatrix}$$

Luego la solución general del sistema es

$$X(t) = \begin{bmatrix} \frac{3e^{7t}+5e^{-t}}{8} & \frac{5e^{7t}-5e^{-t}}{8} \\ \frac{3e^{7t}-3e^{-t}}{8} & \frac{5e^{7t}+3e^{-t}}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{24te^{t}}{64} + \frac{5e^{7t}}{64} - \frac{10}{7} \\ \frac{24te^{7t}}{64} - \frac{3e^{7t}}{64} + \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

Equivalentemente, $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\left(\frac{3e^{7t}+5e^{-t}}{8}\right) + c_2\left(\frac{5e^{7t}-5e^{-t}}{8}\right) + \frac{24te^{t}}{64} + \frac{5e^{7t}}{64} - \frac{10}{7} \\ c_1\left(\frac{3e^{7t}-3e^{-t}}{8}\right) + c_2\left(\frac{5e^{7t}+3e^{-t}}{8}\right) + \frac{24te^{7t}}{64} - \frac{3e^{7t}}{64} + \frac{4}{7} \end{bmatrix}$ donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

7. Dada la ecuación diferencial $x''' + 3x'' - 7x' + 9 = e^{3t} + sen(5t)$

   Transforme la ecuación diferencial en un sistema lineal equivalente de tres variables de primer orden.
   Solución:
   Para transformar la ecuación en un sistema de ecuaciones diferenciales definimos las variables u, v y w tales que

$$\begin{array}{lcl} u = x & & \\ v = x' & \Rightarrow & u' = v \\ w = x'' & \Rightarrow & v' = w \end{array}$$

   y $\quad w' = x''' = -3x'' + 7x' - 9 + e^{3t} + sen(5t) = -3w + 7v - 9 + e^{3t}.$

   escribiendo el sistema matricialmente tenemos que

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 + e^{3t} \end{bmatrix}$$

8. Dos grandes tanques, cada uno de los cuales contiene 24 litros de una solución salina, están conectados entre sí mediante un par de tubos. El tanque A recibe del exterior una solución salina a razón de 6 litros/minuto y a una concentración de 0.5 kilogramos/litro, además el líquido sale de este mismo tanque a la misma razón; si también, se bombean 8 litro/minuto de líquido del tanque A al tanque B y a 8 litros/minuto del tanque B al tanque A. Los líquidos dentro de cada tanque se mantienen bien revueltos, de modo que cada mezcla es homogénea. Si inicialmente el tanque A contiene 20 kilogramos de sal y el tanque B 12 kilogramos de sal. Modele el PVI que permita calcular la concentración de sal en los tanques A y B en el instante t.

Solución:

Sean

$T_A(t)$: concentración de sal en el tanque A en el instante t.

$T_B(t)$: concentración de sal en el tanque B en el instante t. luego

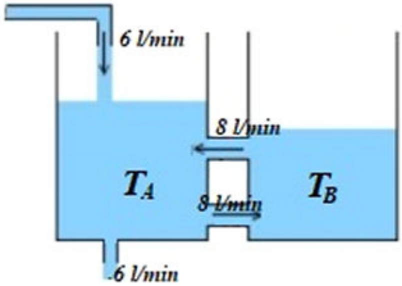


Figura 6.3: Sistema de tanques conectados T_A y T_B.

$$\begin{aligned} T'_A &= \left[(6)(0{,}5)+8\tfrac{T_B}{24}\right]-\left[8\tfrac{T_A}{24}+6\tfrac{T_A}{24}\right] \\ T'_B &= 8\tfrac{T_A}{24}-8\tfrac{T_B}{24} \end{aligned}$$

reescribiendo

$$\begin{aligned} T'_A &= 3+\tfrac{T_B}{3}-\tfrac{7T_A}{12} \\ T'_B &= \tfrac{T_A}{3}-\tfrac{T_B}{3} \end{aligned}$$

las con condiciones iniciales son $T_A(0)=20$ y $T_B(0)=12$.

9. La población de una especie animal en el instante t consiste en $x(t)$ hembras e $y(t)$ machos. La población de animales hembras cambia respecto del tiempo a una razón igual a la población presente de hembras más el doble de la población presente de machos, y la razón de cambio de la población de machos es igual al séxtuple de la población presente de machos menos tres veces la población presente de hembras. Si las poblaciones iniciales de hembras y machos son 100 y 80 respectivamente. Modele el PVI que describe la dinámica de esta población.
Solución: De acuerdo al enunciado tenemos que

$$x'(t)=x(t)+2y(t)$$

$$y'(t)=6y(t)-3x(t)$$

$$x(0)=100; y(0)=80$$

10. Dada la ecuación diferencial $y''+2y'+2y=e^{-t}cost$. Transforme la ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneo de primer orden equivalente.

Solución: Definimos las nuevas variables u y v como sigue

$$u=y$$

$$v = y'$$

luego $u' = v$ y $v' = -2v - 2u + e^{-t}cost$

entonces el sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneo de primer orden equivalente es

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t}cost \end{bmatrix}$$

11. Dado el sistema no homogéneo

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} t \\ t+e^t \end{bmatrix}$$

a) Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, calcule las matrices e^{At} y e^{-At}.

b) Resolver el sistema dado.

Solución:

a) Los autovalores de la matriz $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ son $\lambda = \pm 1$ además

- Para $\lambda = 1$ buscamos el autovector $v = (v_1, v_2) \neq 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -3 \\ 1 & -2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ de donde } v = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Para $\lambda = -1$ buscamos el vector $w = (w_1, w_2) \neq 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} 2+1 & -3 \\ 1 & -2+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ de donde } w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

así escribimos $A = PDP^{-1}$ donde $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned} e^{At} = & \; e^{(PDP^{-1})t} = e^{P(tD)P^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ = & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/2 & 3//2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -e^{-t}/2 & 3e^{-t}/2 \\ e^t/2 & -e^t/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{3e^t - e^{-t}}{2} & \frac{-3e^t + 3e^{-t}}{2} \\ \frac{e^t - e^{-t}}{2} & \frac{-e^t + 3e^{-t}}{2} \end{bmatrix}$$

luego $e^{-At} = e^{A(-t)} = \begin{bmatrix} \frac{3e^{-t} - e^t}{2} & \frac{-3e^{-t} + 3e^t}{2} \\ \frac{e^{-t} - e^t}{2} & \frac{-e^{-t} + 3e^t}{2} \end{bmatrix}$.

b) La solución general del sistema esta dado por

$$X = X_h + X_p$$

donde $X_h = e^{At}C$ con C vector de contantes arbitrarias y $X_p = e^{At}\int e^{-At}\begin{bmatrix} t \\ t+e^t \end{bmatrix}dt$ luego

$$X_p = e^{At}\int \begin{bmatrix} \frac{3e^{-t}-e^t}{2} & \frac{-3e^{-t}+3e^t}{2} \\ \frac{e^{-t}-e^t}{2} & \frac{-e^{-t}+3e^t}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ t+e^t \end{bmatrix}dt$$

$$X_p = e^{At}\int \begin{bmatrix} \frac{2te^t+3e^{2t}-3}{2} \\ \frac{2te^t+3e^{2t}-1}{2} \end{bmatrix}dt = e^{At}\begin{bmatrix} \frac{4(t-1)e^t+3e^{2t}-6t}{4} \\ \frac{4(t-1)e^t+3e^{2t}-2t}{4} \end{bmatrix}$$

$$X_p = \begin{bmatrix} \frac{3e^t-e^{-t}}{2} & \frac{-3e^t+3e^{-t}}{2} \\ \frac{e^t-e^{-t}}{2} & \frac{-e^t+3e^{-t}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{4(t-1)e^t+3e^{2t}-6t}{4} \\ \frac{4(t-1)e^t+3e^{2t}-2t}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-6te^t+4(t-1)+3e^t}{4} \\ \frac{-2te^t+4(t-1)+3e^t}{4} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la solución general es

$$X(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{3e^t-e^{-t}}{2}\right)c_1 + \left(\frac{-3e^t+3e^{-t}}{2}\right)c_2 \\ \left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)c_1 + \left(\frac{-e^t+3e^{-t}}{2}\right)c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-6te^t+4(t-1)+3e^t}{4} \\ \frac{-2te^t+4(t-1)+3e^t}{4} \end{bmatrix}.$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

12. Considere el sistema lineal no homogéneo

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}X + \begin{bmatrix} 3e^t \\ 3e^{-t} \end{bmatrix}$$

Determine la solución particular de este sistema.
Solución:
Identificamos $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $B(t) = \begin{bmatrix} 3e^t \\ 3e^{-t} \end{bmatrix}$. Los autovalores de la matriz A se encuentran resolviendo su ecuación característica, es decir

$$det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0,$$

$$det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)-8 = \lambda^2-4\lambda-5 = (\lambda-5)(\lambda+1) = 0$$

los autovalores son $\lambda = 5$ y $\lambda = -1$.

- Autovector asociado a $\lambda = 5$

$$\begin{bmatrix} 1-5 & 4 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -4v_1+4v_2 \\ 2v_1-2v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow v_1 = v_2$$

  entonces $X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{5t}$ es una solución del sistema homogéneo.

- Autovector asociado a $\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} 1-(-1) & 4 \\ 2 & 3-(-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2v_1+4v_2 \\ 2v_1+4v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow v_1 = -2v_2$$

  entonces $X_2(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-t}$ es otra solución del sistema homogéneo.

Puesto que X_1 y X_2 son soluciones l.i. del sistema, una matriz fundamental del sistema es

$$M(t)=\begin{bmatrix} e^{5t} & 2e^{-t} \\ e^{5t} & -e^{-t} \end{bmatrix},$$

luego la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t)=M(t)C$$

donde $C=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$ es un vector de constantes. La solución particular esta dada por

$$X_p(t)=M(t)\,U(t)$$

donde $U'(t)=[M(t)]^{-1}B(t)$, dado que

$$[M(t)]^{-1}=\frac{1}{-3e^{4t}}\begin{bmatrix} -e^{-t} & -2e^{-t} \\ -e^{5t} & e^{5t} \end{bmatrix}$$

entonces

$$U'(t)=\frac{1}{-3e^{4t}}\begin{bmatrix} -e^{-t} & -2e^{-t} \\ -e^{5t} & e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3e^{t} \\ 3e^{-t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{-4t}+2e^{-6t} \\ e^{2t}-1 \end{bmatrix}$$

luego

$$U(t)=\int\begin{bmatrix} e^{-4t}+2e^{-6t} \\ e^{2t}-1 \end{bmatrix}dt=\begin{bmatrix} \int\left(e^{-4t}+2e^{-6t}\right)dt \\ \int\left(e^{2t}-1\right)dt \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{e^{-4t}}{-4}+\frac{2e^{-6t}}{-6} \\ \frac{e^{2t}}{2}-t \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la solución particular es

$$X_p(t)=\begin{bmatrix} e^{5t} & 2e^{-t} \\ e^{5t} & -e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{e^{-4t}}{-4}+\frac{2e^{-6t}}{-6} \\ \frac{e^{2t}}{2}-t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{e^{t}}{4}-\frac{e^{-t}}{3}+e^{t}-2te^{-t} \\ \frac{e^{t}}{4}+\frac{e^{-t}}{3}-\frac{e^{t}}{2}+te^{-t} \end{bmatrix}$$

6.7. Ejercicios propuestos

1. Resolver el sistema $\begin{cases} x'=6x-y \\ y'=5x+4y \end{cases}$

2. Resolver el sistema: $X'=AX$ donde $A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

3. Halle los valores y vectores propios de la matriz $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$.

4. Dada la matriz $A=\begin{bmatrix} a & 0 & -2 \\ 0 & b & d \\ -2 & 0 & c \end{bmatrix}$, determine a, b, c, d, sabiendo que $v=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ es un vector propio asociado al autovalor $\lambda=6$ y $w=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un vector propio asociado al autovalor $\lambda=4$.

5. Determine x, si $\lambda = 0$ es un autovalor de la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 8 & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$ determine el valor del parámetro a para que $\lambda = 1$ sea un autovalor con multiplicidad 2.

7. Para cada uno de los sistemas de ecuaciones diferenciales que se dan a continuación, halle un sistema fundamental de soluciones.

   a) $X' = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X$

   b) $X' = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -10 & 8 \end{bmatrix} X$

   c) $X' = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} X$

   d) $X' = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} X$

   e) $X' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} X$

   f) $X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} X$

   g) $X' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} X$

   h) $X' = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} X$

   i) $X' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} X$

   j) $X' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} X$

8. Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x_1' &= 6x_1 + 4x_2 \\ x_2' &= -8x_1 - 6x_2 \end{aligned}$$

   a) Escriba su forma matricial.

   b) Halle la solución general del sistema.

   c) Halle la solución del sistema que cumple la condición inicial $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$.

9. Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2' &= x_1 + x_3 \\ x_3' &= 4x_1 - 4x_2 + 5x_{-3} \end{aligned}$$

   a) Escriba su forma matricial.

   b) Halle la solución del sistema.

10. En un bosque tropical cohabitan conejos, liebres y picas. La razón de cambio de la población de conejos respecto del tiempo en meses es igual al triple de la población presente de conejos menos la población presente de liebres más la población presente de picas, la razón de cambio de la población de liebres respecto del tiempo en meses es igual a cinco veces la población presente de liebres menos la población presente de conejos menos la población presente de picas, la razón de cambio de la población de picas respecto del tiempo en meses es igual a la población presente de conejos menos la población presente de liebres más el triple de la población presente de picas. Si la población inicial de conejos, liebres y picas es de 100, 300 y 500 respectivamente, determínela cantidad de conejos liebres y picas que habrá en el bosque al cabo de tres años.

11. Una piscigranja en el centro del país cultiva tres variedades de truchas, las variedades son arco iris, perca y la marrón, sus poblaciones iniciales son 100, 50 y 80 truchas, respectivamente, el tiempo se da en meses. La población de truchas de la variedad arco iris respecto al tiempo tiene una tasa de variación igual a 0.5 veces la población presente de la variedad perca, menos 0.25 veces la población presente de la variedad arco iris, menos 0.5 veces la población presente de la variedad marrón; la población de truchas de la variedad perca respeto al tiempo tiene una tasa de variación igual a 0.5 veces la población presente de la variedad arco iris menos 0.25 veces la población presente de la variedad perca más la mitad de la población presente de la variedad marrón; la población de truchas de la variedad marrón respecto al tiempo tiene a una tasa de variación igual a 0.5 veces la población presente de la variedad arco iris menos 0.5 veces la población presente de la trucha perca más 0.75 veces la población presente de la trucha marrón.

    a) Modele el PVI que permita determinar la población de cada una de las variedades de truchas que contiene la piscigranja en cualquier instante t (meses).

    b) Halle la solución del sistema planteado en el ítem anterior.

12. La población de una especie animal en el instante t (en meses) consiste en $x(t)$ hembras e $y(t)$ machos. La población de hembras cambia respecto al tiempo a una razón igual a la población presente de hembras más el doble de la población presente de machos, y la razón de cambio de la población de machos respecto del tiempo es igual al séxtuple de la población presente de machos menos tres veces la población presente de hembras. Si las poblaciones iniciales de hembras y machos son $x(0) = 100$ e $y(0) = 80$.

    a) Determine las funciones $x(t)$ e $y(t)$ que nos proporcionan la cantidad de hembras y machos de esta especie animal en todo instante de tiempo t.

    b) Determine la cantidad de hembras y machos de esta especie animal después de medio año.

    c) ¿Después de qué tiempo, la población de hembras es máxima?

13. En una reserva natural, la población inicial de tortugas de las especies arraú, amarilla y amazónica es de 400, 200 y 300 respectivamente, el tiempo se da en años. La población de arraú tiene una tasa de variación igual al doble de la población presente de arraú menos siete veces la población presente de amarilla; la población de amarilla tiene una tasa de variación igual a diez veces de la población presente de amarilla, más cinco veces de la población presente de arraú, más el cuádruple de la población presente de amazónica; la población de amazónica tiene una tasa de variación igual al doble de la población presente de amazónica, más cinco veces de la población presente de amarilla.

    a) Modele un PVI que permita obtener la población de tortugas en las diferentes especies.

    b) Determine la solución del PVI obtenido en el item a)

    c) Determine la población de tortugas amazónicas despues de 1 año.

14. La población de dos especies de tilapias en una piscifactoria en cualquier instante de tiempo t (años) consiste en $x(t)$ de especie roja e $y(t)$ de especie plateada. La población de especie roja cambia respecto al tiempo a una razón igual al doble de la población presente de la especie plateada más el doble la población presente de la especie roja, y la razón de cambio de la población de la especie plateada respecto al tiempo es igual a la población presente de la especie roja más tres veces la población presente de la especie plateada. Si la población inicial de la especie de roja es 400 y la población inicial de la especie plateada es 300, determine la cantidad de la población de tilapias rojas y plateadas que se tiene luego de transcurrido 12 meses.

15. Convertir la ecuación diferencial dada en un sistema de primer orden usando la sustitución $u = y$, $v = \frac{dy}{dt}$.

    a) $\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 9y = 0$

    b) $\frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0$

    c) $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 5y = 0$

    d) $\frac{d^2y}{dt^2} - 25y = 0$

16. Dado el sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 \\ x_2' &= -x_1 + x_2 + e^t \end{aligned}$$

   a) Escribir el sistema de forma matricial.

   b) Resolver el sistema.

17. Encuentre la solución general de los siguientes sistemas

   a) $Y' = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

   b) $Y' = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} x+1 \\ e^{-x} \end{bmatrix}$

   c) $Y' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} e^{-x} \\ e^{x} \end{bmatrix}$

   d) $Y' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} sen(x) \\ cos(x) \end{bmatrix}$

   e) $Y' = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} \frac{e^x}{1+e^{2x}} \\ \frac{e^x}{1+e^{2x}} \end{bmatrix}$

   f) $Y' = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} -1 \\ x \end{bmatrix}$

18. Resuelva los siguientes PVI

   a) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 + 1 \\ \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 0 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} y_1' = 2y_2 + x \\ y_2' = -y_1 - 2y_2 \\ \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 1 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} y_1' = 6y_1 + 4y_2 + 3 \\ y_2' = -y_1 + 2y_2 - 2 \\ \\ y_1(0) = 1, y_2(0) = 0 \end{cases}$

   d) $\begin{cases} y_1' = -3y_1 + 2y_2 + x \\ y_2' = -y_1 - y_2 \\ \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 0 \end{cases}$

   e) $Y' = \begin{bmatrix} -2 & -7 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ x \end{bmatrix}$ sujeto a $Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   f) $Y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x cos(2x) \end{bmatrix}$ sujeto a $Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   g) $Y' = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} sen(2x) + cos(2x) \\ sen(2x) + cos(2x) \\ 0 \end{bmatrix}$ sujeto a $Y(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

   h) Resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 13x_2 \\ x_2' = 5x_1 + x_2 \end{cases}$$

   i) Resolver el sistema no homogéneo

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 - e^{-4t} \\ x_2' = 2x_1 + x_2 + e^t(1 + 4e^{-3t}) \end{cases}$$

Capítulo 7

Introducción a la Teoría de Estabilidad

Hasta ahora hemos estudiado técnicas analíticas para calcular, mediante integración, las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales de primer orden o sistemas de ecuaciones diferenciales. Desafortunadamente, estas técnicas sólo sirven para hallar soluciones analíticas de algunas ecuaciones y lo que es peor, no se puede esperar descubrir métodos que permitan encontrar soluciones a muchas ecuaciones. Por ello debemos considerar también la posibilidad de estudiar las ecuaciones diferenciales mediante otros métodos, llamados métodos cualitativos.

La idea básica que está detrás de los métodos cualitativos que estudiaremos en este capítulo es que ahora se supone la existencia de las soluciones y el objetivo no es encontrarlas, sino lo interesante es saber cuál es su comportamiento asintótico ($t \to \pm\infty$) aplicando el hecho que que la derivada de una función solución en un punto es la pendiente de la recta tangente.

7.1. Sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden.

Dadas las funciones $F, G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un sistema de primer orden de dos ecuaciones y dos incógnitas se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(t,x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(t,x,y) \end{aligned} \tag{7.1}$$

Ejemplo 7.1

Sea el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 3y + t^2 \\ \frac{dy}{dt} &= x sen(yt) \end{aligned}$$

Es considerado de primer orden con incógnitas x e y.

Ejemplo 7.2

Sea el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 5xy^2 - ln(t) \\ \frac{dy}{dt} &= x^2 + ty + e^t \end{aligned}$$

Es considerado de primer orden con incógnitas x e y.

Definición

Orbitas y trayectorias Consideremos una partícula moviéndose en el plano XY, la localización de la partícula en el tiempo t sera $(x(t), y(t))$. El camino o la traza que sigue la partícula en este plano es llamado trayectoria de la partícula. Parametrizando este camino con la variable temporal t, podemos definir su trayectoria como una función $\gamma :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

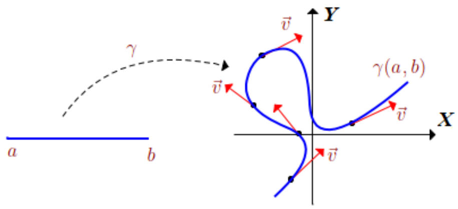


Figura 7.1: Trayectoria de una partícula en el plano

Definición Vector Velocidad

El vector velocidad en un punto arbitrario de (x, y) en el tiempo t esta dado por

$$\gamma'(t) = \left(x'(t), y'(t)\right).$$

Los vectores velocidad definirán un campo de vectores , así podemos determinar la localización de la partícula $(x(t), y(t))$ en cualquier instante t, al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = G(t, x(t), y(t)) \end{cases}$$

Interpretando geométricamente, el vector velocidad $(x'(t), y'(t))$ es tangente a la trayectoria $\gamma(t)$ en cada t, es decir F y G determinan un campo de vectores tangentes a las trayectorias, como se ve a continuación:

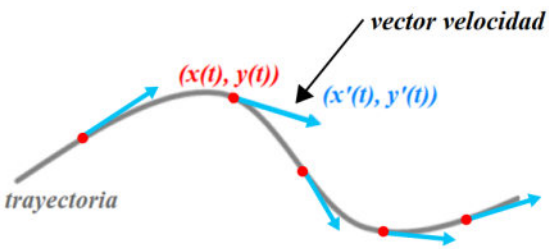


Figura 7.2: Vectores tangentes a una trayectoria

Definición Retrato Fase

El retrato fase para el sistema de ecuaciones diferenciales (7.1) es la representación geométrica de una colección de trayectorias en el plano XY llamado plano fase.

7.1.1. Sistema de primer orden Autónomo

Un sistema de primer orden es autónomo si la variable independiente no aparece en la parte derecha de las ecuaciones que conforman el sistema de primer orden, es decir es de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y) \end{aligned} \tag{7.2}$$

Proposición 7.1

Considerando el sistema autónomo (7.2) y que F y G son funciones continuas con respecto a x e y. Si γ_1 y γ_2 son dos trayectorias correspondientes a puntos iniciales p_1 y p_2 respectivamente tal que $p_1 \neq p_2$ entonces $\gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)$ para todo t (las trayectorias $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ nunca se intersectan).

De la ecuaciones que conforman el sistema (7.2) se deduce la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}$$

cuya solución determina las trayectorias buscadas, aunque no siempre será posible resolver esta ecuación, pero nos ayudará a obtener información cualitativa acerca del comportamiento de las trayectorias.

Del sistema (7.2) estamos interesados en :

- Saber si existen valores x_0 e y_0, para los cuales el vector (x_0, y_0) es su solución .
- Si $\varphi(t)$ es una solución de (7.2) y supongamos que $\psi(t)$ es una segunda solución de (7.2) con $\psi(0)$ muy cerca de $\varphi(0)$(es decir, $\psi_j(0)$ está muy cerca de $\varphi_j(0)$, siendo $j = 1, 2$) ¿permanecerá $\psi(t)$ cerca a $\varphi(t)$ o $\psi(t)$ se alejará cada vez mas de $\varphi(t)$ cuando t alcance valores muy grandes? esta pregunta se conoce como problema de estabilidad y es el problema fundamental en la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales además ha ocupado la atención de muchos matemáticos en los últimos cien años.
- ¿Qué ocurre con las soluciones de (7.2) cuando t tiende a infinito? ¿Tienden todas las soluciones a valores específicos? ¿se aproximarán al menos a una solución periódica?

Definición Solución estable

Una solución $x = x(t)$, $y = y(t)$ del sistema diferencial

$$x' = F(t,x,y)$$
$$y' = G(t,x,y)$$

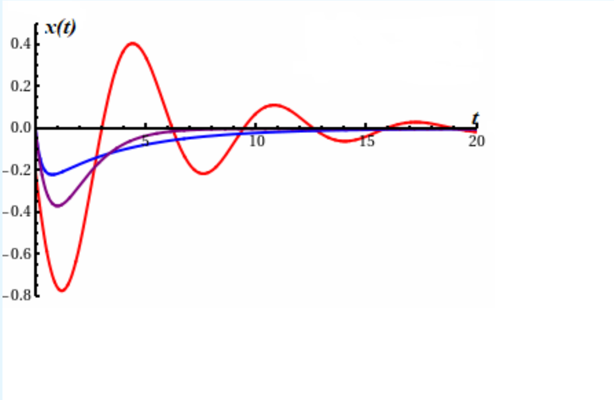
se dice que es estable si para toda solución $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ del sistema de ecuaciones diferenciales y para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|\psi_1(t_0) - x(t_0)| < \delta \Longrightarrow |\psi_1(t) - x(t)| < \epsilon, \qquad \forall t > t_0,$$

y

$$|\psi_2(t_0) - y(t_0)| < \delta \Longrightarrow |\psi_2(t) - y(t)| < \epsilon, \qquad \forall t > t_0,$$

Además, si $\lim\limits_{t\to+\infty} |\psi_1(t) - x(t)| = 0$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} |\psi_2(t) - y(t)| = 0$ la solución se denomina asintótiamente estable.



En el caso que la solución $x(t)$, $y(t)$ no es estable se dice que la solución es inestable, es decir para valores de t en una vecindad de t_0 se tiene y $|\psi_1(t) - x(t)| > \varepsilon_0$ y $|\psi_2(t) - y(t)| > \varepsilon_0$ para algun $\varepsilon_0 > 0$.

Definición Punto de Equilibrio o punto crítico

Para el sistema (7.2) cualquier valor de x e y para los cuales F y G se hacen cero a la vez serán llamados puntos de equilibrio.

Si (x_0, y_0) es punto de equilibrio entonces $x(t) = x_0$ y $y(t) = y_0$ es una solución del sistema (7.2) y es llamada solución de equilibrio del sistema.

Ejemplo 7.3
Determine los puntos de equilibrio del sistema

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= 2x - 3y \end{aligned}$$

Solución:
Igualando a cero ambas ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} x + y = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x = -y \\ 2x - 3y = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 2(-y) - 3y = 0 \quad \Longrightarrow y = 0 \end{aligned}$$

luego, el único punto de equilibrio es $(0, 0)$.

Ejemplo 7.4
Determine todos los puntos de equilibrio del sistema

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y \\ y' &= 4x + 2y \end{aligned}$$

Solución:
Igualando a cero ambas ecuaciones obtenemos

$$\left.\begin{aligned} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{aligned}\right. \quad \Longrightarrow \quad y = -2x$$

luego, los puntos de equilibrio serán los puntos de la forma $(x, y) = (t, -2t)$ para $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 7.5
Determine todos los puntos de equilibrio del sistema

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x^2}{y} - x \\ y' &= x^2 - y \end{aligned}$$

Solución:
Igualando a cero ambas ecuaciones obtenemos

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{y} - x = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{x^2}{y} = x \\ x^2 - y = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x^2 = y \end{aligned}\right. \quad \Longrightarrow \quad 1 = x \quad \Longrightarrow \quad y = 1$$

luego $(1, 1)$ es el único punto de equilibrio .

Sistemas autónomos lineales con coeficientes constantes

En esta sección analizamos el sistema autónomo para F y G funciones lineales de la forma

$$F(x,y)=ax+by \quad \text{y} \quad G(x,y)=cx+dy,$$

entonces el sistema se reduce a

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=ax+by\\ \frac{dy}{dt}&=cx+dy\end{aligned} \tag{7.3}$$

donde a,b,c y d son constantes, en este caso la ecuación diferencial para determinar sus trayectorias esta dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=\frac{cx+dy}{ax+by}.$$

Observamos que el sistema (7.3) puede ser escrito en la forma $X'=AX$ donde

$$A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix} \quad y \quad X=\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}$$

Así el objetivo es determinar el comportamiento cualitativo general de las trayectorias o curvas solución $(x(t),y(t))$. Asumiremos que la matriz A es invertible, esto garantiza que hay un solo punto de equilibrio que es $(0,0)$.

Retratos Fase

- Caso 1: Los autovalores de A son números reales distintos

  Entonces la solución del sistema tiene la forma $Z(t)=\begin{bmatrix} x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}=c_1v_1e^{\lambda_1 t}+c_2v_2e^{\lambda_2 t}$, donde λ_1 y λ_2 son autovalores y v_1, v_2 sus respectivos autovectores de la matriz A.

  - Si $\lambda_2<\lambda_1<0$ el comportamiento de las trayectorias es como sigue:
    Si $t\to+\infty$ entonces

    $$Z(t)=\begin{bmatrix} x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 0\\ 0\end{bmatrix}$$

    Si $c_1=0$ y $t\to-\infty$ entonces

    $$Z(t)=\begin{bmatrix} x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} \pm\infty\\ \pm\infty\end{bmatrix}$$

    Si $c_2=0$ y $t\to-\infty$ entonces

    $$Z(t)=\begin{bmatrix} x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} \pm\infty\\ \pm\infty\end{bmatrix}$$

    Si $t\approx+\infty$, entonces

    $$Z'(t)=c_1v_1\lambda_1e^{\lambda_1 t}+c_2v_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}\approx e^{\lambda_1 t}c_1v_1\lambda_1$$

    lo que implica que $Z'(t)$ es paralelo a v_1.
    Si $t\approx-\infty$, entonces

    $$Z'(t)=c_1v_1\lambda_1e^{\lambda_1 t}+c_2v_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}=e^{\lambda_2 t}\left(c_1v_1\lambda_1e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}+c_2v_2\lambda_2\right)\approx e^{\lambda_2 t}c_2v_2\lambda_2$$

    lo que implica que $Z'(t)$ es paralelo a v_2.
    En este caso el punto de equilibrio $(0,0)$ se denomina nodo estable.

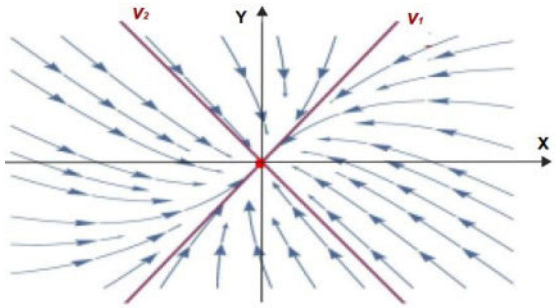


Figura 7.3: Nodo estable

- Si $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ el comportamiento de las trayectorias es como sigue:

  Si $t \to -\infty$ entonces $Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

  Si $c_1 = 0$ y $t \to +\infty$ entonces

$$Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \pm\infty \\ \pm\infty \end{bmatrix}$$

  Si $c_2 = 0$ y $t \to +\infty$ entonces

$$Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \pm\infty \\ \pm\infty \end{bmatrix}$$

  Si $t \approx -\infty$, entonces

$$Z'(t) = c_1 v_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \approx e^{\lambda_2 t} c_2 v_2 \lambda_2,$$

  lo que implica que $Z'(t)$ es paralelo a v_2.
  Si $t \approx +\infty$, entonces

$$Z'(t) = c_1 v_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} = e^{\lambda_1 t}\left(c_1 v_1 \lambda_1 + c_2 v_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}\right) \approx e^{\lambda_1 t} c_1 v_1 \lambda_1,$$

  lo que implica que $Z'(t)$ es paralelo a v_1.

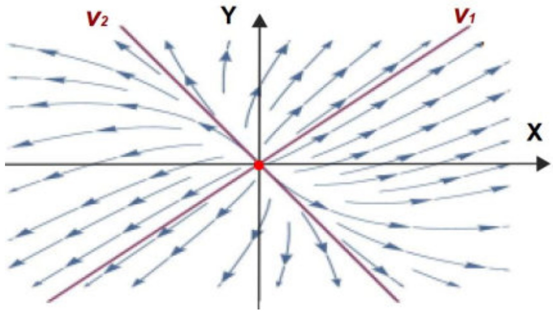


Figura 7.4: Nodo inestable

En este caso el punto de equilibrio $(0, 0)$ se denomina Nodo Inestable.

- Si $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ el comportamiento de las trayectorias es como sigue:

Si $c_1 = 0$ y $t \to +\infty$ entonces $Z(t)$ es paralelo a v_2

$$Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si $c_2 = 0$ y $t \to +\infty$ entonces $Z(t)$ es paralelo a v_1

$$Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \pm\infty \\ \pm\infty \end{bmatrix}$$

Si $c_1 = 0$ y $t \to -\infty$ entonces

$$Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \pm\infty \\ \pm\infty \end{bmatrix}$$

Si $c_2 = 0$ y $t \to -\infty$ entonces

$$Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si $t \approx +\infty$, entonces

$$Z'(t) = c_1 v_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} = e^{\lambda_1 t}\left(c_1 v_1 \lambda_1 + c_2 v_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}\right) \approx e^{\lambda_1 t} c_1 v_1 \lambda_1$$

lo cual implica que Z' es paralelo a v_1.
Si $t \approx -\infty$, entonces

$$Z'(t) = c_1 v_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} = e^{\lambda_2 t}\left(c_1 v_1 \lambda_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_2 v_2 \lambda_2\right) \approx e^{\lambda_2 t} c_2 v_2 \lambda_2$$

lo cual implica que Z' es paralelo a v_2

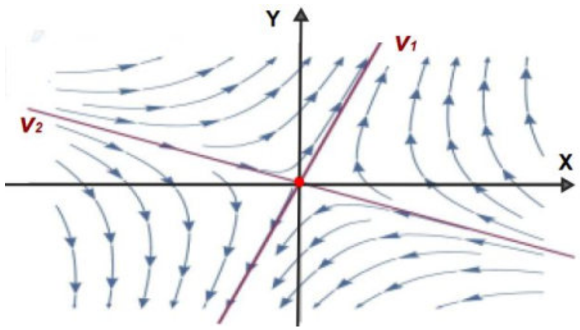


Figura 7.5: Punto silla

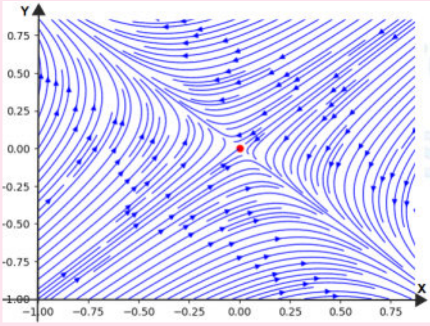
En este caso el punto de equilibrio $(0,0)$ se denomina Punto silla.

Ejemplo 7.6

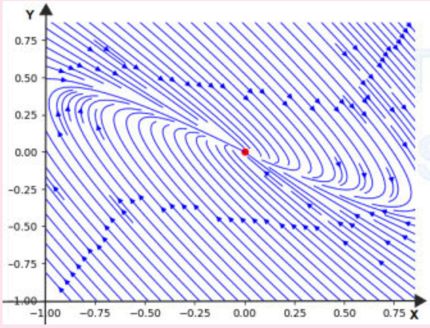
Caracterice el punto de equilibrio del sistema lineal $X' = AX$ y dibuje su retrato fase.

1. Si $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

El determinante de la matriz A es $-3 \neq 0$ entonces el único punto de equilibrio del sistema es $(0,0)$, luego resolviendo la ecuación característica de la matriz A obtenemos que sus autovalores son $\lambda_1 = 1, \;\; \lambda_2 = -3$ y sus respectivos autovectores son $v_1 = (-1,1)^T$ y $v_2 = (1,1)^T$. Por lo tanto, el punto de equilibrio es un punto silla.



2. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$
   El determinante de la matriz A es $2 \neq 0$ entonces el único punto de equilibrio del sistema es $(0,0)$, luego resolviendo la ecuación característica de la matriz A obtenemos que sus autovalores son $\lambda_1 = -1, \;\; \lambda_2 = -2$ y sus respectivos autovectores son $v_1 = (-3,2)^T$ y $v_2 = (-1,1)^T$, luego punto de equilibrio es un nodo estable.



- Caso 2: Los autovalores λ de la matriz A son números reales y repetidos

  - **Autovectores linealmente independientes** $v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix}$.

    La solución tiene la forma $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = Z(t) = e^{\lambda t}(c_1 v_1 + c_2 v_2)$ luego

    $$x(t) = e^{\lambda t}(c_1 v_{11} + c_2 v_{21})$$

    e

    $$y(t) = e^{\lambda t}(c_1 v_{12} + c_2 v_{22}),$$

    entonces

    $$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{e^{\lambda t}(c_1 v_{11} + c_2 v_{21})}{e^{\lambda t}(c_1 v_{12} + c_2 v_{22})} = K \Longrightarrow x(t) = Ky(t)$$

    con K constante arbitraria.

    - Si $\lambda < 0$ el punto critico es denominado nodo estable. Además

      Si $t \to +\infty$ entonces $Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

      Si $t \to -\infty$ entonces $Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \pm\infty \\ \pm\infty \end{bmatrix}$

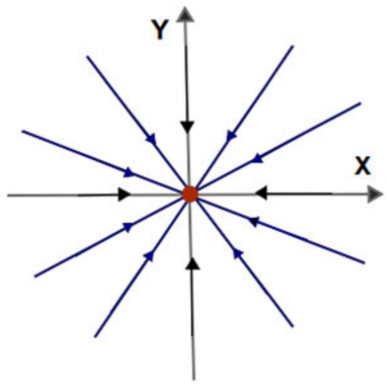


Figura 7.6: Nodo estable un autovalor negativo y dos autovectores l.i.

- Si $\lambda > 0$ el punto critico es denominado nodo inestable. Además
  Si $t \to +\infty$ entonces $Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \pm\infty \\ \pm\infty \end{bmatrix}$
  Si $t \to +\infty$ entonces $Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

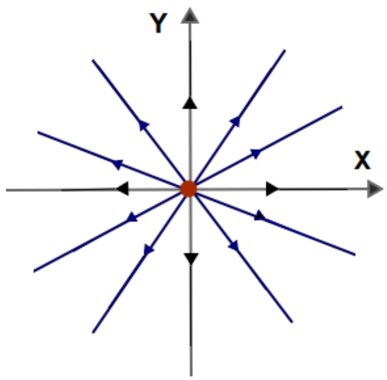


Figura 7.7: Nodo inestable un autovalor negativo y dos autovectores l.i.

- **Autovectores proporcionales (linealmente dependientes).**
  La solución tiene la forma $Z(t) = e^{\lambda t}(c_1 v + c_2(v_2 + tv))$ donde v es un autovector y v_2 es un autovector generalizado, linealmente independiente con v

  - Si $\lambda < 0$ el punto critico es denominado nodo impropio estable. Además
    Si $t \to +\infty$ entonces
    $$Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
    Si $t \to -\infty$ entonces
    $$Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \pm\infty \\ \pm\infty \end{bmatrix}$$
    Si $t \approx +\infty$, entonces

$$\begin{aligned} Z'(t) = &\ e^{\lambda t}\left[(\lambda c_1 + \lambda c_2 t + c_2) v + \lambda c_2 v_2\right] = e^{\lambda t}(\lambda c_1 v + \lambda c_2 v_2 + c_2 v) + \lambda e^{\lambda t} t c_2 v \\ \approx &\ e^{\lambda t} \lambda c_2 t v, \end{aligned}$$

lo que implica que $Z'(t)$ es paralela a v.
Si $t \approx -\infty$, entonces

$$Z'(t) = e^{\lambda t} t \left(\frac{\lambda c_1 v + \lambda c_2 v_2 + c_2 v}{t} + \lambda c_2 v \right) \approx \lambda c_2 t e^{\lambda t} v$$

o que implica que $Z'(t)$ es paralela a v.

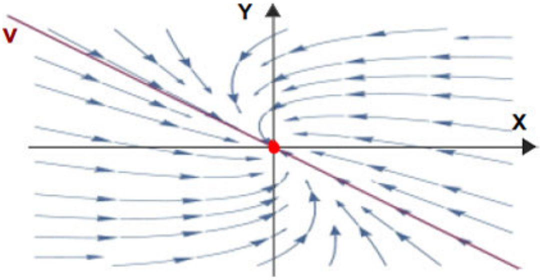


Figura 7.8: Nodo impropio estable

- Si $\lambda > 0$ el punto de equilibrio es denominado nodo impropio o inestable. Además
  Si $t \to -\infty$ entonces
  $$Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
  Si $t \to +\infty$ entonces
  $$Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \pm\infty \\ \pm\infty \end{bmatrix}$$
  Si $t \approx -\infty$, entonces
  $$\begin{aligned} Z'(t) = &\ e^{\lambda t}\left[(\lambda c_1 + \lambda c_2 t + c_2) v + \lambda c_2 v_2\right] \\ = &\ e^{\lambda t}\left[\lambda c_1 v + c_2 v + \lambda c_2 v_2\right] + e^{\lambda t}\left[\lambda c_2 v t\right] \\ \approx &\ e^{\lambda t} \lambda c_2 v t \end{aligned}$$
  lo que implica que $Z'(t)$ es paralela a v
  Si $t \approx +\infty$, entonces
  $$Z'(t) = e^{\lambda t} t \left[\frac{\lambda c_1 v + c_2 v + \lambda c_2 v_2}{t} + \lambda c_2 v \right] \approx e^{\lambda t} \lambda c_2 t v$$
  lo que implica que $Z'(t)$ es paralela a v.

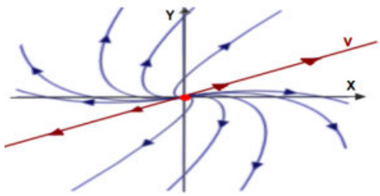


Figura 7.9: Nodo impropio inestable

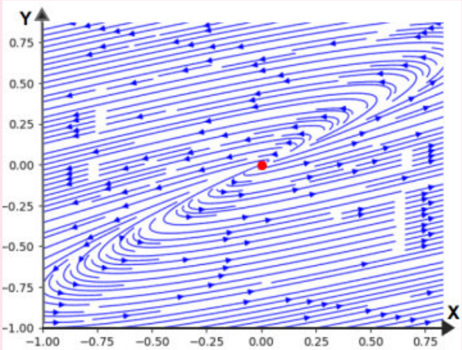
Ejemplo 7.7

Caracterice el punto de equilibrio del sistema lineal $X' = AX$ y dibuje el retrato fase donde

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Solución:

El determinante de la matriz A es $4 \neq 0$ entonces el único punto de equilibrio del sistema es $(0,0)$, luego resolviendo la ecuación característica de la matriz A obtenemos que su autovalor $\lambda = 2$ es de multiplicidad 2 , con un solo autovector $(2,1)$. El punto de equilibrio es un nodo impropio inestable.



- Caso 3: Los autovalores de la matriz A son números complejos conjugados $(\lambda = a \pm bi)$.

  Si $v = r \pm is$ es el correspondiente autovector, entonces

$$Z(t) = e^{at}\left[c_1\left(cos(bt)\,r - sen(bt)\,s\right) + c_2\left(sen(bt)\,r + cos(bt)\,s\right)\right]$$

  Si denotamos $V(t) = c_1\left(cos(bt)\,r - sen(bt)\,s\right) + c_2\left(sen(bt)\,r + cos(bt)\,s\right)$ se cumple que

$$Z(t) = e^{at}V(t)$$

  y

$$V\left(t + \frac{2\pi}{b}\right) = V(t)$$

  entonces V es una función periódica de periodo $\frac{2\pi}{b}$.

  - Considerando $a = 0$ el punto de equilibrio es llamado punto centro estable, además

$$Z(t) = V(t)$$

    y como $Z(t)$ es una función periódica, entonces las trayectorias del sistema serán cerradas.

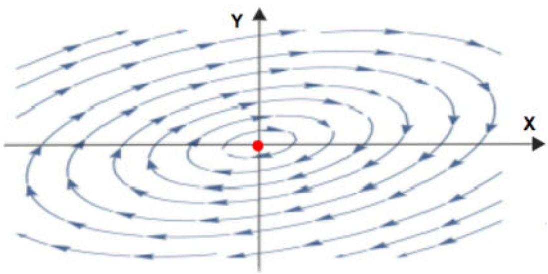


Figura 7.10: Punto centro estable

- Considerando $a < 0$ el punto de equilibrio es llamado punto espiral estable, además

$$Z(t) = e^{at}V(t)$$

Si $t \to +\infty$ entonces $Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Si $t \to -\infty$ entonces $Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \pm\infty \\ \pm\infty \end{bmatrix}$

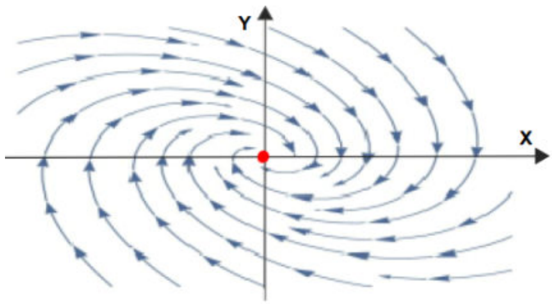


Figura 7.11: Punto espiral estable

- Considerando $a > 0$ el punto de equilibrio es llamado punto espiral inestable,

$$Z(t) = e^{at}V(t)$$

Si $t \to +\infty$ entonces $Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \pm\infty \\ \pm\infty \end{bmatrix}$

Si $t \to -\infty$ entonces $Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

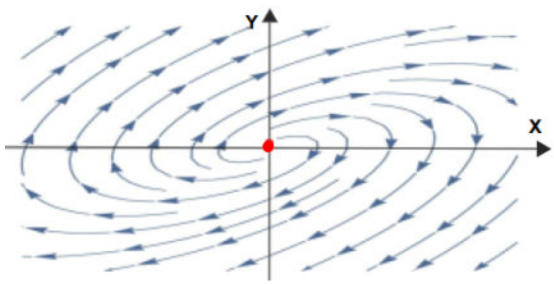


Figura 7.12: Punto espiral inestable

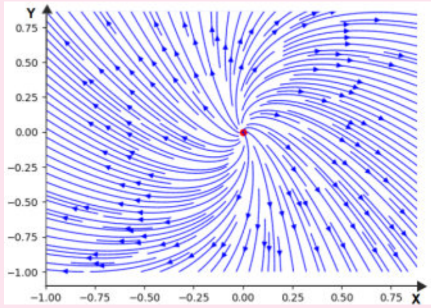
Del análisis hecho anteriormente, podemos caracterizar el punto de equilibrio de acuerdo a los autovalores obtenidos, como sigue:

Autovalores	Tipo de punto de equilibrio
Reales y negativos	Nodo estable
Reales y positivos	Nodo inestable
Reales y signo opuesto	Punto silla
Complejo y parte real negativa	Espiral estable
Complejo y parte real positiva	Espiral inestable
Complejo puro	Centro estable

Ejemplo 7.8

Caracterice el punto de equilibrio para el sistema lineal $X' = AX$ y grafique el retrato fase, donde

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}.$$



Solución: La determinante de la matriz A es $25 \neq 0$ entonces el único punto de equilibrio del sistema es $(0,0)$, luego resolviendo la ecuación característica de la matriz A obtenemos que sus autovalores son $\lambda = 5 \pm 2i$, con autovectores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix}$ luego el punto de equilibrio es espiral inestable.

7.1.2. Estabilidad en Sistemas Autónomos de primer orden

Estudiaremos el análisis cualitativo del sistema autónomo (en general no lineal) de la forma

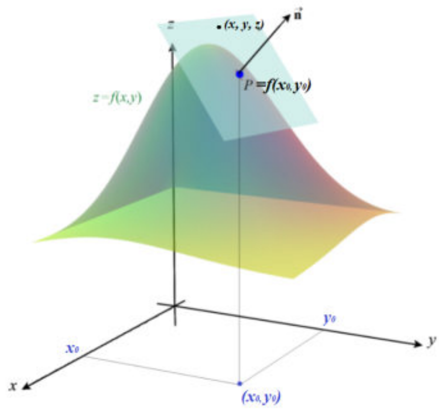
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x,y) \end{aligned} \tag{7.4}$$

siendo que F y G tienen derivadas parciales continuas.

En el estudio de este tipo de sistemas surge la interrogante natural, ¿por qué interesarnos en este tipo de sistemas? La razón principal es que muchos sistemas dinámicos biológicos y las ecuaciones que los describen son no lineales por la propia naturaleza de los fenómenos en cuestión.

Estamos interesados en hacer una clasificación similar de los puntos de equilibrio para este sistema tal como se hizo en el caso lineal. Para lograr esto recurriremos al cálculo elemental, un primer método para estudiar dichos sistemas es linealizar estas ecuaciones, es decir si tenemos $z = f(x,y)$ que define una superficie en el espacio. El plano tangente a esta superficie en el punto (x_0, y_0) tiene por ecuación

$$z = f(x_0,y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y$$



Este plano dará la mejor aproximación de

$$z = f(x,y)$$

en las proximidades del punto (x_0, y_0).

Por tanto, volviendo al sistema (7.4) tenemos que para F y G diferenciables podemos escribir

$$F(x,y) \approx F(x_0,y_0) + (x - x_0)\tfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\tfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$G(x,y) \approx G(x_0,y_0) + (x - x_0)\tfrac{\partial G}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\tfrac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0)$$

luego

$$\frac{dx}{dt} \approx F(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\frac{dy}{dt} \approx G(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)$$

En el caso que (x_0, y_0) sea un punto de equilibrio del sistema (7.4), el sistema se reduce a

$$\frac{dx}{dt} \approx (x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\frac{dy}{dt} \approx (x - x_0)\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)$$

reescribiendo de forma matricial obtenemos

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

de esta manera si definimos la matriz jacobiana $J(x, y)$ por

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}$$

podemos pensar que el sistema (7.4) se encuentra próximo al sistema lineal

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = J(x_0, y_0) \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

haciendo $u(t) = \begin{bmatrix} x(t) - x_0 \\ y(t) - y_0 \end{bmatrix}$ el último sistema se escribe

$$u' = J(x_0, y_0)u \tag{7.5}$$

pero con esto sólo conseguimos una aproximación local lineal del comportamiento cualitativo de la solución cerca de puntos de equilibrio. No obstante, en muchas situaciones físicas las aproximaciones lineales resultan ser adecuadas y válidas . Ello no altera para nada el hecho de que en muchas otras situaciones la linealización está fuera de lugar.

Definición Punto de equilibrio aislado

Un punto de equilibrio $\bar{p} = (x_0, y_0)$ es llamado aislado si existe una vecindad de (x_0, y_0) de manera que en esta vecindad no existe ningún otro punto de equilibrio.

Teorema 7.1 Teorema de Liapunov-Poincaré

Dado el sistema

$$x' = F(x, y)$$

$$y' = G(x, y)$$

un punto de equilibrio aislado (x_0, y_0) es llamado asintóticamente estable si y solo si la parte real de todos los autovalores de la matriz Jacobiana $J(x_0, y_0)$ son negativos.
Si la parte real de al menos un autovalor es positivo, el punto de equilibrio sera llamado inestable.

Teorema 7.2

Dado un punto de equilibrio aislado (x_0, y_0), si la parte real de los autovalores de la matriz jacobiana $J(x_0, y_0)$ son diferentes de cero, entonces el sistema (7.4) y su versión linealizada (7.5) tienen las mismas características de estabilidad (clasificación) en una vecindad del punto de equilibrio.

Observación

Si la parte real de alguno de los autovalores de la matriz jacobiana $J(x_0, y_0)$ fuese cero, no podremos concluir nada acerca de la estabilidad del sistema no lineal en el punto de equilibrio (x_0, y_0) sin antes hacer un análisis mas profundo.

Podemos reescribir la relación de autovalores relacionados con su estabilidad en la siguiente tabla, el termino **estabilidad lineal** se refiere a la estabilidad de los los puntos de equilibrio del sistema linealizado correspondiente, por otro lado el termino **estabilidad no lineal** se refiere a la estabilidad del punto de equilibrio en el sistema no lineal correspondiente.

autovalores		Estabilidad lineal	Estabilidad no lineal
Reales y negativos		Nodo estable	Nodo estable
Reales y positivos		Nodo inestable	Nodo inestable
Reales de signo opuesto		Punto silla	Punto silla
Complejos con parte real negativa		Espiral estable	Espiral estable
Complejos con parte real positiva		Espiral inestable	Espiral inestable
Complejo puro		centro estable	indeterminado

Ejemplo 7.9

Halle puntos de equilibrio del sistema

$$\begin{aligned} x' &= x(1-y) \\ y' &= y(2-x) \end{aligned}$$

y determine la aproximación lineal al sistema en cada punto de equilibrio.

Solución:

Encontraremos los puntos críticos resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x(1-y)=0 \Longrightarrow x=0 \quad \vee \quad 1-y=0 \\ y(2-x)=0 \Longrightarrow y=0 \quad \vee \quad x=2 \end{cases}$$

- Si $x=0 \Longrightarrow y=0$ luego $(0,0)$ es un punto de equilibrio.
- Si $y=1 \Longrightarrow x=2$ luego $(2,1)$ es un punto de equilibrio.

linealizamos el sistema en las proximidades de los puntos críticos obtenidos anteriormente a través del sistema

$$u' = J(x_0, y_0)u$$

donde $J(x,y) = \begin{bmatrix} 1-y & -x \\ -y & 2-x \end{bmatrix}$

- Considerando el punto de equilibrio (0,0)

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

esta matriz tiene autovalores reales y positivos $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$, luego el punto de equilibrio $(0,0)$ es un nodo inestable del sistema linealizado

$$u' = J(0,0)u,$$

además como la parte real de los autovalores son diferentes de cero, el punto de equilibrio $(0,0)$ tendrá la misma clasificación en el sistema inicial (no lineal).

- Considerando el punto de equilibrio $(2,1)$

$$J(2,1)=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

la solución de la ecuación característica de esta matriz es

$$det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}\right)=\lambda^2-2=0 \Longrightarrow \lambda=\sqrt{2} \quad y \quad \lambda=-\sqrt{2}$$

entonces, luego el punto de equilibrio $(2,1)$ es un punto silla del sistema linealizado

$$u'=J(2,1)u,$$

además como la parte real de los autovalores son diferentes de cero el punto de equilibrio $(2,1)$ tendrá la misma clasificación en el sistema inicial (no lineal).

Ejemplo 7.10

Determine y clasifique los puntos de equilibrio del sistema, luego esboce su diagrama fase.

$$\frac{dx}{dt}=x(x-1)$$

$$\frac{dy}{dt}=y\left(2+xy^2\right)$$

Solución:

Encontremos los puntos críticos resolviendo las ecuaciones

$$\begin{cases} x(x-1)=0 \Longrightarrow x=0 \quad \vee \quad x-1=0 \\ y\left(2+xy^2\right)=0 \Longrightarrow y=0 \quad \vee \quad 2+xy^2=0 \end{cases}$$

- Si $x=0 \Longrightarrow y=0$ luego $(0,0)$ es un punto de equilibrio.
- Si $x=1 \Longrightarrow y=0$ luego $(1,0)$ es un punto de equilibrio.

Linealizando el sistema en las proximidades de los puntos críticos obtenidos a través del sistema

$$u'=J(x_0,y_0)u$$

donde

$$J(x,y)=\begin{bmatrix} 2x-1 & 0 \\ y^3 & 2+3xy^2 \end{bmatrix}$$

- Considerando el punto de equilibrio (0,0)

$$J(0,0)=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

esta matriz tiene por autovalores a $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$ luego el punto de equilibrio $(0,0)$ es un punto silla del sistema linealizado

$$u'=J(0,0)u,$$

además como la parte real de los autovalores son diferentes de cero, el punto de equilibrio $(0,0)$ tendra la misma clasificación en el sistema inicial (no lineal).

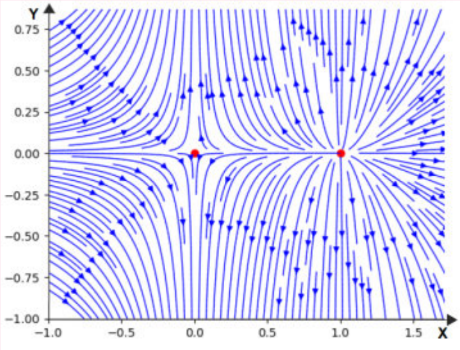
- Considerando el P.E.$(1, 0)$

$$J(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

esta matriz tiene por autovalores a $\lambda = 1, 2$, luego el punto de equilibrio $(1, 0)$ es un nodo inestable del sistema linearizado

$$u' = J(1,0)u,$$

además como la parte real de los autovalores son diferentes de cero el punto de equilibrio $(1, 0)$ tendrá la misma clasificación en el sistema inicial (no lineal).



Ejemplo 7.11

Determine y clasifique los puntos de equilibrio del sistema, luego esboce su diagrama fase.

$$\frac{dx}{dt} = x - y$$

$$\frac{dy}{dt} = y\,(2x + y - 3)$$

Solución:

Encontremos los puntoS críticos resolviendo las ecuaciones

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y\,(2x + y - 3) = 0 \end{cases} \implies \begin{array}{c} x = y \\ \\ y = 0 \quad \vee \quad 2x + y = 3 \end{array}$$

Si $y = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ es punto de equilibrio.

Si $2x + y = 3 = 0 \Longrightarrow 3x = 3$ (pues $x = y$) $\Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow (1, 1)$ es punto de equilibrio.

El sistema linealizado tendrá la forma

$$u' = J\,(x_0, y_0)\,u$$

donde

$$J\,(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2y & 2x + 2y - 3 \end{bmatrix}$$

- Considerando el punto de equilibrio (0,0)

$$J(0,0)=\left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{array}\right]$$

ya que esta matriz es triangular observemos que los autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -3$, por tanto considerando el sistema linealizado asociado a este punto de equilibrio

$$u' = J(0,0)u,$$

será caracterizado como punto silla, además ya que los autovalores son diferentes de cero este punto de equilibrio será caracterizado de manera similar para el sistema no lineal dado inicialmente.

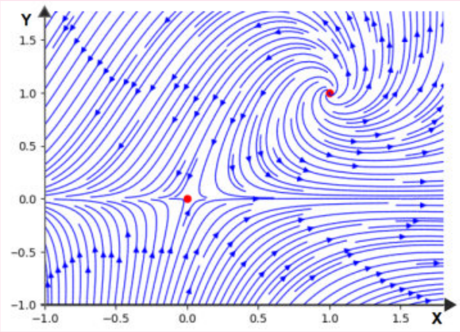
- Considerando el punto de equilibrio (1,1)

$$J(1,1)=\left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}\right]$$

hallemos sus autovalores

$$det\left[\begin{array}{cc} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{array}\right] = 0 \Longrightarrow (1-\lambda)^2 + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1+\sqrt{2}i \quad y \quad \lambda_2 = 1-\sqrt{2}i$$

en este caso los autovalores son números complejos con parte real positiva, por lo tanto considerando el sistema linealizado asociado a este punto de equilibrio $u' = J(1,1)u$, será caracterizado como espiral inestable, además ya que la parte real de los autovalores es diferente de cero este punto de equilibrio será caracterizado de manera similar para el sistema no lineal dado inicialmente.



Observación

Los diagramas de fases han sido realizados en python (ver código en apéndice A).

7.1.3. Aplicaciones

Modelo de Predador- Presa(Lotka-Volterra)

En este caso consideramos la interacción de dos especies. Una especie de predadores y la otra especie de presas. Para construir el modelo definiremos las variables como sigue

$x(t)$: población de presas en el tiempo t.

$y(t)$: población de predadores en el tiempo t.

Tengamos en cuenta que si no existiesen predadores, la población de presas crecería malthusianamente; mientras que si no hubiese presas, la especie predadora decrecería, también siguiendo un modelo malthusiano, es decir:

$$x'(t) = ax$$
$$y'(t) = -dy$$

donde

a :tasa de crecimiento de las presas en ausencia de predadores.

d : tasa de disminución de predadores en el caso de ausencia de presas.

Ahora bien, como ambas especies conviven en un mismo tiempo y se relacionan es necesario modificar ambas ecuaciones con un término que dependa de la interacción, beneficiosa para depredadores, desfavorable para presas, razón por la cual se toma con signo negativo en el crecimiento de presas y positivo en el de depredadores:

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax - b * interacción \\ y'(t) &= -dy + c * interacción \end{aligned}$$

donde

b : tasa de depredación de la presa.

c : tasa de beneficio del predador por la depredación.

entonces

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(a - by) \\ y'(t) &= y(cx - d) \end{aligned}$$

donde $a, b, c, d > 0$

Observemos que este sistema es no lineal con puntos de equilibrio $(0,0)$ y $(d/c, a/b)$. Calculando el jacobiano tenemos que

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} a - by & -bx \\ cy & cx - d \end{bmatrix}$$

- En el punto de equilibrio $(0,0)$

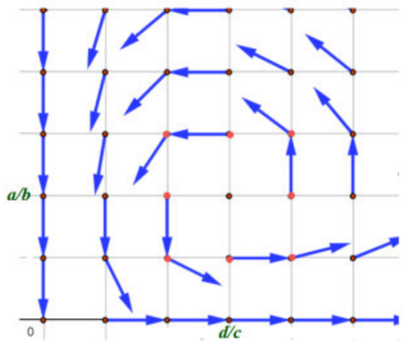
$$J(0,0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

  Luego los autovalores son $\lambda_1 = a > 0$ y $\lambda_2 = -d < 0$, consecuentemente el punto de equilibrio $(0,0)$ es un punto silla.

- En el punto de equilibrio $(d/c, a/b)$

$$J(d/c, a/b) = \begin{bmatrix} 0 & -bd/c \\ ca/b & 0 \end{bmatrix}$$

  luego los autovalores son $\lambda = \pm i\sqrt{ad}$. Entonces en la aproximación lineal el punto de equilibrio $(d/c, a/b)$ es un centro , sin embargo en este caso la clasificación de este punto de equilibrio en el sistema no lineal será indeterminado, luego para determinar su clasificación, calcularemos sus vectores de velocidad como sigue:



  por lo que deducimos que este punto de equilibrio es un centro o un punto espiral inestable, entonces en este caso para determinar las trayectorias de manera mas exacta se resolverá la ecuación diferencial dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cxy - dy}{ax - bxy}.$$

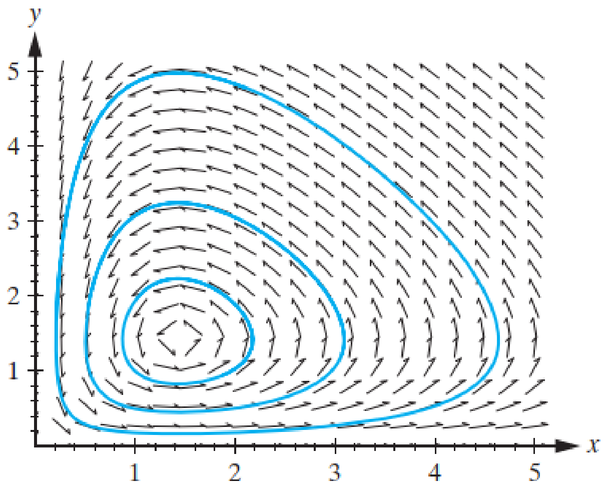
esta es una ecuación diferencial separable pues

$$\frac{(a-by)\,dy}{y}=\frac{(cx-d)\,dx}{x}$$

luego integrando se obtiene

$$a\ln|y|-by=cx-d\ln|x|+K$$

donde K es una constante arbitraria, al hacer la gráfica de esta ecuación dando valores específicos a los parámetros a,b, c y d se observa mas exactamente que las trayectorias serán cerradas en un vecindad del punto de equilibrio $(d/c, a/b)$ consecuentemente el diagrama de fase de este sistema tiene la forma



Por lo tanto, el modelo predice que la población de ambas especies tendrá un comportamiento periódico. El análisis cualitativo también indica por ejemplo que para pequeños valores iniciales de los predadores y presas, inicialmente las presas crecerán y la población de predadores se mantiene aproximadamente constante, luego desde que hay muchas presas, la población de predadores comienza a aumentar mientras que el número de presas decae. Este ciclo se repetirá.

Modelos Epidemiológicos simples

¿Cómo modelan los matemáticos la propagación de una enfermedad infecciosa? Complicando las cosas está el hecho de que diferentes tipos de enfermedades tienen todo tipo de características diferentes, y esas características deben reflejarse en las ecuaciones que utilizan los matemáticos.

Modelo SIR

Supongamos que un pequeño grupo de personas, que tiene una enfermedad infecciosa, migra a una población más grande. El problema que planteamos es el de saber si, cuando aumenta el tiempo, desaparecerá la enfermedad o por el contrario se presentará una epidemia. Supondremos también que la enfermedad otorga inmunidad permanente a cualquier individuo que se haya recuperado de ella, y además que su período de incubación es muy breve. Por lo tanto, un individuo que contrae la enfermedad se convierte rápidamente en agente de contagio. Dividiremos a la población en tres clases de individuos:

- La clase infectiva I, formada por todos aquellos individuos que están en condiciones de transmitir la enfermedad a otros.
- La clase susceptible S, formada por los individuos que no son agentes de transmitir la infección pero que están en condiciones de padecerla y volverse infecciosos.

- La clase de recuperados R, que la constituye los individuos que adquirieron la enfermedad y murieron, los que se han recuperado y son inmunes permanentemente, y los que fueron aislados hasta su recuperación y adquisición de inmunidad permanente.

Supongamos una población de tamaño fijo N que en un instante t se puede considerar dividida en tres clases: los susceptibles $S(t)$ (que se pueden infectar), los infecciosos $I(t)$(que están infectados y pueden transmitir la enfermedad), y los recuperados $R(t)$ (individuos inmunes a la enfermedad)
El flujo entre estas tres clases se puede describir como sigue

$$S \xrightarrow{b} I \xrightarrow{a} R$$

Para construir este modelo, tendremos en cuenta las siguientes hipótesis:

- En el intervalo de tiempo considerado, la población permanece en un nivel fijo N. Ello significa, que no hacemos caso de los nacimientos, muertes por causas ajenas a la enfermedad considerada, inmigración y emigración. Dado que podría haber interacción entre individuos susceptibles e infecciosos que puedan afectar negativamente a una porción de personas susceptibles. La rapidez de variación de la población susceptible es proporcional al producto del número de miembros de $S(t)$ y de $I(t)$.

$$\frac{dS}{dt} = -bSI$$

- Luego si restas esas personas a la categoría de susceptibles la agregas a la categoría de infecciosos, por otro lado los individuos que se retiran de la clase infecciosa $I(t)$, lo hacen según una tasa proporcional al tamaño de $I(t)$

$$\frac{dI}{dt} = bSI - aI$$

- Los individuos que se retiran de la clase infecciosa $I(t)$ se agregan a la categoría de recuperados entonces la dinámica seria

$$\frac{dR}{dt} = aI$$

De estas hipótesis es inmediato deducir que $S(t), I(t)$ y $R(t)$ cumplen el siguiente sistema:

$$\frac{dS}{dt} = -bSI$$
$$\frac{dI}{dt} = bSI - aI$$
$$\frac{dR}{dt} = aI$$

donde
b es la tasa de infección.
a es la tasa de recuperación.
Notese que

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = -bSI + bSI - aI + aI = 0$$

entonces $\frac{d}{dt}(S + I + R) = 0$. Para analizar el sistema, se supone que en el instante cero

$$S(0) > 0, I(0) > 0, R(0) = 0$$

Una cuestión de interés es saber si la epidemia se va a extender, es decir si $I(t) > I(0)$ para $t > 0$.

Como $R(t) = N - S(t) - I(t)$ entonces el sistema SIR dado inicialmente puede reducirse al siguiente sistema de dos ecuaciones

$$\frac{dS}{dt} = -bSI \qquad S(t_0) = S_0$$
$$\frac{dI}{dt} = bSI - aI \qquad I(t_0) = I_0$$

las orbitas de este sistema son las curvas soluciones de la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dI}{dS} = \frac{bSI - aI}{-bSI} = -1 + \frac{a}{bS}$$

Para analizar el comportamiento de las curvas anteriores, estudiamos el signo de $I'(S)$. Definiendo $c := \frac{a}{b}$, entonces $\frac{dI}{dS} < 0$ si $S > c$, y positiva para $S < c$. Por tanto, $I(S)$ es una función de S que es creciente para valores de $S < c$ y decreciente para $S > c$.

Es importante notar que $S(t)$ decrece, $R(t)$ crece y que si $S(0)$ es menor que c, como $S(t) < S(0)$ entonces $S(t) < c$ para $t > 0$ luego $I(t)$ decrece monótonamente en el tiempo ya que $\frac{dI}{dt} < 0$ desde que $\frac{dI}{dS} = \frac{\frac{dI}{dt}}{\frac{dS}{dt}} > 0$. Por otro lado, si $S(0) > c$ entonces

$$\frac{dI(0)}{dt} = (bS(0) - a)I(0) > 0$$

luego I crecerá por lo menos en las proximidades de $t = 0$.

No podemos resolver la dinámica del modelo SIR de forma analítica, pero podemos hacer simulaciones que ayuden a explorar su solución analítica. En resumen, si se incluye un pequeño grupo de infecciosos I_0

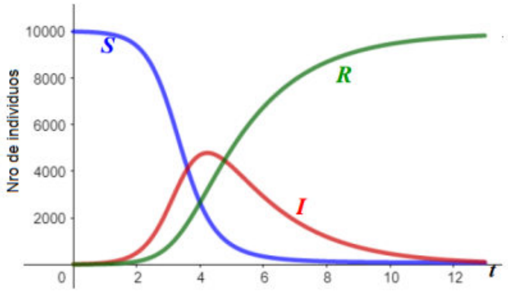


Figura 7.13: Modelo SIR caso epidemiológico

en un grupo susceptible S_0, con $S(0) < c$, entonces la enfermedad desaparecerá rápidamente, por otro lado si $S(0) > c$, entonces $I(t)$ crece, es decir la enfermedad se puede extender mientras $S(t)$ decrece hasta el valor de c, momento en que $I(t)$ alcanza su valor máximo cuando $S = c$, luego $I(t)$ empieza a decrecer solamente cuando el número de susceptibles se encuentra por debajo del valor de umbral c. De estos resultados se puede concluir que se presentará una epidemia sólo si el número de susceptibles en la población excede el valor de umbral $c = b/a$.

El valor $S(0)/c$ se denomina número reproductivo de infección y se denomina generalmente R_0, la cantidad R_0 es de gran importancia en epidemiología, ya que indica si la infección se puede extender. Es la clave para comprender porqué los programas de vacunación funcionan y explica porque no es necesario vacunar a todos contra la enfermedad infecciosa, pues mientras el número de individuos susceptibles sea menor que c, la infección no se extenderá. c viene a ser un dato teórico, sin embargo en la práctica se deberá tener en cuenta otros factores adicionales que influyen en la posible extensión de una infección, por ejemplo la proximidad de los individuos infectados.

Modelo SEIR

Ahora generalizaremos el modelo SIR, este nuevo modelo incluye una cuarta categoría, esta es la categoría E de expuestos. La razón de esta categoría es que cuando te infectas por primera vez con una enfermedad, a menudo no tienes síntomas de inmediato y es posible que en realidad no estés propagando la enfermedad a otras personas, es posible que actualmente no seas infeccioso. Sin embargo, realmente lo has recibido. Es como un período de latencia mientras la infección se está desarrollando dentro de alguien. Después de algún tiempo, estas personas expuestas luego pasarían a ser infecciosas, donde podrían infectar a otras personas y luego recuperadas después de eso. Es muy similar al modelo SIR, pero hay un par de cosas que han cambiado. El flujo entre estas cuatro clases se puede describir como sigue

$$S \xrightarrow{bI} E \xrightarrow{a} I \xrightarrow{c} R$$

Para construir este modelo, tendremos en cuenta las siguientes hipótesis:

- En el intervalo de tiempo considerado, la población permanece en un nivel fijo N. Ello significa, que no hacemos caso de los nacimientos, muertes por causas ajenas a la enfermedad considerada, inmigración y emigración. Es decir,

  $$N = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$$

  Por otro lado dado que podría haber interacción entre individuos susceptibles e infecciosos que puedan afectar negativamente a una porción de personas susceptibles. La rapidez de variación de la población susceptible es proporcional al producto del número de miembros de $S(t)$ y de $I(t)$.

  $$\frac{dS}{dt} = -bSI$$

- En este caso si restas esas personas a la categoría de susceptibles la agregas a la categoría de expuestos(debido al periodo de latencia), también los individuos que se retiran de la clase expuestos $E(t)$, lo hacen según una tasa proporcional al tamaño de $E(t)$

  $$\frac{dE}{dt} = bSI - aE$$

- Los individuos que se retiran de la clase de expuestos $E(t)$ se agregan a la categoría de infecciosos $I(t)$, a su vez los individuos que se retiran de la clase infecciosos $I(t)$, lo hacen según una tasa proporcional al tamaño de $I(t)$ entonces la dinámica seria

  $$\frac{dI}{dt} = aE - cI$$

- Los individuos que se retiran de la clase infecciosa $I(t)$ se agregan a la categoría de recuperados entonces la dinámica seria

  $$\frac{dR}{dt} = cI$$

De estas hipótesis es inmediato deducir que $S(t), E(t), I(t)$ y $R(t)$ cumplen el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -bSI \\
\frac{dE}{dt} &= bSI - aE \\
\frac{dI}{dt} &= aE - cI \\
\frac{dR}{dt} &= cI
\end{aligned}$$

donde

- b probabilidad de infección.
- a es probabilidad de pasar de pasar de latente a infectado.
- c probabilidad de recuperación.

No podemos resolver la dinámica del modelo SEIR de forma analítica, pero podemos hacer simulaciones que ayuden a explorar su solución analítica.

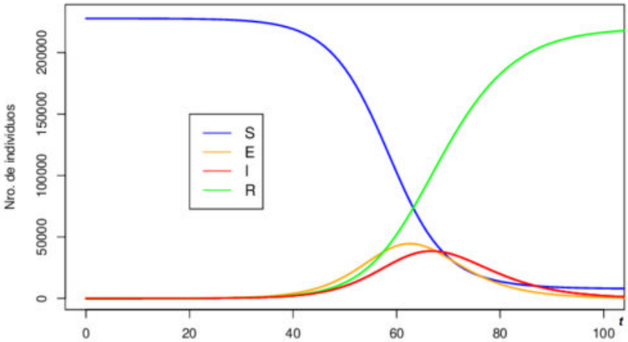


Figura 7.14: Modelo SEIR caso epidemiológico

7.2. Ejercicios resueltos

1. Dado el sistema no lineal

$$\begin{aligned} x' &= x - y^2 \\ y' &= y(9x-4) \end{aligned}$$

   a) Encuentre los puntos de equilibrio.
   b) Clasifique los puntos de equilibrio.

   Solución:

   a) Puntos de equilibrio, para ello resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x - y^2 = 0 &\implies x = y^2 \\ y(9x-4) = 0 &\implies y = 0 \quad \vee \quad 9x - 4 = 0 \end{aligned}$$

   Si $y = 0 \implies x = 0 \implies (0,0)$.
   Si $x = \frac{4}{9} \implies y = \frac{2}{3} \implies \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{3}\right)$.
   Si $x = \frac{4}{9} \implies y = -\frac{2}{3} \implies \left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{3}\right)$.
   Por lotanto, son puntos de equilibrio son $(0,0)$, $\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{3}\right)$ y $\left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{3}\right)$.

   b) Para clasificar los puntos de equilibrio calculemos el jacobiano

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & -2y \\ 9y & 9x-4 \end{bmatrix}$$

   Al evaluar el jacobiano en cada punto de equilibrio se tiene:

   - $J(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$, los autovalores de $J(0,0)$ son $\lambda = 1, -4$ entonces $(0,0)$ es un punto silla.

- $J\left(\frac{4}{9},\frac{2}{3}\right)=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$, los autovalores de $J\left(\frac{4}{9},\frac{2}{3}\right)$ son $\lambda=\frac{1\pm\sqrt{31}i}{2}$ entonces $\left(\frac{4}{9},\frac{2}{3}\right)$ es un punto espiral inestable.
- $J\left(\frac{4}{9},-\frac{2}{3}\right)=\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$, los autovalores de $J\left(\frac{4}{9},-\frac{2}{3}\right)$ son $\lambda=\frac{1\pm\sqrt{31}i}{2}$ entonces $\left(\frac{4}{9},-\frac{2}{3}\right)$ es un punto espiral inestable. Como los autovalores del sistema linealizado tienen parte real diferente de cero la caracterización de dichos puntos es la misma para el sistema original.

2. Una interacción de competencia se describe con el modelo de Lotka- Volterra dado por

$$x'=0{,}004x(50-x-0{,}75y)$$

$$y'=0{,}001y(100-y-3x)$$

Clasifique los puntos críticos del sistema.
Solución:
Calculemos los puntos críticos, entonces

$$\begin{aligned} 0{,}004x(50-x-0{,}75y)= &\quad 0\Longrightarrow x=0 \quad\vee\quad x+0{,}75y=50 \\ 0{,}001y(100-y-3x)= &\quad 0\Longrightarrow y=0 \quad\vee\quad y+3x=100 \end{aligned}$$

- Si $x=0$ entonces $y=0$ o $y=100$
- Si $y=0)$ entonces $x=50$
- Si $x+0{,}75y=50$ y $y+3x=100$ se tiene $x=20$ e $y=40$.

Por lo tanto $(0,0)$, $(0,100)$, $(50,0)$ y $(20,40)$ son los puntos de equilibrio del sistema.

Para clasificar los puntos de equilibrio linealizamos, para ello calculamos el jacobiano

$$J(x,y)=\begin{bmatrix} 0{,}2-0{,}008x-0{,}003y & -0{,}003x \\ -0{,}003y & 0{,}1-0{,}002y-0{,}003x \end{bmatrix}$$

- Para $(0,0)$

$$J(0,0)=\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

sus autovalores son $\lambda=0{,}2$ y $\lambda=0{,}1$ luego el punto de equilibrio $(0,0)$ es un nodo inestable.

- Para $(0,100)$

$$J(0,100)=\begin{bmatrix} -0{,}1 & 0 \\ -0{,}3 & -0{,}1 \end{bmatrix}$$

sus autovalores son $\lambda=-0{,}1$ y $\lambda=-0{,}1$ luego el punto de equilibrio $(0,100)$ es un nodo estable.

- Para $(50,0)$

$$J(50,0)=\begin{bmatrix} -0{,}2 & -0{,}15 \\ 0 & -0{,}05 \end{bmatrix}$$

sus autovalores son $\lambda=-0{,}2$ y $\lambda=-0{,}05$ luego el punto de equilibrio $(50,0)$ es un nodo estable.

- Para $(20,40)$

$$J(20,40)=\begin{bmatrix} -0{,}08 & -0{,}06 \\ -0{,}12 & -0{,}04 \end{bmatrix}$$

sus autovalores son $\lambda = \frac{-3+\sqrt{19}}{50}$ y $\lambda = \frac{-3-\sqrt{19}}{50}$ luego el punto de equilibrio $(20,40)$ es un punto silla.

Como los autovalores del sistema linearizado tienen parte real diferente de cero la caracterización de dichos puntos es la misma que el sistema original.

3. Dado el sistema no lineal $\begin{array}{l} x' = xy - x \\ y' = 2x - 3y \end{array}$.

   a) Determine y clasifique los puntos de equilibrio.

   b) Dibuje el diagrama fase del sistema.

Solución:

a) Para encontrar los puntos de equilibrio del sistema resolveremos el sistema

$$\begin{aligned} xy - x = 0 \quad &\Rightarrow x(y-1) = 0 \\ 2x - 3y = 0 \quad &\Rightarrow 2x = 3y \end{aligned}$$

- Si $x = 0 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow (0,0)$.
- Si $y = 1 \Longrightarrow 2x = 3 \Longrightarrow \left(\frac{3}{2},1\right)$.

Luego los puntos de equilibrio son $(0,0)$ y $\left(\frac{3}{2},1\right)$. Para clasificar los puntos de equilibrio calcularemos la matriz Jacobiana

$$J(x,y)=\begin{bmatrix} y-1 & x \\ 2 & -3 \end{bmatrix},$$

luego evaluamos dicha matriz en cada punto de equilibrio

- Para el punto de equilibrio $(0,0)$ el sistema linealizado es $z' = J(0,0)z$ donde

$$J(0,0)=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

  y sus autovalores son $\lambda = -1$, $\lambda = -3$, entonces el punto de equilibrio $(0,0)$ es un nodo estable.

- Para el punto de equilibrio $\left(\frac{3}{2},1\right)$ el sistema linealizado es $z' = J\left(\frac{3}{2},1\right)z$ donde

$$J\left(\frac{3}{2},1\right)=\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

  y sus autovalores son $\lambda = \frac{-3+\sqrt{21}}{2}$ y $\lambda = \frac{-3-\sqrt{21}}{2}$, entonces el punto de equilibrio $\left(\frac{3}{2},1\right)$ es un punto silla. Como los autovalores del sistema linealizado tienen parte real diferente de cero la caracterización de dichos puntos es la misma que el sistema original.

b) El diagrama de fase es:

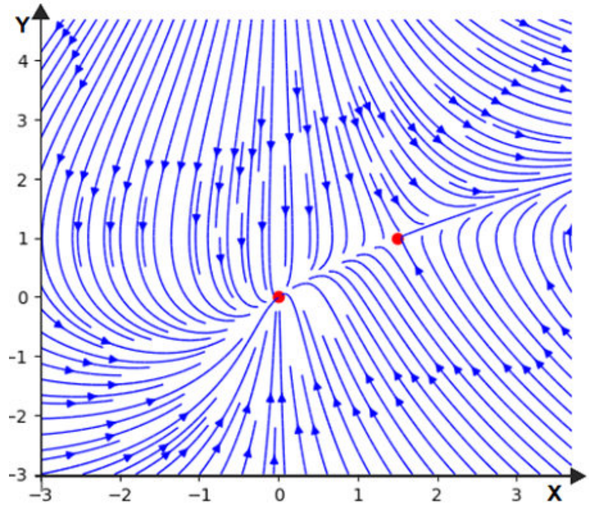


Figura 7.15: Diagrama fase del sistema $\begin{array}{l} x' = xy - x \\ y' = 2x - 3y \end{array}.$

4. Dado el sistema

$$\begin{aligned} x' &= 2\left(1 - \tfrac{x}{3}\right) - xy \\ y' &= -2y + 4xy \end{aligned}$$

a) Determinar y clasificar los puntos críticos.

b) Esboce el diagrama de fase.

Solución:

a) Para determinar los puntos de equilibrio resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 2\left(1 - \tfrac{x}{3}\right) - xy = &\ 0 \\ -2y + 4xy = &\ 0 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} 2 - \tfrac{2x}{3} - xy &= 0 \\ (-2 + 4x)\,y &= 0 \quad \Longrightarrow -2 + 4x = 0 \quad o \quad y = 0 \end{aligned}$$

- Si $-2 + 4x = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2} \Longrightarrow y = \frac{10}{3} \Longrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right)$.
- Si $y = 0 \Longrightarrow x = 3 \Longrightarrow (3, 0)$.

Luego los puntos de equilibrio son $\left(\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right)$ y $(3, 0)$.
Para clasificar los puntos de equilibrio determinamos la matriz Jacobiana

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} - y & -x \\ 4y & -2 + 4x \end{bmatrix},$$

luego evaluamos dicha matriz en cada punto de equilibrio

- Para el punto de equilibrio $\left(\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right)$ el sitema linearizado es $z' = J(\frac{1}{2}, \frac{10}{3})z$ donde

$$J(\frac{1}{2}, \frac{10}{3}) = \begin{bmatrix} -4 & -\frac{1}{2} \\ \frac{40}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

y sus autovalores son $\lambda = \frac{-12 \pm \sqrt{-96}}{6}$, entonces el punto de equilibrio $\left(\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right)$ es un nodo espiral estable.

- Para el punto de equilibrio $(3, 0)$ el sitema linearizado es $z' = J(3, 0)z$ donde

$$J(3, 0) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -3 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

y sus autovalores son $\lambda = -\frac{2}{3}$ y $lambda = 10$, entonces el punto de equilibrio $(3, 0)$ es un punto silla. Como los autovalores del sistema linearizado tienen parte real diferente de cero la caracterización de dichos puntos es la misma que el sistema original.

b) El retrato fase es:

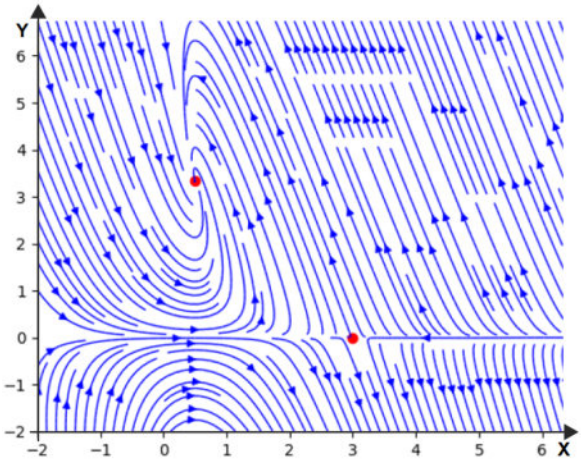


Figura 7.16: Diagrama de fase del sistema $\begin{aligned} x' &= 2\left(1 - \frac{x}{3}\right) - xy \\ y' &= -2y + 4xy \end{aligned}$

5. Dado el sistema

$$\begin{aligned} x' &= x - y \\ y' &= senx \end{aligned}$$

a) Determine y clasifique el o los puntos de equilibrio del sistema.

b) Esboce el diagrama de fases.

Solución:

a) Para determinar los puntos de equilibrio resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} x - y = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x = y \\ senx = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x = n\pi \quad \text{donde } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

luego $(n\pi, n\pi)$ donde $n \in \mathbb{Z}$ son los puntos de equilibrio de este sistema. Para clasificar estos puntos, linealizamos el sistema dado, para esto es necesario calcular la matriz jacobiana asociada a este sistema

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ cosx & 0 \end{bmatrix}$$

luego evaluando la matriz jacobiana en cada punto de equilibrio obtenemos

$$J(n\pi, n\pi) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ (-1)^n & 0 \end{bmatrix},$$

así tenemos que

- Si n es par $J(n\pi, n\pi) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, entonces su ecuación característica es

$$det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0,$$

  y sus autovalores son $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ ya que los autovalores son complejos y la parte real es positiva, entonces los puntos de equilibrio se clasifican como espirales inestables.

- Si n es impar $J(n\pi, n\pi) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, entonces su ecuación característica es

$$det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0,$$

  luego sus autovalores son $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Y $\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ya que los autovalores son reales y de signos opuestos, entonces los puntos de equilibrio se clasifican como puntos silla. Además como los autovalores del sistema linealizado tienen parte real diferente de cero la caracterización de dichos puntos es la misma que el sistema original.

b) El diagrama de fase respectivo es:

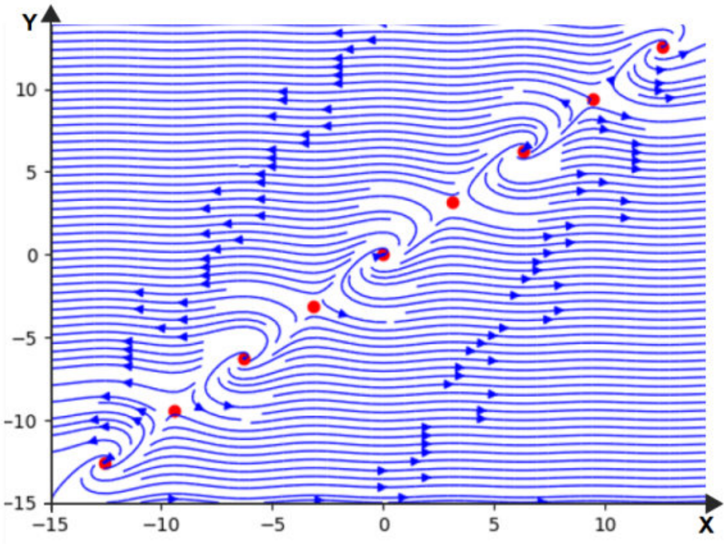


Figura 7.17: Diagrama de fase del sistema $\begin{matrix} x' = x - y \\ y' = senx \end{matrix}$

6. Dado el sistema no lineal

$$\begin{aligned} x' &= x - y^2 \\ y' &= y(9x - 4) \end{aligned}$$

a) Determine los puntos de equilibrio.

b) Clasifique los puntos de equilibrio obtenidos en la parte a)

c) Dibujar el diagrama fase de este sistema.

Solución:

a) Para encontrar los puntos de equilibrio resolveremos las ecuaciones

$$x - y^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad y(9x-4) = 0,$$

obtenemos que $(0,0)$, $\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{3}\right)$ y $\left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{3}\right)$ son los puntos de equilibrio del sistema.

b) Para clasificarlos linearizamos el sistema, entonces obtenemos

$$u' = J(x_0, y_0)\,u$$

donde $J(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & -2y \\ 9y & 9x-4 \end{bmatrix}$, luego evaluemos los puntos de equilibrio en la matriz jacobiana

- $J(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ luego los autovalores de esta matriz son $\lambda = 1$ y $\lambda = -4$, entonces $(0,0)$ es un punto silla.
- $J\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ luego los autovalores de esta matriz son $\lambda = \frac{1+\sqrt{31}i}{2}$ y $\lambda = \frac{1-\sqrt{31}i}{2}$, entonces $\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{3}\right)$ es punto espiral inestable.
- $J\left(\left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ luego los autovalores de esta matriz son $\lambda = \frac{1+\sqrt{31}i}{2}$ y $\lambda = \frac{1-\sqrt{31}i}{2}$, entonces $\left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{3}\right)$ es punto espiral inestable.

c) El diagrama de fase respectivo es

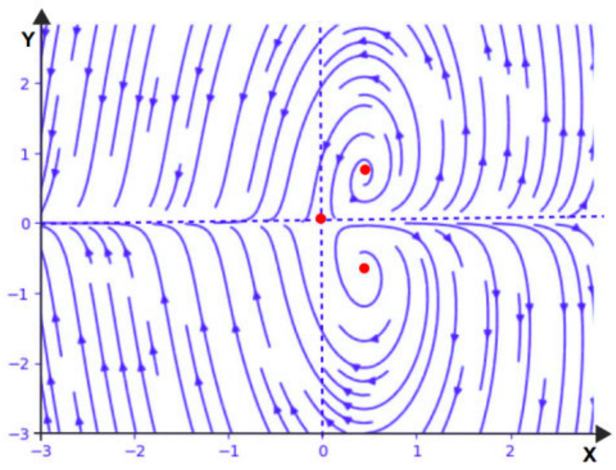


Figura 7.18: Diagrama de fase del sistema $\begin{aligned} x' &= x - y^2 \\ y' &= y(9x-4) \end{aligned}$

7.3. Ejercicios propuestos

1. Dado el sistema $Y' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} Y$. clasifique el punto critico $(0,0)$.

2. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones

   a) Los sistemas $x' = Ax$ y $x' = 2Ax$ tienen la misma clasificación para sus respectivos puntos de equilibrio.

   b) Para un punto de equilibrio silla $(0,0)$, las únicas trayectorias que se aproximan a un punto de equilibrio (0,0) cuando $t \to +\infty$ son aquellas en dirección de el autovector correspondiente al autovalor positivo.

   c) El punto de equilibrio del sistema $x' = Ax$ que tiene dos autovalores positivos es un nodo inestable.

3. Hallar los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas, estudiar su estabilidad y esbozar su diagrama de fase.

   a) $\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= x^2 + y \end{aligned}$ *b*) $\begin{aligned} x' &= y + 1 \\ y' &= x^2 + \alpha y^2 \end{aligned}$ *c*) $\begin{aligned} x' &= 1 - xy \\ y' &= y - x^3 \end{aligned}$ *d*) $\begin{aligned} x' &= e^x - 1 \\ y' &= -ye^x \end{aligned}$

4. Determinar los puntos de equilibrio del sistema dado y si existen clasificarlos, presente su retrato fase

   a) $\begin{aligned} x' &= 2x - x^2 \\ y' &= -y + xy \end{aligned}$ *d*) $\begin{aligned} x' &= y^5 \\ y' &= -x^3 \end{aligned}$ *g*) $\begin{aligned} x' &= x + 3y^2 \\ y' &= y(x-2) \end{aligned}$

   b) $\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= (x-1)(1+y^3) \end{aligned}$ *e*) $\begin{aligned} x' &= y(3x-2) \\ y' &= 2x - 9y^2 \end{aligned}$ *h*) $\begin{aligned} x' &= 2x + 5y^2 \\ y' &= y(3-4x) \end{aligned}$

   c) $\begin{aligned} x' &= x - 3y^2 \\ y' &= -y \end{aligned}$ *f*) $\begin{aligned} x' &= x - y^2 \\ y' &= y(9x-4) \end{aligned}$ *i*) $\begin{aligned} x' &= 2y + sen(x) \\ y' &= x(cos(y) - 2) \end{aligned}$

5. Considere el modelo predador - presa

$$\frac{dx}{dt} = x(2-y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(x-2)$$

   Represente el diagrama fase para $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 10$. Compare el comportamiento especifico para dos casos específicos correspondientes a la condición inicial

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}1 \end{bmatrix} \text{y} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. Considere el modelo predador - presa

$$\frac{dx}{dt} = x\,(3-x-y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y\,(x-1)$$

   Represente el diagrama fase y determine que sucede con las poblaciones de ambas especies cuando $t \to +\infty$.

Apéndice A - EDOs con Python.

EDOs con Python.

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Resolver la ecuación

$$y' - \frac{1}{x^2} = 0$$

código en python

```
from sympy import *
x=symbols('x')
y=Function('y')('x')
ecuacion = Eq(diff(y,x)-1/x**2,0)
display(ecuacion)
dsolve(ecuacion)
```

Solución: $y(x) = C_1 - \frac{1}{x}$

Resolver el PVI

$$y' - \frac{1}{x^2} = 0, y(1) = 0$$

código en python

```
from sympy import *
x=symbols('x')
y=Function('y')('x')
ecuacion = Eq(diff(y,x)-1/x**2,0)
display(ecuacion)
dsolve(ecuacion,ics={y.subs(x, 1): 0})
```

Solución: $y(x) = 1 - \frac{1}{x}$

Resolver el PVI

$$y' - y = -cos(t), y(0) = 1/4$$

código en python

```
from sympy import *
x=symbols('x')
y=Function('y')('x')
ecuacion = Eq(diff(y,x)-y,-cos(x))
display(ecuacion)
dsolve(ecuacion)
```

Solución:

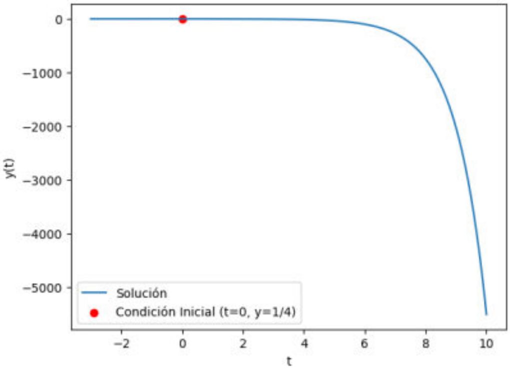
$$y(x) = -0{,}25e^{x} - \frac{sen(x)}{2} + \frac{cos(x)}{2}$$

Graficar la solución del PVI

$$y' - y = -cos(t), y(0) = 1/4$$

código en python

```
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Definir símbolos y funciones
t = sp.symbols('t')
y = sp.Function('y')

# Definir la ecuación diferencial
ecuacion_diferencial = sp.Eq(y(t).diff(t), y(t)-cos(t))

# Definir la condición inicial y(0) = 1/4
condicion_inicial = {y(0): 1/4}

# Resolver la ecuación diferencial con dsolve
solucion = sp.dsolve(ecuacion_diferencial, ics=condicion_inicial)

# Obtener la solución en forma funcional
solucion_funcional = solucion.rhs

# Convertir la solución funcional a una función numérica
y_numerica = sp.lambdify(t, solucion_funcional, 'numpy')

# Graficar la solución
t_valores = np.linspace(-3, 10, 10000)
y_valores = y_numerica(t_valores)

plt.plot(t_valores, y_valores, label='Solución')
plt.scatter([0], [1/4], color='red', label='Condición Inicial (t=0, y=1/4)')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('y(t)')
plt.legend()
plt.show()
```



Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

Resolver la ecuación

$$y'' + 2y' + y = 0$$

código en python

```
from sympy import symbols, Function, Eq, Derivative, dsolve

x = symbols('x')
y = symbols('y', cls=Function)
eq = Eq(Derivative(y(x), x, 2) + 2*Derivative(y(x), x, 1) + y(x), 0)

# Condiciones iniciales
ics = {y(0): 0, y(x).diff(x).subs(x, 0): 0}
# Resolver la ecuación diferencial
sol = dsolve(eq,y(x))
print(sol)
```

Solución: $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-x}$

Resolver la ecuación

$$y'' + 2y' + y = cos(x)$$

código en python

```
from sympy import symbols, Function, Eq, Derivative, dsolve,cos

x = symbols('x')
y = symbols('y', cls=Function)
eq = Eq(Derivative(y(x), x, 2) + 2*Derivative(y(x), x, 1) + y(x), cos(x))

# Condiciones iniciales
ics = {y(0): 0, y(x).diff(x).subs(x, 0): 0}
# Resolver la ecuación diferencial
sol = dsolve(eq, y(x))
print(sol)
```

Solución:
$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + \frac{sen(x)}{2}$

Resolver el PVI

$$y'' + 2y' + y = cos(x), y(0) = 0, y'(0) = 0$$

código en python

```
from sympy import symbols, Function, Eq, Derivative, dsolve,cos

x = symbols('x')
y = symbols('y', cls=Function)
eq = Eq(Derivative(y(x), x, 2) + 2*Derivative(y(x), x, 1) + y(x), cos(x))
# Condiciones iniciales
sol=dsolve(eq, y(x),ics={y(0): 0, y(x).diff(x).subs(x, 0): 0})
print(sol)
```

Solución:
$$y(x) = -\frac{xe^{-x}}{2} + \frac{sen\,(x)}{2}$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

Resolver la ecuación

$$y^{(4)} + 5y^{(2)} + 4y = 0$$

código en python

```
from sympy import symbols, Function, Eq, Derivative, dsolve,cos
x= symbols('x'); y = symbols ('y', cls = Function)
eq = Eq(Derivative(y(x),x,4)+5*Derivative(y(x),x,2)+4*y(x),0); #
sol=dsolve(eq, y(x))
print(sol)
```

Solución:
$$y\,(x) = C_1 sen\,(x) + C_2 sen\,(2x) + C_3 cos\,(x) + C_4 cos(2x)$$

Resolver la ecuación

$$y^{(4)} + 5y^{(2)} + 4y = xsen\,(x)$$

código en python

```
from sympy import symbols, Function, Eq, Derivative, dsolve,sin
x= symbols('x'); y = symbols ('y', cls = Function)
eq = Eq(Derivative(y(x),x,4)+5*Derivative(y(x),x,2)+4*y(x),x*sin(x)); #
sol=dsolve(eq, y(x))
print(sol)
```

Solución: $y\,(x) = C_1 sen\,(x) + C_2 sen\,(2x) + C_3 cos\,(x) + C_4 cos(2x) - \frac{xsen(x)}{36} - \frac{x^2 cos(x)}{12}$

Resolver el PVI

$$y^{(4)} + 5y^{(2)} + 4y = 4, y\,(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y^{(3)}(0) = 0$$

código en python

```
from sympy import symbols, Function, Eq, Derivative, dsolve,sin
x= symbols('x'); y = symbols ('y', cls = Function)
eq = Eq(Derivative(y(x),x,4)+5*Derivative(y(x),x,2)+4*y(x),4); #
sol=dsolve(eq, y(x),ics={y(0): 0, y(x).diff(x).subs(x, 0): 0,
y(x).diff(x,2).subs(x, 0): 0,y(x).diff(x,3).subs(x, 0): 0})
print(sol)
```

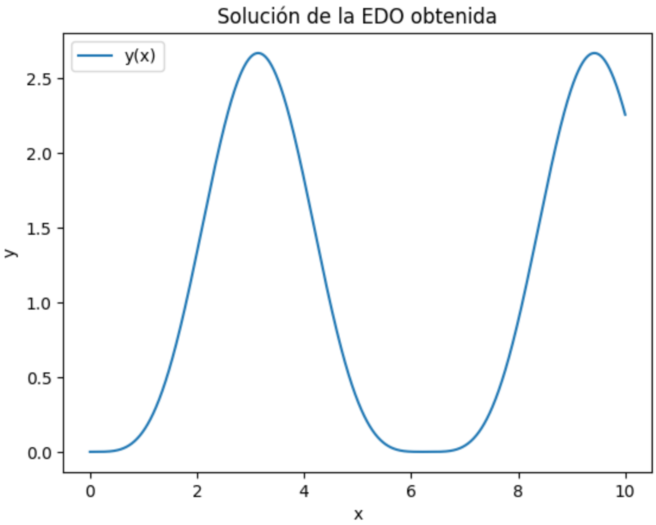
Solución:
$$y\,(x) = -\frac{4cos(x)}{3} + \frac{cos(2x)}{3} + 1$$

Graficar la solución del PVI

$$y^{(4)} + 5y^{(2)} + 4y = 4, y\,(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y^{(3)}(0) = 0$$

código en python

```
from sympy import symbols, Function, Eq, Derivative, dsolve, sin
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

x = symbols('x')
y = symbols('y', cls=Function)
eq = Eq(Derivative(y(x), x, 4) + 5*Derivative(y(x), x, 2) + 4*y(x), 4)

# Condiciones iniciales
ics = {y(0): 0, y(x).diff(x).subs(x, 0): 0, y(x).diff(x, 2).subs(x, 0): 0, y(x).diff(x,

# Resolver la ecuación diferencial
sol = dsolve(eq, y(x), ics=ics)

# Extraer la expresión simbólica de la solución
solucion_expresion = sol.rhs

# Convertir la expresión simbólica a una función numérica
solucion_numerica = lambdify(x, solucion_expresion, 'numpy')

# Definir puntos de tiempo para la gráfica
x_vals = np.linspace(0, 10, 1000)

# Evaluar la solución numérica en los puntos de tiempo
y_vals = solucion_numerica(x_vals)

# Graficar la solución
plt.plot(x_vals, y_vals, label='y(x)')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Solución de la EDO obtenida')
plt.legend()
plt.show()
```



Resolver el sistema

$$x' = -2x + y$$
$$y' = 3x + 4y$$

código en python

```
from sympy import symbols, Function, Eq, dsolve, exp

# Definir símbolos y funciones
t = symbols('t')
x, y = symbols('x y', cls=Function)

# Definir el sistema de ecuaciones diferenciales
eq1 = Eq(x(t).diff(t), -2*x(t) + y(t))
eq2 = Eq(y(t).diff(t), 3*x(t) - 4*y(t))

# Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales
sol = dsolve([eq1, eq2])

# Mostrar la solución general
print(sol)
```

Solución:

$x(t) = -c_1 \frac{e^{-5t}}{3} + c_2 e^{-t}$

$y(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{-t}$

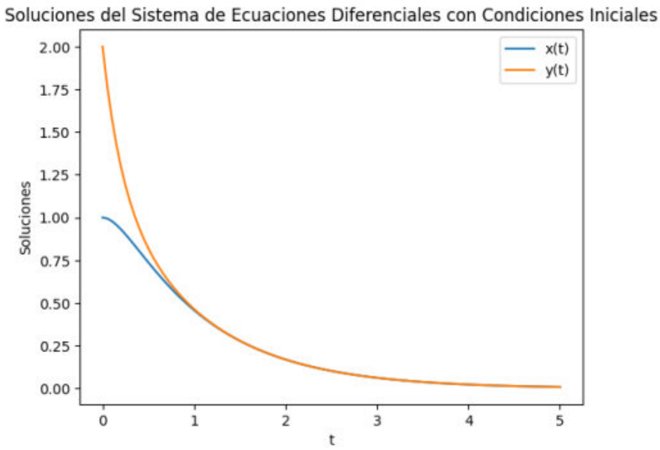
Graficar la solución del PVI

$$x' = -2x + y$$
$$y' = 3x + 4y$$
$$y(0) = 1, y'(0) = 2$$

código en python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

# Definir el sistema de ecuaciones diferenciales
def sistema(y, t):
    x, y = y
    dydt = [-2*x + y, 3*x - 4*y]
    return dydt

# Condiciones iniciales
y0 = [1, 2]

# Definir puntos de tiempo para la gráfica
t_vals = np.linspace(0, 5, 100)

# Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales con odeint
sol = odeint(sistema, y0, t_vals)

# Graficar las soluciones
plt.plot(t_vals, sol[:, 0], label='x(t)')
plt.plot(t_vals, sol[:, 1], label='y(t)')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('Soluciones')
plt.title('Soluciones del Sistema de Ecuaciones Diferenciales con Condiciones Iniciales')
```

```
plt.legend()
plt.show()
```



Resolver el sistema

$$x' = -2x + y + sen(t)$$
$$y' = 3x + 4y + e^{-t}$$

código en python

```
from sympy import symbols, Function, Eq, dsolve, sin, exp

# Definir símbolos y funciones
t = symbols('t')
x, y = symbols('x y', cls=Function)

# Definir el sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneas
eq1 = Eq(x(t).diff(t), -2*x(t) + y(t) + sin(t))
eq2 = Eq(y(t).diff(t), 3*x(t) - 4*y(t) + exp(-t))

# Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneas
sol = dsolve([eq1, eq2])

# Mostrar la solución general
print(sol)
```

Solución:

$$x(t) = c_1 e^{-t} - \frac{c_2^{-5t}}{3} + t\frac{e^{-t}}{4} - \frac{e^{-t}}{16} + \frac{11sen(t)}{26} - \frac{5cos(t)}{13}$$
$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t} + t\frac{e^{-t}}{4} + \frac{3e^{-t}}{16} + \frac{3sen(t)}{13} - \frac{9cos(t)}{26}$$

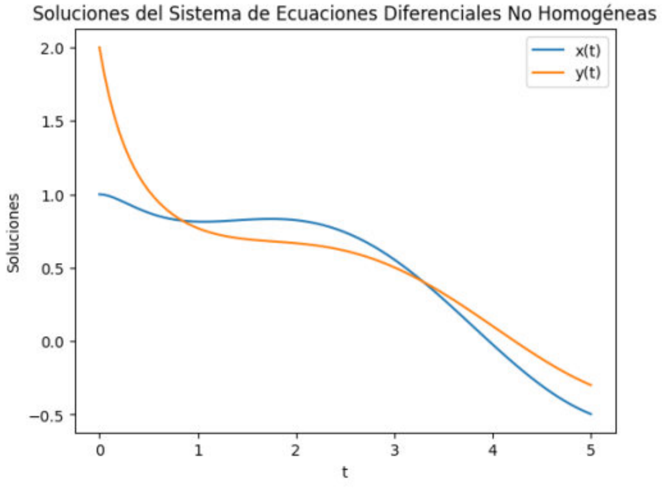
Graficar las soluciones del sistema

$$x' = -2x + y + sen(t)$$
$$y' = 3x + 4y + e^{-t}$$

código en python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
```

```
# Definir el sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneas
def sistema(y, t):
    x, y = y
    dydt = [-2*x + y + np.sin(t), 3*x - 4*y + np.exp(-t)]
    return dydt

# Condiciones iniciales
y0 = [1, 2]

# Definir puntos de tiempo para la integración
t_vals = np.linspace(0, 5, 100)

# Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneas con odeint
sol = odeint(sistema, y0, t_vals)

# Graficar las soluciones
plt.plot(t_vals, sol[:, 0], label='x(t)')
plt.plot(t_vals, sol[:, 1], label='y(t)')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('Soluciones')
plt.title('Soluciones del Sistema de Ecuaciones Diferenciales No Homogéneas')
plt.legend()
plt.show()
```



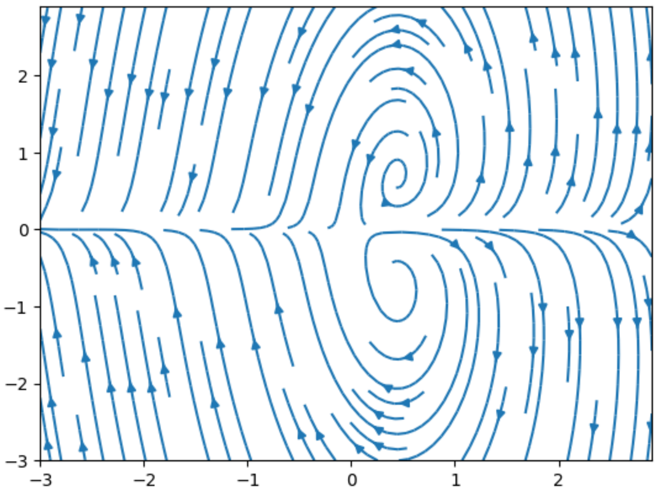
Dibujar el diagrama de fases del sistema

$$x' = x - y^2$$
$$y' = y(9x - 4)$$

código en python

```
from pylab import *

xvalues,yvalues=meshgrid(arange(-3,3,0.1),arange(-3,3,0.1))

xdot=xvalues-yvalues**2

ydot=yvalues*(9*xvalues-4)
streamplot(xvalues,yvalues, xdot,ydot)
```

```
show()
```



Apéndice B

Autovalores y autovectores de una matriz.

Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$ un autovalor de esta matriz es un número $\lambda \in \mathbb{C}$ si existe un vector $v \neq 0$ tal que

$$Av = \lambda v,$$

además este vector v es denominado autovector de la matriz A asociado al autovalor λ.

Ejemplo: Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

$\lambda = 2$ es un autovalor de la matriz A y $v = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un autovector asociado a este autovalor ya que

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(-3)+(-3)(1) \\ (1)(-3)+(5)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y

$$\lambda v = 2\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-3) \\ 2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

luego

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es decir

$$Av = \lambda v$$

Observación

El autovector asociado a un autovalor no es único además una matriz puede tener varios autovalores.

Dado que conocer todos los autovalores de una matriz será de gran utilidad, presentaremos un método para poder encontrarlos.

Como sabemos que si λ es un autovalor de la matriz A entonces debe existir un vector $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$, lo que se puede escribir equivalente como

$$Av = \lambda I v$$

donde I es una matriz identidad, luego tenemos que

$$Av - \lambda I v = 0 \Longleftrightarrow (A - I\lambda)\, v = 0.$$

Notemos que $A - \lambda I$ es una matriz cuadrada y que el sistema de ecuaciones

$$(A - I\lambda)\, x = 0$$

tiene infinitas soluciones entonces

$$det\,(A - \lambda I) = 0.$$

Por tanto, concluimos que para encontrar los autovalores de la matriz A debemos resolver la ecuación

$$det\,(A - \lambda I) = 0$$

que será llamada en adelante Ecuación Característica, esto debido a que la expresión

$$p(\lambda) = det\,(A - \lambda I) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

será llamada de polinomio característico de la matriz A.

Ejemplo: Encontrar los autovalores y autovectores de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

- Autovalores

  Para encontrar los autovalores resolveremos la ecuación característica

$$det\,(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

  entonces $(1-\lambda)(5-\lambda)+3=0$ luego $5-5\lambda-\lambda+\lambda^2+3=0 \Longrightarrow (\lambda-4)(\lambda-2)=0$

  Por tanto, los autovalores son $\lambda=4$ y $\lambda=2$.

- Autovectores, se busca $v \neq 0$ tal que $Av=\lambda v \Longleftrightarrow [A-\lambda I]\,v=0$

  Si $v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

  - Si $\lambda=2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1-2 & -3 \\ 1 & 5-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -v_1-3v_2 \\ v_1+3v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

    luego $v_1+3v_2=0 \Longrightarrow v_1=-3v_2 \Longrightarrow$ Si $v_2=1$,$v_1=-3$, luego $v=\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

  - Si $\lambda=4 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1-4 & -3 \\ 1 & 5-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -3w_1-3w_2 \\ w_1+w_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

    luego $w_1+w_2=0 \Longrightarrow w_1=-w_2 \Longrightarrow$ Si $w_2=1$,$w_1=-1$, luego $w=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Observación

v y w son vectores linealmente independientes.

Ejemplo: Encontrar los autovalores y autovectores de la matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

- Autovalores

  Para encontrar los autovalores resolveremos la ecuación característica

$$\Longrightarrow det\,(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 7 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

  entonces $-\lambda^3-3\lambda^2-2\lambda=0$ luego $-\lambda\left(\lambda^2+3\lambda+2\right)=0 \Longrightarrow \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$

  Por tanto, los autovalores son $\lambda=0$, $\lambda=-1$ y $\lambda=-2$

- Autovectores, se busca $v \neq 0$ tal que $Av=\lambda v \Longleftrightarrow [A-\lambda I]\,v=0$

  Si $v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

  - Si $\lambda=0 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1-0 & -3 & 7 \\ -1 & -1-0 & 1 \\ -1 & 1 & -3-0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} v_1-3v_2+7v_3 \\ -v_1-v_2+v_3 \\ -v_1+v_2-3v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

luego

$$
\begin{array}{rcl}
v_1 = 3v_2 - 7v_3 & & \\
v_1 = -v_2 + v_3 & \Longrightarrow \quad 3v_2 - 7v_3 = -v_2 + v_3 \quad \Longrightarrow \quad 4v_2 = 8v_3 & \\
& & \Rightarrow \quad v_2 = 2v_3 \\
v_1 = v_2 - 3v_3 & \Longrightarrow \quad 3v_2 - 7v_3 = v_2 - 3v_3 \quad \Longrightarrow \quad 2v_2 = 4v_3 & \\
& & \Rightarrow \quad v_1 = 6v_3 - 7v_3 = -v_3
\end{array}
$$

entonces si $v_3 = 1$ tenemos que $v = (-1, 2, 1)$

- Si $\lambda = -1 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1-(-1) & -3 & 7 \\ -1 & -1-(-1) & 1 \\ -1 & 1 & -3-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$
\begin{bmatrix} 2v_1 - 3v_2 + 7v_3 \\ -v_1 + v_3 \\ -v_1 + v_2 - 2v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

luego

$$
\begin{array}{rcl}
2v_1 = 3v_2 - 7v_3 & & \\
v_1 = v_3 & & \\
& & \Rightarrow \quad 2v_1 = 9v_1 - 7v_3 \\
v_1 = v_2 - 2v_3 & \Longrightarrow \quad v_1 = v_2 - 2v_1 \quad \Longrightarrow \quad 3v_1 = v_2 & \\
& & \Rightarrow \quad v_1 = v_3
\end{array}
$$

entonces si $w_1 = 1$ tenemos que $w = (1, 3, 1)$

- Si $\lambda = -2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1-(-2) & -3 & 7 \\ -1 & -1-(-2) & 1 \\ -1 & 1 & -3-(-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$
\begin{bmatrix} 3v_1 - 3v_2 + 7v_3 \\ -v_1 + v_2 + v_3 \\ -v_1 + v_2 - v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

luego

$$
\begin{array}{rl}
3v_1 = 3v_2 - 7v_3 & \\
v_1 = v_2 + v_3 & \\
& \Longrightarrow \quad v_2 + v_3 = v_2 - v_3 \quad \Rightarrow \quad 2v_3 = 0 \quad \Rightarrow v_3 = 0 \\
v_1 = v_2 - v_3 & \\
& \Longrightarrow \quad v_1 = v_2 \quad \Rightarrow
\end{array}
$$

entonces si $u_1 = 1$ tenemos que $u = (1, 1, 0)$

> **☞ Observación**
>
> v , w y u son autovectores linealmente independientes.

Ejemplo: Encontrar los autovalores y autovectores de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

- Autovalores

  Para encontrar los autovalores resolveremos la ecuación característica

$$
det\,(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0
$$

entonces $\lambda^2 + 1 = 0$ luego $\lambda = \pm i$

- Autovectores, se busca $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v \Longleftrightarrow [A - \lambda I]\, v = 0$

  Si $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

  - Si $\lambda = i \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0-i & 1 \\ -1 & 0-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -iv_1 + v_2 \\ -v_1 - iv_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

    luego $iv_1 = v_2 \Longrightarrow$ Si $v_1 = 1$,$v_2 = i$, Por tanto $v = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

  luego deducimos que el autovector correspondiente al autovalor $\lambda = -i$ (conjugada) es el vector $w = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

Observación

v y w son vectores linealmente independientes.

Ejemplo: Encontrar los autovalores y autovectores de la matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

- Autovalores

  Para encontrar los autovalores resolveremos la ecuación característica

$$det\,(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -8 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

  entonces $(6-\lambda)(-2-\lambda) + 16 = 0$ luego $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Longrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0$

- Autovectores, se busca $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v \Longleftrightarrow [A - \lambda I]\, v = 0$

  Si $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

  - Si $\lambda = 2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 6-2 & -8 \\ 2 & -2-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 4v_1 - 8v_2 \\ 2v_1 - 4v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

    luego $v_1 = 2v_2 \Longrightarrow$ Si $v_2 = 1$,$v_1 = 2$, Por tanto $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

    luego deducimos que un autovector correspondiente al autovalor $\lambda = 2$ es el vector $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Observación

En este caso solo hay un autovector linealmente independiente.

Ejemplo: Encontrar los autovalores y autovectores de la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

- Autovalores

  Para encontrar los autovalores resolveremos la ecuación característica

$$det\,(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 6-\lambda & -1 \\ 3 & 6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

  entonces $-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 48\lambda + 64 = 0$ luego $-(\lambda - 4)^3 = 0$. Por tanto, $\lambda = 4$,

- Autovectores, se busca $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v \Longleftrightarrow [A - \lambda I]\, v = 0$

  Si $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

  Si $\lambda = 4 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 5-4 & 2 & -1 \\ 1 & 6-4 & -1 \\ 3 & 6 & 1-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} v_1 + 2v_2 - v_3 \\ v_1 + 2v_2 - v_3 \\ 3v_1 + 6v_2 - 3v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

  luego $\;v_1 + 2v_2 - v_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_1 + 2v_2 = v_3$

  entonces $v = (v_1, v_2, v_1 + 2v_2) = v_1\,(1,0,1) + v_2\,(0,1,2)$ luego existen dos autovectores linealmente independientes del autovalor $\lambda = 4$ son $v = (1,0,1)$ y $w = (0,1,2)$.

Ejemplo: Encontrar los autovalores y autovectores de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

- Autovalores

  Para encontrar los autovalores resolveremos la ecuación característica

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

  de donde se obtiene $-(\lambda+1)^2\,(\lambda-5) = 0$. Luego los autovalores de la matriz A son

  - $\lambda = -1$ (doble)
  - $\lambda = 5$

- Autovectores, se busca $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v \Longleftrightarrow [A - \lambda I]\, v = 0$
  para $\lambda = -1$

  $Av = -v \Longleftrightarrow (A + I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ donde $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow v_1 - v_2 + v_3 = 0 \Longrightarrow si \begin{cases} v_2 = 1, v_3 = 0 \Longrightarrow v_1 = 1 & \Longrightarrow v = (1,1,0) \\ \\ v_2 = 1, v_3 = 1 \Longrightarrow v_1 = 0 & \Longrightarrow v = (0,1,1) \end{cases}$$

  Luego como $(1,1,0)$ y $(0,1,1)$ son vectores linealmente independientes (uno no es múltiplo del otro)

  Por último busquemos el autovector w correspondiente al autovalor $\lambda = 5$

$$Aw = 5w \Longleftrightarrow (A - 5I)\,w = 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  $w_1 = w_3$ y $w_2 = -w_3$. Al seleccionar $w_3 = 1$ se obtiene $w_1 = 1, w_2 = -1$ por lo que $w = (1,-1,1)$. Los autovectores $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ y $(1,-1,1)$ son linealmente independientes.

MULTIPLICIDAD ALGEBRAICA

Se define la multiplicidad algebraica de un autovalor al número de veces que se repite este autovalor.

MULTIPLICIDAD GEOMÉTRICA

Se define la multiplicidad geométrica de un autovalor al número de autovectores linealmente independientes que puede generar este autovalor.

Bibliografía

[1] Edmundo Capelas de Oliveira, Martin Tygel (2010) *Métodos Matemáticos para Engenharia. 2da edición*,Coleção de Textos Universitários.

[2] Djairo Guedes de Figuereido, Aloisio Freiria Neves (2008) *Equações Diferenciais Aplicadas. Tercera Edición*, Coleção de Textos Universitários.

[3] Dennis G.Zill, Warren S. Wright (2013) *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera*, Cengage learning.

[4] José Manuel Vegas Montaner,Francisco José Vázquez Hernández,Carlos Fernández Pérez (2003) *Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias*, Ediciones Paranimfo.

[5] Brent J. Lewis, E. Nihan Onder, Andrew A. Prudil(2022) Advanced Mathematics for Engineering Students, Elsevier Butterworth-Heinemann.

[6] Neuhauser Claudia(2011) *Matematicas para Ciencias.*, Pearson Pretince Hall

[7] Morgan Robert(2015) *Linearization and Stability Analysis of Nonlinear Problems* ., Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal: Vol. 16 : Iss. 2 , Article 5. Disponible en: https://scholar.rose-hulman.edu/rhumj/vol16/iss2/5

[8] Acemoglu Daron (2009) *Introduction to Modern Economic Growth.*, Princeton University Press

Autores

Raquel Inés Serna Díaz

Doctora en matemática Aplicada por la Universidad Estatal de Campinas, Magister por la Universidad Federal de Rio de Janeiro y Licenciada en matemática Pura por la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Profesor auxiliar del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional Agraria la Molina.

Alfredo Velásquez Flores

Magíster en matemática por la Pontificia Universidad Católica del Perú y Licenciado en Matemática por la Universidad Nacional de San Agustín. Profesor Asociado del Departamento Académico de Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Agraria La Molina.

El presente libro tiene como base los contenidos más importantes que se dictan en los cursos de Cálculo Avanzado II y de Ecuaciones Diferenciales en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Agraria La Molina. Así mismo, será de gran utilidad para los alumnos que lleven el curso de Análisis Matemático IV en la Facultad de Industrias Alimentarias y en general resultará muy práctico y provechoso para estudiantes que cursen las diversas carreras de ciencia e ingeniería.

Este trabajo ha sido realizado con el objetivo de guiar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje hacia las ecuaciones diferenciales considerando los aspectos formales como definiciones y teoremas, donde nos centramos en la parte práctica y aplicativa dando una diversidad de ejemplos, desde casos inmediatos hasta casos que requieren de un análisis más detallado.

ISBN: 978-612-5086-28-0

9 786125 086280

Fondo Editorial
Universidad Nacional Agraria La Molina