Cálculo Integral y sus aplicaciones

JORGE CONDEÑA C.
CARMEN MONZÓN M.
MARÍA SALAZAR D.
VÍCTOR TREJO C.

UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA
LA MOLINA

JORGE CONDEÑA C. - CARMEN MONZÓN M. - MARÍA SALAZAR D. - VÍCTOR TREJO C.
Cálculo Integral y sus aplicaciones

Lima: 2024; 260 p.

ISBN: N° 978-612-5086-29-7
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2024-08428

Primera edición digital: agosto de 2024
Disponible en: https://fondoeditorialunalm.com/ebooks/

Diseño y diagramación:
Daniella Luna Barrios

Índice general

Prólogo

El presente libro, destinado a estudiantes universitarios de ciencias e ingeniería, aborda de manera exhaustiva el tema del cálculo integral. A través de sus páginas, el lector será guiado mediante los conceptos fundamentales de la integral indefinida, la integral definida y sus aplicaciones, proporcionando una base sólida para comprender y dominar esta disciplina. A continuación, se ofrece una breve y resumida descripción del contenido y desarrollo de los temas.

En el capítulo uno, iniciamos con la noción de integral indefinida, presentando las técnicas necesarias para encontrar antiderivadas y resolver problemas de integración. Desde las reglas básicas hasta las técnicas más avanzadas.

En el capítulo dos, continuamos con la integral definida, precisando las nociones de particiones de un intervalo, aproximación de áreas de regiones planas, sumas de Riemann, interpretación de la integral definida, propiedades y los teoremas fundamentales del cálculo. Además, desarrollamos las integrales impropias y cerramos este capítulo abordando las funciones especiales: Gamma y Beta.

En el capítulo tres, exploramos las aplicaciones de la integral definida en el cálculo de áreas de figuras planas, volúmenes de sólidos de revolución, longitud de arco y áreas de superficies de revolución. También incluimos aplicaciones a la física, como la cinemática, el trabajo, el centro de masa y los centroides. Asimismo, aplicamos estos conceptos en el cálculo de fuerzas sobre superficies planas sumergidas utilizando los momentos de inercia.

Los autores

Introducción

El cálculo integral es una de las ramas fundamentales de las matemáticas y una herramienta esencial en las diversas aplicaciones, tanto en ciencias como en ingeniería. Los temas principales del cálculo integral permiten cimentar bases sólidas entre los conocimientos de las matemáticas básicas y principalmente del cálculo diferencial. Así, todas las definiciones y explicaciones en este texto, son claras y sencillas para que el estudiante pueda adquirir habilidad en la solución de los problemas mediante un razonamiento lógico e inductivo. La didáctica que se desarrolla en este texto se fundamenta en una exposición de conceptos introductorios y ejemplos demostrativos. Los problemas y ejercicios prácticos que se desarrollan a lo largo de los distintos capítulos, tienen una dificultad progresiva, lo cual permite tener una evaluación continua del proceso enseñanza-aprendizaje.

El presente texto está diseñado exclusivamente para guiar a los estudiantes de la Universidad Nacional Agraria La Molina en el estudio del cálculo integral y sus aplicaciones. De esta manera, buscamos sentar bases sólidas que permitan a nuestros estudiantes avanzar hacia los cursos superiores de matemáticas.

Este libro está estructurado de manera progresiva, comenzando con los conceptos más básicos y avanzando hacia temas más complejos. El contenido se organiza en tres capítulos principales. El Capítulo 1 aborda la integral indefinida. Se presentan los conceptos básicos, la definición y propiedades de la integral indefinida, así como diversos métodos de integración, incluyendo la integración por partes, la sustitución trigonométrica, fracciones parciales y las integrales de funciones racionales, senos y cosenos.

En el Capítulo 2 se estudia la integral definida. Aquí se explora el uso de la integración para calcular áreas mediante sumatorias, la partición de un intervalo y la aproximación del área de una región por la suma de áreas de rectángulos. Además, se analizan las propiedades de la integral definida, los teoremas fundamentales del cálculo y las integrales impropias. Asimismo, se evalúan integrales definidas usando las funciones especiales: Gamma y Beta.

El Capítulo 3 se dedica a las aplicaciones de la integral definida. En este capítulo se muestra cómo utilizar la integración para calcular áreas de regiones planas, volúmenes de sólidos de revolución, áreas de superficies de revolución, longitudes de arco y centros de masa. Además, se incluyen aplicaciones del cálculo integral a la física y la ingeniería, discutiendo temas como la cinemática, los centros de gravedad de cuerpos rígidos y los momentos de inercia, así como las fuerzas de presión sobre superficies planas.

Concluimos destacando que el cálculo integral es una herramienta poderosa y versátil que nos ayuda a entender mejor los fenómenos naturales y a resolver problemas complejos en muchas áreas. Por tal motivo, esperamos que este libro sea una guía útil y clara. Queremos que las habilidades y conocimientos adquiridos no solo amplíen sus horizontes académicos y profesionales, sino que también les hagan apreciar la belleza y utilidad de las matemáticas.

1 Capítulo
Integral Indefinida

En este capítulo, nos sumergiremos en el emocionante universo de las integrales indefinidas. Exploraremos su naturaleza, funcionamiento y métodos de cálculo. Analizaremos los procesos cruciales que está íntimamente ligado con la diferenciación e integración, desde los principios más simples hasta las estrategias más avanzadas.

1.1. Antiderivada e Integral Indefinida

La importancia de comprender el concepto de la antiderivada radica en su aplicación en una amplia gama de áreas, desde la física y la ingeniería hasta las ciencias sociales. La antiderivada permite resolver problemas que requieren la obtención de una función, si se conoce la derivada de la misma; esto es, se conoce su tasa de variación.

Por ejemplo, si f es una función definida por $f(x) = 3x^2$, entonces una antiderivada es $F(x) = x^3$, pues la derivada de $F(x) = x^3$ es

$$\frac{d}{dx}F(x) = F'(x) = 3x^2 = f(x).$$

Se puede observar que no es la única, también existen otras funciones como:

$$F_1(x) = x^3 + 2 \quad \text{y} \quad F_2(x) = x^3 - \frac{3}{2}$$

que también son antiderivadas de f.

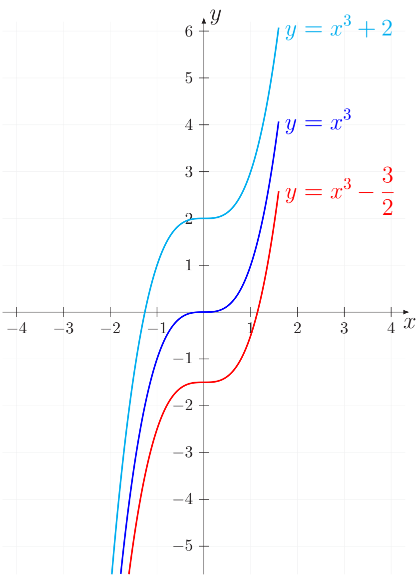


Figura 1.1: Algunas primitivas de $f(x) = 3x^2$.

Es claro que las funciones $F(x) = x^3 + C$, con C una constante arbitraria, representan **todas** las antiderivadas o primitivas de la función $f(x) = 3x^2$. En un sentido más amplio, brindaremos la siguiente definición.

Definición 1.1: Antiderivada

Una función F se denomina antiderivada o función primitiva de la función f en un intervalo I, si $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$.

Ejemplo 1.1. Determine una antiderivada para las siguientes funciones:

a) $f(x) = \cos x$ en $I = \mathbb{R}$

b) $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ en $I = \mathbb{R}$

Solución.

a) Una antiderivada para f es $F(x) = \operatorname{sen}(x)$, ya que la derivada de $F(x) = \operatorname{sen}(x)$ es $F'(x) = \cos(x) = f(x)$.

b) De manera similar, se puede notar que una antiderivada de g es $G(x) = \ln(x^2+1)$, pues la derivada de $F(x) = \ln(x^2+1)$ es $F'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} = g(x)$.

La siguiente definición establece que, a excepción de las funciones obtenidas de esta manera, ninguna otra función puede ser una antiderivada de una función f.

Definición 1.2: Antiderivada general

Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces G es una antiderivada de f en el intervalo I si y sólo si G es de la forma $G(x) = F(x) + C$, para todo x en I, donde C es una constante.

La expresión $F(x) + C$ en la definición anterior recibe el nombre de **antiderivada general** de la función f.

Teorema 1.1

Si F_1 y F_2 son dos antiderivadas de una función f en un intervalo I, entonces F_1 y F_2 difieren en una constante en I.

Demostración.

Para la demostración de este teorema, definimos una función G, como $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$, para todo $x \in I$. Luego, derivando ambos miembros

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \text{para todo } x \in I.$$

Como $G'(x) = 0$, se tiene G es una función constante C, entonces

$$C = F_1(x) - F_2(x).$$

Por lo tanto,

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Ejemplo 1.2. Halle la antiderivada general de la función f, cuya regla de correspondencia es $f(x) = 4x + 7$.

Solución. Se observa que la función F dada por $F(x) = 2x^2 + 7x$, es una antiderivada de la función f, ya que $F'(x) = 4x + 7$. Por lo que, la antiderivada general es f es

$$F(x) = 2x^2 + 7x + C,$$

con C una constante arbitraria.

Ejemplo 1.3. Halle la antiderivada general de $f(x) = \sec^2 x$.

Solución. Tenemos que la función $F(x) = \tan x + C$, con C una constante arbitraria, es la antiderivada general de la función f, puesto que su derivada es $F'(x) = \sec^2 x$.

Ejemplo 1.4. Halle la antiderivada de la función $f(x) = 3x^2 - 3$, cuya gráfica pasa por el punto $(1, 2)$.

Solución.

Por un lado, rápidamente se observa que

$$F(x) = x^3 - 3x + C$$

es la antiderivada general de la función f, ya que $F'(x) = 3x^2 - 3 = f(x)$, donde C es una constante arbitraria.
Además, como $(1, 2) \in Gra(F)$, tenemos que $F(1) = 2$; así,

$$2 = F(1) = (1)^3 - 3(1) + C,$$

obteniendo $C = 4$. Por lo tanto, la antiderivada que pasa por el punto $(1, 2)$ es

$$F(x) = x^3 - 3x + 4.$$

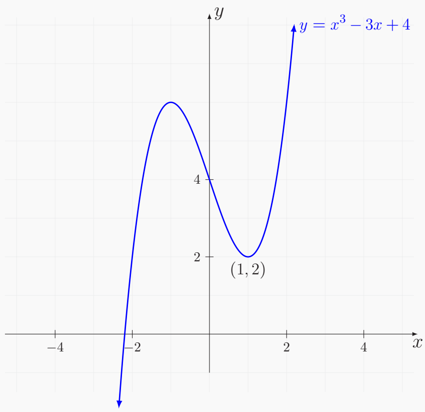


Figura 1.2: Gráfica de la función $F(x) = x^3 - 3x + 4$.

Ejemplo 1.5. Halle la antiderivada general de $f(x) = 2^{\operatorname{sen} x} \ln(2) \cos x$.

Solución. Tenemos que hallar una función F cuya derivada coincida con $f(x)$. En ese sentido, se observa que

$$f(x) = 2^{\operatorname{sen} x} \ln(2) \cos x = \left(2^{\operatorname{sen} x}\right)'$$

En consecuencia, la antiderivada general de la función f es

$$F(x) = 2^{\operatorname{sen} x} + C,$$

donde C es una constante arbitraria.

Ejemplo 1.6. Si G es una antiderivada de g, determine la antiderivada de la función h, cuyas funciones G y h están definidas, correspondientemente, por:

$$G(x) = e^{3x} - \ln x \quad \text{y} \quad h(x) = 2^{5x} + g(x).$$

Solución. Sea H la antiderivada de h, entonces $H'(x) = h(x)$. Además, como G es una antiderivada de g entonces $G'(x) = g(x)$. Así, teniendo en cuenta estos datos, se tiene que

$$h(x) = 2^{5x} + g(x) = 5\ln(2)\left(2^{5x}\frac{1}{5\ln 2}\right) + G'(x) = \left(2^{5x}\frac{1}{5\ln 2}\right)' + G'(x).$$

Por lo tanto, la antiderivada general de la función h es

$$H(x) = 2^{5x}\frac{1}{5\ln 2} + e^{3x} - \ln x + C.$$

Ejemplo 1.7. Si f es una función tal que $f'(x) = x + \dfrac{3x^2}{1+x^3}$, $x \in \mathbb{R}$ y la gráfica de f pasa por el punto $(0;3)$, halle $f(x)$.

Solución. Como $f'(x) = x + \dfrac{3x^2}{1+x^3} = \left(\dfrac{x^2}{2} + \ln\left(1+x^3\right)\right)'$, entonces

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln\left(1+x^3\right) + C.$$

Se sabe que la gráfica de f pasa por el punto $(0;3)$, esto es $f(0) = 3$, luego

$$3 = 0 + \ln(1) + C \Rightarrow C = 3.$$

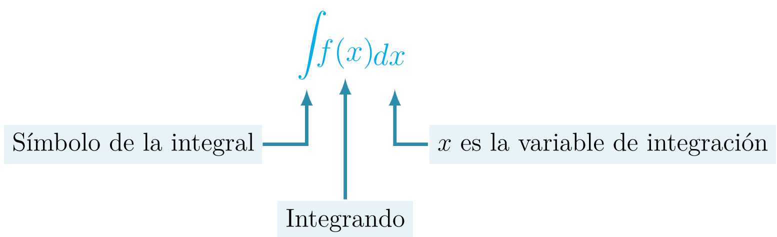
Por lo tanto, $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \ln\left(1+x^3\right) + 3$.

Definición 1.3: Integral indefinida

La antiderivada general de una función f se llama integral indefinida de f y se representa por $\int f(x)dx$. Es decir,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{si y solo si} \quad F'(x) = f(x), \quad \text{para todo} \quad x \in \operatorname{Dom}(f)$$

donde C es una constante arbitraria.



Ejemplo 1.8. Halle la integral: $\int e^{5x}dx$.

Solución. Como una antiderivada del integrando $f(x) = e^{5x}$ es

$$F(x) = \frac{e^{x}}{5},$$

entonces

$$\int e^{5x}dx = \frac{e^{5x}}{5} + C,$$

donde C es una constante arbitraria.

Ejemplo 1.9. Determine: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Solución. En este ejemplo, es claro que una antiderivada de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ es

$$F(x) = \operatorname{arc\,sen} x.$$

Entonces, la integral indefinida queda determinada por

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arc\,sen} x + C,$$

donde C es una constante arbitraria.

Propiedad 1.1. Si f y g son funciones que admiten antiderivadas, para todo $x \in I$, entonces sucede lo mismo con las funciones $f \pm g$ y kf, donde k es una constante y se cumple:

1. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$
2. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$

En general, si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son funciones que admiten antiderivadas, para todo $x \in I$, y sean las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, entonces

$$\int [c_1 f_1(x) + c_1 f_2(x) + \ldots + c_1 f_n(x)]\, dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x) + \ldots + c_n \int f_n(x)dx.$$

Fórmulas de Integración inmediata

En las siguientes fórmulas considere $u = u(x)$ una función derivable y C denota la constante arbitraria.

1. $\int du = u + C$
2. $\int u^p du = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C$, con $p \neq -1$

3. $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\displaystyle\int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C$

5. $\displaystyle\int \cos u du = \operatorname{sen} u + C$

6. $\displaystyle\int \tan u du = -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C$

7. $\displaystyle\int \cot u du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

8. $\displaystyle\int \sec u du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

9. $\displaystyle\int \csc u du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$

10. $\displaystyle\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$

11. $\displaystyle\int \sec^2 u du = \tan u + C$

12. $\displaystyle\int \csc^2 u du = -\cot u + C$

13. $\displaystyle\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1$

14. $\displaystyle\int e^u du = e^u + C$

15. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$

16. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C, \quad (u^2 > a^2)$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C, \quad (u^2 < a^2)$

18. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

19. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

Ejemplo 1.10. Determine $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 25} dx$.

Solución.

$$\int \frac{1}{x^2 + 25} dx = \int \frac{1}{x^2 + 5^2} dx = \frac{1}{5} \arctan\left(\frac{x}{5}\right) + C.$$

Ejemplo 1.11. Halle $\int \sqrt[5]{x}\,\sqrt[3]{x}dx.$

Solución.

$$\int \sqrt[5]{x}\,\sqrt[3]{x}dx = \int x^{1/5}x^{1/3}dx = \int x^{8/15}dx = \frac{x^{\frac{8}{15}+1}}{\frac{8}{15}+1} = \frac{15}{23}x^{23/15} + C.$$

Ejemplo 1.12. Halle $\int \left(6x^3-1\right)^2 dx.$

Solución.

$$\begin{aligned}\int \left(6x^3-1\right)^2 dx &= \int \left(36x^6-12x^3+1\right) dx\\ &= 36\int x^6dx - 12\int x^3dx + \int 1dx\\ &= 36\left(\frac{x^7}{7}\right) - 12\left(\frac{x^4}{4}\right) + x + C\\ &= \frac{36}{7}x^7 - 3x^4 + x + C\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos 1.1.

1. Halle la siguientes integrales:

   a. $\int \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt[5]{x^2}}dx$
   b. $\int \csc^{-1}(x)dx$
   c. $\int \frac{1}{16+\sqrt{4x^4}}dx$
   d. $\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}dx$
   e. $\int \frac{\cos(2x)}{\cos x}dx$
   f. $\int \frac{5\operatorname{sen} x - \cos x + 1}{\operatorname{sen} x}dx$
   g. $\int 2^{3x}e^x dx$

2. Halle una antiderivada de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ que pase por el punto $(2, 6)$.

3. Halle una antiderivada de la función $f(x) = \frac{x+5}{x+3}$ que pase por el punto $(-4, 7)$.

4. Halle la antiderivada de la función $f(x) = \frac{2^{x-1}\cdot 9^x}{2^{x+1}}$, cuya gráfica pasa por el punto $\left(2, \frac{8}{\ln 6}\right)$.

5. Verifique que:
$$\int x\cos x dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

6. Halle la antiderivada de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}$, cuya gráfica pasa por el punto $(1, 4)$.

1.2. Método de Integración por cambio de variable

En esta sección presentamos un método denominado cambio de variable o sustitución, que nos permitirá integrar una variedad extensa de funciones. Al igual que las fórmulas de integración de la sección anterior, este método se obtiene invirtiendo una regla de diferenciación específica, en este caso, la Regla de la Cadena.

Teorema 1.2

Sea g una función derivable y sea el rango de g algún intervalo I. Suponga que f es una función definida en I y que F es una antiderivada de f en I. Entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

Pasos a seguir para resolver $\int f(g(x))g'(x)dx$ por el método de sustitución:

1. Hacer el cambio $u = g(x)$, donde $g(x)$ es parte del integrando, usualmente, la función dentro de la composición $f(g(x))$.
2. Calcular $du = g'(x)dx$.
3. Usar la sustitución $u = g(x)$ y $du = g'(x)dx$ para transformar el integrando en una donde solo involucre a u: $\int f(u)du$.
4. Encontrar el resultado de la integral.
5. Finalmente, reemplazar u por $g(x)$, para que la solución final quede en términos de x.

Ejemplo 1.13. Halle:

$$\int \operatorname{sen}(2x)dx.$$

Solución. Haciendo el cambio $u = 2x$, tenemos que $du = 2dx$. Luego, reemplazando se obtiene

$$\int \operatorname{sen}(2x)dx = \int \operatorname{sen}(u)\frac{1}{2}du = -\frac{1}{2}\cos(u) + C = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C.$$

Ejemplo 1.14. Calcule:

$$\int \frac{\sec^2(\ln x)}{x}dx.$$

Solución. Realizando el cambio $u = \ln x$, con diferencial $du = \frac{1}{x}dx$. Luego,

$$\int \frac{\sec^2(\ln x)}{x}dx = \int \sec^2(u)du = \tan u + C = \tan(\ln x) + C.$$

Ejemplo 1.15. Halle:

$$\int \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$$

Solución. Sea el cambio $u = \sqrt{x}$, con diferencial $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$. Entonces

$$\int \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int 3^u(2du) = \frac{2}{\ln 3}3^u + C = \frac{2}{\ln 3}3^{\sqrt{x}} + C.$$

Para evitar la necesidad de cambio de variable, es recomendable abordar la integración directamente, siempre y cuando se conozca si existe la derivada de $u = g(x)$. Veamos esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.16. Calcule:

$$I = \int \csc^3 x \cot x dx.$$

Solución.

$$I = \int \csc^3 x \cot x dx = \int \csc^2 x \csc x \cot x dx = -\frac{1}{3}\csc^3 x + C.$$

Ejemplo 1.17. Halle la antiderivada de:

$$f(x) = 5^x - \frac{\tan(\sqrt{x}+\pi)}{\sqrt{x}}$$

cuya gráfica pasa por el punto $(0; 2)$.

Solución.

$$\begin{aligned} F(x) = \int \left(5^x - \frac{\tan(\sqrt{x}+\pi)}{\sqrt{x}}\right) dx \quad &= \int 5^x dx - \int \frac{\tan(\sqrt{x}+\pi)}{\sqrt{x}}dx \\ &= \frac{5^x}{\ln 5} - \int \frac{\tan(\sqrt{x}+\pi)}{\sqrt{x}}dx \end{aligned} \tag{1.1}$$

Haciendo:

$$u = \sqrt{x} + \pi, \qquad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

Reemplazando en (1.1)

$$F(x) = \frac{5^x}{\ln 5} - 2\int \tan(u)du$$
$$F(x) = \frac{5^x}{\ln 5} - 2\ln|\sec(\sqrt{x}+\pi)| + C$$

Como F pasa por el punto $(0; 2)$, entonces:

$$F(0) = 2$$
$$\frac{1}{\ln 5} - 2\ln|\sec(\pi)| + C = 2 \Longrightarrow C = 2 - \frac{1}{\ln 5}$$

Por lo tanto,

$$F(x) = \frac{5^x}{\ln 5} - 2\ln|\sec(\sqrt{x}+\pi)| + 2 - \frac{1}{\ln 5}.$$

Ejemplo 1.18. Halle la antiderivada de:

$$f(x) = 3^x - \frac{e^{\cos x}}{(3+e^{\cos x})^2 \csc(x)}$$

cuya gráfica pasa por el punto $\left(0; \dfrac{1}{\ln 3}\right)$.

Solución.

$$F(x) = \int \left[3^x - \frac{e^{\cos x}}{(3+e^{\cos x})^2 \csc(x)}\right] dx = \int 3^x dx - \int \frac{e^{\cos x}}{(3+e^{\cos x})^2 \csc(x)} dx$$

Haciendo

$$u = 3 + e^{\cos x}, \qquad du = -\operatorname{sen} x \cdot e^{\cos x} dx$$

Luego,

$$F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} + \int u^{-2} du = \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{3+e^{\cos x}} + \mathrm{C}$$

Como F pasa por el punto $\left(0; \dfrac{1}{\ln 3}\right)$, entonces:

$$F(0) = \frac{1}{\ln 3}$$

$$\frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{3+e} + C = \frac{1}{\ln 3} \longrightarrow C = \frac{1}{3+e}$$

Por lo tanto,

$$F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{3+e^{\cos x}} + \frac{1}{3+e}.$$

Ejemplo 1.19. Calcule el valor de $Q = 5M + 2N$, si se cumple

$$\int \left(x\sqrt{-x} + \frac{3^x + 3^{-2x}}{3^{-x}}\right) dx = M\sqrt{(-x)^5} + \frac{3^{2x}}{2\ln 3} - \frac{9^{Nx}}{\ln 3} + K,$$

donde K es la constante de integración.

Solución. Lo que se debe hallar es

$$I = \int \left[x\sqrt{-x} + \frac{3^x + 3^{-2x}}{3^{-x}}\right] dx$$

Separando en dos integrales se tiene

$$I = \underbrace{\int x\sqrt{-x}dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{3^x + 3^{-2x}}{3^{-x}} dx}_{I_2} \tag{1.2}$$

- Hallando $I_1 = \displaystyle\int x\sqrt{-x}dx$: Haciendo el cambio de variable

$$t = \sqrt{-x} \Rightarrow t^2 = -x \Rightarrow -2tdt = dx$$

Luego, se obtiene

$$I_1 = \int -t^2 t(-2tdt) = 2\int t^4 dt = \frac{2t^5}{5} = \frac{2\sqrt{(-x)^5}}{5}$$

- Hallando I_2:

$$I_2 = \int \frac{3^x + 3^{-2x}}{3^{-x}} dx = \int \left(3^{2x} + 3^{-x}\right) dx = \frac{3^{2x}}{2\ln 3} - \frac{3^{-x}}{\ln 3}$$

Reemplazando I_1 e I_2 en (1.2) se tiene:

$$I = \frac{2\sqrt{(-x)^5}}{5} + \frac{3^{2x}}{2\ln 3} - \frac{3^{-x}}{\ln 3} + C.$$

Entonces, se observa que $M = \frac{2}{5}$ y $N = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$Q = 5M + 2N = 1.$$

Ejemplo 1.20. Calcule:

$$\int \frac{\tan(x)+1}{\tan(x)-1} dx.$$

Solución. Como $\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, la integral se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\int \frac{\tan(x)+1}{\tan(x)-1} dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)} dx.$$

Luego, haciendo un cambio de variable: $u = \operatorname{sen}(x) - \cos(x)$, con $du = \cos(x) + \operatorname{sen}(x) dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan(x)+1}{\tan(x)-1} dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)} dx &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|\operatorname{sen}(x) - \cos(x)| + \mathrm{C}.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.21. Calcule:

$$I = \int \frac{e^x}{e^{2x} - 2e^x + 10} dx.$$

Solución. Completando cuadrados en el denominador, se tiene:

$$I = \int \frac{e^x}{(e^x - 1)^2 + 9} dx.$$

Haciendo un cambio de variable

$$\begin{aligned} u &= e^x - 1, \quad du = e^x dx \\ I &= \int \frac{du}{u^2 + 3^2} \\ I &= \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{e^x - 1}{3}\right) + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.22. Calcule:

$$I = \int \frac{x^2 \left[\cos\left(2x^3-1\right)+1\right]}{\operatorname{sen}^2\left(2x^3-1\right)} dx$$

Solución. Separando la integral I, se tiene

$$I = \int x^2 \csc\left(2x^3-1\right)\cot\left(2x^3-1\right) dx + \int x^2 \csc^2\left(2x^3-1\right) dx$$

Haciendo un cambio de variable: $u = 2x^3 - 1$ con diferencial $du = 6x^2 dx$. Luego,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{6}\int \csc(u)\cdot\cot(u)du + \frac{1}{6}\int \csc^2(\mathrm{u})du \\ I &= -\frac{1}{6}\csc\left(2x^3-1\right) - \frac{1}{6}\cot\left(2x^3-1\right) + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.23. Calcule la integral:

$$\int \frac{e^x}{\left(\sqrt[3]{e^x-1}-1\right)\left(e^x-1\right)} dx.$$

Solución. Sea $z = \sqrt[3]{e^x-1}$, entonces

$$e^x = z^3+1, \quad e^x dx = 3z^2 dz.$$

Luego, reemplazando en

$$\begin{aligned} I = \int \frac{e^x}{\left(\sqrt[3]{e^x-1}-1\right)\left(e^x-1\right)} dx &= \int \frac{1}{(z-1)z^3} 3z^2 dz \\ &= \int \left(\frac{3}{z-1} - \frac{3}{z}\right) dz \\ &= 3\ln|z-1| - 3\ln|z| + C. \end{aligned}$$

y regresando a las variables originales, tenemos:

$$I = \int \frac{e^x}{\left(\sqrt[3]{e^x-1}-1\right)\left(e^x-1\right)} dx = 3\ln\left|\sqrt[3]{e^x-1}-1\right| - 3\ln\left|\sqrt[3]{e^x-1}\right| + C.$$

Ejemplo 1.24. Halle el valor de:

$$M = \int \frac{\left[\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\right]^2}{\sqrt{1+y^2}} dy$$

Solución. Realizando el siguiente cambio

$$z = \ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right), \quad \text{con} \quad dz = \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}}.$$

Luego, sustituyendo el cambio en M, se tiene:

$$M = \int \frac{\left[\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\right]^2}{\sqrt{1+y^2}} dy = \int z^2 dz = \frac{z^3}{3} + C = \frac{\left[\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\right]^3}{3} + C.$$

Ejemplo 1.25. Calcule: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^4+2)^{3/4}}$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2(x^4+2)^{3/4}} &= \int \frac{dx}{x^2\left[x^4\left(1+\frac{2}{x^4}\right)\right]^{3/4}} \\
&= \int \frac{dx}{x^5\left(1+\frac{2}{x^4}\right)^{3/4}}
\end{aligned}$$

Sea $u^4 = 1 + \dfrac{2}{x^4} \Longrightarrow u^3 du = -2\dfrac{dx}{x^5}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2(x^4+2)^{3/4}} &= \int \frac{-\frac{1}{2}u^3 du}{[u^4]^{3/4}} \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{u^3 du}{u^3} = -\frac{1}{2}u + C \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt[4]{1+\frac{2}{x^4}} + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.26. Determine la antiderivada de la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,sen}(x^{1/4}) - 2}{x^{3/4}\sqrt{1-\sqrt{x}}}$ cuya gráfica pasa por el punto $A(1, 2\pi)$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{arc\,sen}(x^{1/4}) - 2}{x^{3/4}\sqrt{1-\sqrt{x}}} dx &= \int \frac{\operatorname{arc\,sen}(x^{1/4})dx}{x^{3/4}\sqrt{1-x^{1/2}}} - 2\int \frac{dx}{x^{3/4}\sqrt{1-(x^{1/4})^2}} \\
&= \int \operatorname{arc\,sen}(x^{1/4}) d\left(4\operatorname{arc\,sen}(x^{1/4})\right) - 2\int \frac{dx}{x^{3/4}\sqrt{1-(x^{1/4})^2}}
\end{aligned}$$

Sea $u = x^{1/4} \Longrightarrow du = \dfrac{1}{4}x^{-3/4}dx \Longrightarrow 4du = \dfrac{dx}{x^{3/4}}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{arc\,sen}(x^{1/4}) - 2}{x^{3/4}\sqrt{1-\sqrt{x}}} dx &= 4\frac{\operatorname{arc\,sen}^2(x^{1/4})}{2} - 2\int \frac{4du}{\sqrt{1-u^2}} \\
&= 2\operatorname{arc\,sen}^2(x^{1/4}) - 8\operatorname{arc\,sen}(u) + C \\
&= 2\operatorname{arc\,sen}^2(x^{1/4}) - 8\operatorname{arc\,sen}(x^{1/4}) + C.
\end{aligned}$$

Luego, $F(x) = 2\operatorname{arc\,sen}^2(x^{1/4}) - 8\operatorname{arc\,sen}(x^{1/4}) + C$, es la antiderivada general. Así,

$$2\pi = F(1) = 2\operatorname{arc\,sen}^2(1) - 8\operatorname{arc\,sen}(1) + C \Longrightarrow C = 6\pi - \frac{\pi^2}{2}.$$

Por lo tanto,

$$F(x) = 2\operatorname{arc\,sen}^2(x^{1/4}) - 8\operatorname{arc\,sen}(x^{1/4}) + 6\pi - \frac{\pi^2}{2}.$$

Ejemplo 1.27. Determine: $\displaystyle\int \frac{x^4-2}{x^2\sqrt{x^4+x^2+2}}dx.$

Solución.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4-2}{x^2\sqrt{x^4+x^2+2}}dx &= \int \frac{x^4-2}{x^2\sqrt{x^2\left(x^2+1+\frac{2}{x^2}\right)}}dx \\
&= \int \frac{x^4-2}{x^3\sqrt{x^2+1+\frac{2}{x^2}}}dx \\
&= \int \frac{x-\frac{2}{x^3}}{\sqrt{x^2+1+\frac{2}{x^2}}}dx
\end{aligned}$$

Utilizando el cambio:

$$u^2 = x^2+1+\frac{2}{x^2} \Longrightarrow udu = \left(x-\frac{2}{x^3}\right)dx$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4-2}{x^2\sqrt{x^4+x^2+2}}dx &= \int \frac{udu}{\sqrt{u^2}} = \int du \\
&= u + C \\
&= \sqrt{x^2+1+\frac{2}{x^2}} + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.28. Calcule la integral

$$\int 2x\cos^2\left(x^2\right)\operatorname{sen}^4\left(x^2\right)dx.$$

Solución. Usando el cambio de variable $z = x^2$ y $dz = 2xdx$, se tiene

$$\begin{aligned}
I = \int 2x\cos^2\left(x^2\right)\operatorname{sen}^4\left(x^2\right)dx &= \int \cos^2(z)\operatorname{sen}^4(z)dz \\
&= \int \left(\frac{1+\cos(2z)}{2}\right)\left(\frac{1-\cos(2z)}{2}\right)^2 dz
\end{aligned}$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{8}\int (1+\cos(2z))\left(1-2\cos(2z)+\cos^2(2z)\right)dz\\
&= \frac{1}{8}\int \left(1-\cos(2z)-\cos^2(2z)+\cos^3(2z)\right)dz\\
&= \frac{1}{8}\int \left[1-\cos(2z)-\left(\frac{1+\cos(4z)}{2}\right)+\left(1-\operatorname{sen}^2(2z)\right)\cos(2z)\right]dz\\
&= \frac{1}{8}\int \left[1-\cos(2z)-\left(\frac{1+\cos(4z)}{2}\right)+\cos(2z)-\operatorname{sen}^2(2z)\cos(2z)\right]dz\\
&= \frac{1}{8}\int \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(4z)-\operatorname{sen}^2(2z)\cos(2z)\right]dz\\
&= \frac{1}{16}\int dz-\frac{1}{16}\int \cos(4z)dz-\frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2(2z)\cos(2z)dz\\
&= \frac{1}{16}z-\frac{1}{64}\operatorname{sen}(4z)-\frac{1}{48}\operatorname{sen}^3(2z)+C\\
&= \frac{1}{16}x^2-\frac{1}{64}\operatorname{sen}\left(4x^2\right)-\frac{1}{48}\operatorname{sen}^3\left(2x^2\right)+C.
\end{aligned}
$$

Ejercicios propuestos 1.2.

1. Halle las siguientes integrales

   a) $\displaystyle\int \sec(3x+5)dx$

   b) $\displaystyle\int \sqrt{3x+1}dx$

   c) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}(7x)}dx$

   d) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+4x+9}dx$

   e) $\displaystyle\int x^3e^{x^4+1}dx$

   f) $\displaystyle\int \frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$

   g) $\displaystyle\int \frac{\cot(\ln x)}{x}dx$

   h) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}dx$

   i) $\displaystyle\int 5^{\operatorname{sen}x}\cos x dx$

   j) $\displaystyle\int \left(1+e^{\operatorname{sen}^2 x}\right)\operatorname{sen}(2x)dx$

2. Halle $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)\,f^2(x+1)}dx$, donde $f(x)=\operatorname{sen}\left(3+\ln\left(\frac{x-2}{x}\right)\right)$.

3. Calcule la antiderivada general de:
$$f(x)=\frac{\ln\left(x^5\right)+e^{\ln\sqrt[5]{x}}}{x}.$$

4. Calcule la antiderivada general de:
$$h(x)=\int\left(\frac{x+2}{[x(x+4)+3]\sqrt{x^2+4x+3}}\right)dx.$$

5. Calcule la antiderivada general de:
$$f(x)=\int\left(\frac{x^2\csc\left(x^2-1\right)\cot\left(x^2-1\right)+\ln x}{x}\right)dx.$$

6. Calcule la siguiente integral:

$$\int \frac{\tan x}{\ln(\cos x)} dx.$$

7. Halle la antiderivada de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{2\sqrt[4]{x-1} + \sqrt{x-1}}$, cuya gráfica pasa por el punto $\left(2, \dfrac{1}{3}\right)$.

8. Calcule el valor de $M = B + A - D$, si se cumple:

$$\int \left[\frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x\,(4 + e^{\tan x})^2} + \sqrt{x^3}\right] dx = \frac{A}{4 + e^{\tan x}} + \frac{2}{B} x^{\frac{B}{D}} + K$$

Donde K es la constante de integración.

9. Calcule la siguiente integral:

$$\int \frac{4}{\sqrt{-8z^2 + 48z - 68}} dz.$$

1.3. Métodos de Integración

En esta sección, estudiaremos los diferentes métodos de integración, que son una colección de técnicas diseñadas para abordar una amplia variedad de problemas matemáticos. Estos métodos nos permiten resolver ejercicios que van más allá de las integrales básicas, ofreciendo soluciones eficaces para integrales más complejas.

1.3.1. Integrales usando el método de integración por partes

Para aplicar este método, la función integrando se debe descomponer en un producto de dos funciones. El método se basa en la regla del producto en sentido inverso:

- Sea la integral indefinida $\displaystyle\int f(x)g(x)dx$, donde f y g son funciones diferenciables.
- Si la función $g(x)$ se puede integrar, entonces escribir a $G(x)$ como una antiderivada de $g(x)$.
- Además, la derivada de un producto establece que:

$$\frac{d}{dx}(f(x)G(x)) = f(x)G'(x) + G(x)f'(x)$$

Como $G'(x) = g(x)$, se obtiene:

$$\frac{d}{dx}(f(x)G(x)) = f(x)g(x) + G(x)f'(x)$$

Luego, integrando resulta:

$$f(x)G(x) = \underbrace{\int f(x)g(x)dx}_{\text{integral a calcular}} + \int G(x)f'(x)dx$$

Ahora, se tiene la siguiente ecuación

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int G(x)f'(x)dx. \tag{1.3}$$

Denotando por $u = f(x)$ y $dv = g(x)dx$, se obtiene

$u = f(x)$	$dv = g(x)dx$
$du = f'(x)dx$	$v = \int g(x)dx = G(x)$

Luego, reemplazando en (1.3):

$$\boxed{\int udv = u \cdot v - \int vdu} \tag{1.4}$$

esta relación es conocida con el nombre de **fórmula de integración por partes**.

Importante.

1. Es conveniente asignar la variable u a las funciones logarítmicas, inversas trigonométricas y funciones polinomiales, según se presenten en la integral a calcular.
2. Las funciones exponenciales y trigonométricas del tipo seno y coseno se eligen como dv, según sea el caso.

Ejemplo 1.29. Halle

$$\int xe^x dx.$$

Solución. Sea $u = x$ y $dv = e^x dx$, entonces $du = dx$ y $v = e^x$.
Luego,

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= (x)(e^x) - \int (e^x dx) = xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.30. Calcule la integral

$$\int e^{2x}\operatorname{sen}(5x)dx.$$

Solución. Seleccionemos u y dv

$$u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x}dx$$
$$dv = \operatorname{sen}(5x)dx \Rightarrow v = -\frac{1}{5}\cos(5x)$$

Luego, se tiene

$$I = \int e^{2x}\operatorname{sen}(5x)dx = -\frac{e^{2x}}{5}\cos(5x) - \frac{2}{5}\int -e^{2x}\cos(5x)dx$$
$$I = -\frac{e^{2x}}{5}\cos(5x) + \underbrace{\frac{2}{5}\int e^{2x}\cos(5x)dx}_{I_1}$$

Integrando I_1 por partes, se tiene

$$u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x}dx$$
$$dv = \cos(5x)dx \Rightarrow v = \frac{1}{5}\operatorname{sen}(5x).$$

Así,

$$\begin{aligned} I &= -\frac{e^{2x}}{5}\cos(5x) + \frac{2}{5}\int e^{2x}\cos(5x)dx \\ &= -\frac{e^{2x}}{5}\cos(5x) + \frac{2}{5}\left[\frac{e^{2x}}{5}\operatorname{sen}(5x) - \underbrace{\frac{2}{5}\int e^{2x}\operatorname{sen}(5x)dx}_{I}\right]. \end{aligned}$$

Entonces

$$\left(I + \frac{4}{25}I\right) = \left[-\frac{e^{2x}}{5}\cos(5x) + \frac{2}{25}e^{2x}\operatorname{sen}(5x)\right]$$
$$I = \frac{25}{29}\left[-\frac{e^{2x}}{5}\cos(5x) + \frac{2}{25}e^{2x}\operatorname{sen}(5x)\right] + C.$$

Ejemplo 1.31. Calcule la integral:

$$I = \int \sqrt{x+1}\ln(x+1)dx.$$

Solución. Integrando I por el método de integración por partes. Seleccionando adecuadamente u y dv:

$$u = \ln(x+1) \Rightarrow du = \frac{dx}{x+1} \quad \text{y} \quad dv = \sqrt{x+1}dx \Rightarrow v = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$$

Luego, se tiene

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\ln(x+1) - \frac{2}{3}\int \sqrt{x+1}dx \\ &= \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\ln(x+1) - \frac{4}{9}(x+1)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.32. Calcule la integral $I = \int \operatorname{arcsen} x dx$.

Solución. Método por partes $\left\{\begin{array}{l} u = \operatorname{arcsen} x \\ dv = dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du = u'dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v = \int dv = \int dx = x \end{array}\right.$.

Aplicamos la fórmula del método de integración por partes:

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{arcsen} x dx = x \cdot \operatorname{arcsen}(x) - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \operatorname{arcsen}(x) - I_1 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ahora debemos resolver la integral

$$I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Por cambio de variable, hacemos : $\begin{cases} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \end{cases}$. Sustituyendo en la integral I_1 :

$$I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{-1}{2\sqrt{t}} dt = -\int \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Finalmente, reemplazando I_2 en la referencia (1.5):

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{arcsen} x dx = x \operatorname{arcsen} x - I_1 = x \operatorname{arcsen} x - \left(-\sqrt{1-x^2}\right) + C \\ &= x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.33. Calcule $\int \sec^3(x) dx$.

Solución. Aplicando integración por partes en:

$$I = \int \sec^3 x dx = \int \sec x \sec^2 x dx$$

y eligiendo

$u = \sec x$	$dv = \sec^2 x dx$
$du = \sec x \tan x dx$	$v = \tan x$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} I = \int \sec^3 x dx &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x \left(\sec^2 x - 1\right) dx \\ &= \sec x \tan x - \underbrace{\int \sec^3 x dx}_{I} + \int \sec x dx \end{aligned}$$

Luego,

$$2 \int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \int \sec x dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$$

Por lo tanto,

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

Ejemplo 1.34. Halle la siguiente integral:

$$\int (6x-1)(e+\arctan x)dx.$$

Solución. Integración por partes:

$u = e + \arctan x$	$dv = (6x-1)dx$
$du = \dfrac{dx}{x^2+1}$	$v = 3x^2 - x$

$$\begin{aligned} I &= \left(3x^2 - x\right)(e+\arctan x) - \int \frac{3x^2-x}{x^2+1}dx \\ &= \left(3x^2 - x\right)(e+\arctan x) - \int \left(3 - \frac{x+3}{x^2+1}\right)dx \\ &= \left(3x^2 - x\right)(e+\arctan x) - \int 3dx + \int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{3}{x^2+1}dx \\ &= \left(3x^2 - x\right)(e+\arctan x) - 3x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + 3\arctan x + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.35. Calcule

$$I = \int \frac{\ln\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)}{x^3}dx.$$

Solución. Aplicando la propiedad de logaritmos, se tiene:

$$\ln\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(1+x^2\right).$$

Luego, reemplazando en la integral

$$I = \int \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{3x^3}dx$$

Ahora aplicando el método de integración por partes.

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{3}\ln\left(1+x^2\right) &\Rightarrow du = \frac{2x}{3(x^2+1)}dx \\ dv = x^{-3}dx &\Rightarrow v = -\frac{1}{2x^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{6x^2}\ln\left(1+x^2\right) - \frac{1}{3}\int -\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}dx \\ &= -\frac{1}{6x^2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{3}\int \frac{1+x^2-x^2}{x\left(x^2+1\right)}dx \\ &= -\frac{1}{6x^2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{3}\int \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right]dx \\ &= -\frac{1}{6x^2}\ln\left|1+x^2\right| + \frac{1}{3}\left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right) + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.36. Calcule la integral

$$\int \left[(1-ax)^3 e^{(1-ax)^2} + x\left(bx^2+1\right)\operatorname{sen}\left(bx^2+1\right)\right] dx,$$

donde a y b son constantes reales diferente de cero.

Solución. Se observa que

$$\begin{aligned} I &= \int \left[(1-ax)^3 e^{(1-ax)^2} + x\left(bx^2+1\right)\operatorname{sen}\left(bx^2+1\right)\right] dx \\ &= \int (1-ax)^3 e^{(1-ax)^2} dx + \int x\left(bx^2+1\right)\operatorname{sen}\left(bx^2+1\right) dx \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable

$z=(1-ax)^2$	$dz=-2a(1-ax)dx$
$w=bx^2+1$	$dw=2bxdx$

Luego, reemplazando en la integral inicial

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2a}\int -2a(1-ax)(1-ax)^2 e^{(1-ax)^2} dx + \frac{1}{2b}\int 2bx\left(bx^2+1\right)\operatorname{sen}\left(bx^2+1\right) dx \\ &= -\frac{1}{2a}\int z\cdot e^z dz + \frac{1}{2b}\int w\cdot \operatorname{sen}(w) dw. \end{aligned}$$

Integrando por partes en ambas integrales:

$u_1=z$	$dv_1=e^z dz$
$du_1=dz$	$v_1=e^z$

y

$u=w$	$dv=\operatorname{sen} w dw$
$du=dw$	$v=-\cos w$

Finalmente, se obtiene

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2a}\left[ze^z - \int e^z dz\right] + \frac{1}{2b}\left[-w\cos w + \int \cos w dw\right] \\ &= -\frac{1}{2a}\left[ze^z - e^z\right] + \frac{1}{2b}\left[-w\cos w + \operatorname{sen} w\right] + C \\ &= -\frac{1}{2a}\left[(1-ax)^2-1\right] e^{(1-ax)^2} + \frac{1}{2b}\left[-\left(bx^2+1\right)\cos\left(bx^2+1\right) + \operatorname{sen}\left(bx^2+1\right)\right] + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.37. Calcule el valor de $M = D + B - A$, si se cumple:

$$\int x^3 \operatorname{arcsec}(x) dx = \frac{A}{4}x^4 \operatorname{arcsec} x - \frac{1}{B}(x^2-1)^{3/2} + \frac{1}{D}\sqrt{x^2-1} + C,$$

donde C es la constante de integración.

Solución. Integrando por partes:

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{arcsec} x \Rightarrow du = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx \\ dv &= x^3 dx \Rightarrow v = \frac{x^4}{4} \end{aligned}$$

Luego,

$$I = \frac{1}{4}x^4 \operatorname{arcsec} x - \frac{1}{4}\underbrace{\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}dx}_{I_1}$$

Para I_1 hacemos: $u^2 = \left(x^2-1\right)$ entonces $udu = xdx$ y

$$I_1 = \int \left(u^2+1\right) du = \frac{1}{3}u^3 + u + C$$

Así, la integral I queda determinada por

$$I = \frac{1}{4}x^4 \operatorname{arcsec} x - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\left(x^2-1\right)^{3/2} + \left(x^2-1\right)^{1/2}\right] + C.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} M &= D + B - A \\ &= -4 + 12 - 1 \\ &= 7. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.38. Calcule:

$$\int 2(x-1)\arctan x dx.$$

Solución. Usando el método de integración por partes, donde

$$u = \arctan x \quad \text{y} \quad dv = 2(x-1),$$

entonces

$$du = \frac{1}{1+x^2}dx \quad \text{y} \quad v = x^2 - 2x.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int 2(x-1)\arctan x dx &= \left(x^2-2x\right)\arctan x - \int \frac{x^2-2x}{1+x^2}dx \\ &= \left(x^2-2x\right)\arctan x - \int \frac{x^2+1-1-2x}{1+x^2}dx \\ &= \left(x^2-2x\right)\arctan x - \int \frac{x^2+1}{x^2+1}dx + \int \frac{1+2x}{1+x^2}dx \\ &= \left(x^2-2x\right)\arctan x - \int dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \frac{2x}{1+x^2}dx \\ &= \left(x^2-2x\right)\arctan x - x + \arctan x + \ln\left|1+x^2\right| + C. \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos 1.3.

1. Halle las siguientes integrales:

   a) $\int x\cos x dx$

   b) $\int e^x \cos(2x) dx$

   c) $\int x\arctan(3x) dx$

   d) $\int \sec^3 x dx$

   e) $\int \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$

   f) $\int (x^2+7x)e^{5x} dx$

   g) $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x) dx$

   h) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

2. Pruebe que

$$\int x^p \ln(x)dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\ln(x) - \frac{x^{p+1}}{(p+2)^2} + C, \quad p \neq -1.$$

3. Halle las siguientes integrales:

   a) $\int \frac{xe^{2x}}{(2x+1)^2} dx$

   b) $\int e^{2x}\operatorname{sen}^2(3x) dx$

   c) $\int xe^{x^2}\operatorname{sen}\left(x^2+1\right) dx$

   d) $\int \operatorname{sen}^2(2\ln x) dx$

   e) $\int \left(x^3-2x\right)e^x dx$

   f) $\int x\sec^2 x \tan x dx$

   g) $\int x^2 \operatorname{arcsec} x dx$

   h) $\int \frac{t \operatorname{arcsen} t}{\sqrt{1-t^2}} dt$

   i) $\int e^{\cos x}\operatorname{sen} x \cos^2 x dx$

   j) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

   k) $\int \arccos\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) dx$

4. Verifique que:

   a) $\int e^{ax}\operatorname{sen} bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx) + C$

   b) $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\operatorname{sen} bx) + C$

5. Demuestre que:

   a) $\int \operatorname{sen}^n x dx = -\operatorname{sen}^{(n-1)} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{(n-2)} x\cos^2 x dx$

   b) $\int \operatorname{sen}^n x dx = -\frac{\operatorname{sen}^{(n-1)} x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{(n-2)} x dx$

6. Verifique que:

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx.$$

1.3.2. Integrales Trigonométricas

En esta sección, exploraremos las técnicas para abordar integrales que involucran funciones trigonométricas, desde los casos más simples hasta situaciones más complejas que requieren un mayor análisis.

I. Integrales de funciones trigonométricas básicas.

Existen casos inmediatos, que solo requieren un cambio de variable para luego obtener una integral inmediata. A continuación, mostramos algunos ejemplos:

- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(nx)dx = -\frac{1}{n}\cos(nx) + C$
- $\displaystyle\int \cos(nx)dx = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx) + C$
- $\displaystyle\int \sec^2(nx)dx = \frac{1}{n}\tan(nx) + C$
- $\displaystyle\int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)| + C = \ln|\sec(x)| + C$

La idea para resolver una integral que involucre funciones trigonométricas es modificar la integral usando identidades adecuadas y, en muchos casos también el método de cambio de variable, que nos permite llegar a una integral inmediata.

Importante. Es sustancial recordar algunas identidades trigonométricas como:

1. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x$
3. $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cot x$
4. $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \csc x$
5. $\dfrac{1}{\cos x} = \sec x$
6. $\dfrac{1}{\tan x} = \cot x$
7. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
8. $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$
9. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
10. $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$
11. $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$
12. $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

II. Cuando el integrando es un producto de funciones trigonométricas.

Caso 1: Integrales que involucran productos de cosenos y senos de la forma:

$$\int \operatorname{sen}(Ax)\cos(Bx)dx \qquad \int \cos(Ax)\cos(Bx)dx \qquad \int \operatorname{sen}(Ax)\operatorname{sen}(Bx)dx$$

Estas integrales se resuelven aplicando técnicas de expansión y manipulación algebraica para descomponer estos productos en términos más simples, lo que nos permitirá integrar cada término por separado.

Importante. Para este primer caso es valioso recordar las siguientes identidades:

i. $\operatorname{sen}(Ax)\cos(Bx) = \dfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left((A-B)x\right) + \operatorname{sen}\left((A+B)x\right)\right]$

ii. $\cos(Ax)\cos(Bx) = \dfrac{1}{2}\left[\cos\left((A-B)x\right) + \cos\left((A+B)x\right)\right]$

iii. $\operatorname{sen}(Ax)\operatorname{sen}(Bx) = \dfrac{1}{2}\left[\cos\left((A-B)x\right) - \cos\left((A+B)x\right)\right]$

Ejemplo 1.39. Calcule $\displaystyle\int \operatorname{sen}(10x)\cos(5x)dx$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}(10x)\cos(5x)dx &= \int \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(10x-5x) + \operatorname{sen}(10x+5x)\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen}(15x))dx \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(5x)}{5} + \frac{\cos(15x)}{15}\right) + C \\
&= -\frac{\cos(5x)}{10} - \frac{\cos(15x)}{30} + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.40. Calcule $\displaystyle\int \cos(31x)\cos(12x)dx$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\int \cos(31x)\cos(12x)dx &= \frac{1}{2}\int (\cos(19x) + \cos(43x))dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(19x)}{19} + \frac{\operatorname{sen}(43x)}{43}\right) + C \\
&= \frac{\operatorname{sen}(19x)}{38} + \frac{\operatorname{sen}(43x)}{86} + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.41. Calcule $\displaystyle\int \operatorname{sen}(13x)\operatorname{sen}(7x)dx$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}(13x)\operatorname{sen}(7x)dx &= \frac{1}{2}\int (\cos(6x) - \cos(20x))dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(6x)}{6} - \frac{\operatorname{sen}(20x)}{20}\right) + C \\
&= \frac{\operatorname{sen}(6x)}{12} - \frac{\operatorname{sen}(20x)}{40} + C.
\end{aligned}$$

Caso 2: Integrales de funciones trigonométricas elevadas a potencias enteras de la forma:

$$\int \operatorname{sen}^p(x)\cos^q(x)dx \qquad \int \tan^p(x)\sec^q(x)dx \qquad \int \cot^p(x)\csc^q(x)dx$$

donde p o q son números enteros positivos. Para este segundo caso, utilizaremos identidades trigonométricas y propiedades de las potencias para simplificar estas expresiones y resolver las integrales resultantes de manera simple.

Ejemplo 1.42. Calcule:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx.$$

Solución. Observemos que

$$\begin{aligned}\cos^3 x &= \cos x \cos^2 x = \cos x\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)\\ &= \cos x - \operatorname{sen}^2 x \cos x\end{aligned}$$

Entonces, reemplazando se obtiene:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx &= \int \operatorname{sen}^2 x\left(\cos x - \operatorname{sen}^2 x \cos x\right)dx\\ &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos x dx - \int \operatorname{sen}^4 x \cos x dx\\ &= \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.43. Calcule la integral:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x dx.$$

Solución.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \cos^2 x dx\\ &= \int \left(1-\cos^2 x\right)\operatorname{sen} x \cos^2 x dx\\ &= \int \cos^2 x \operatorname{sen} x dx - \int \cos^4 x \operatorname{sen} x dx\\ &= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.44. Halle la integral:

$$\int \operatorname{sen}^3(4x)\cos^3(4x)dx.$$

Solución.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3(4x)\cos^3(4x)dx &= \int \cos^2(4x)\cos(4x)\operatorname{sen}^3(4x)dx\\ &= \int \left(1-\operatorname{sen}^2 4x\right)\cos(4x)\operatorname{sen}^3(4x)dx\\ &= \int \operatorname{sen}^3(4x)\cos(4x)dx - \int \operatorname{sen}^5(4x)\cos(4x)dx\\ &= \frac{1}{16}\operatorname{sen}^4(4x) - \frac{1}{24}\operatorname{sen}^6(4x)+C\end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo, se muestra una integral donde p es un número racional.

Ejemplo 1.45. Calcule la integral:

$$\int \sqrt{\operatorname{sen}^3(4x)}\cos^5(4x)\,dx.$$

Solución.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\operatorname{sen}^3(4x)}\cos^5(4x)\,dx &= \int \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}(4x)\cos^4(4x)\cos(4x)\,dx\\ &= \int \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}(4x)\left(1-\operatorname{sen}^2(4x)\right)^2\cos(4x)\,dx\\ &= \int \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}(4x)\left(1-2\operatorname{sen}^2(4x)+\operatorname{sen}^4(4x)\right)\cos(4x)\,dx\\ &= \int \left[\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}(4x)-2\operatorname{sen}^{\frac{7}{2}}(4x)+\operatorname{sen}^{\frac{11}{2}}(4x)\right]\cos(4x)\,dx\\ &= \frac{1}{10}sen^{\frac{5}{2}}(4x)-\frac{1}{9}\operatorname{sen}^{\frac{9}{2}}(4x)+\frac{1}{26}\operatorname{sen}^{\frac{13}{2}}(4x)+C.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.46. Calcule:

$$\int \cos^2(2x)\operatorname{sen}(6x+1)\,dx.$$

Solución.

$$\begin{aligned}\int \cos^2(2x)\operatorname{sen}(6x+1)\,dx &= \int \left(\frac{1+\cos(4x)}{2}\right)\operatorname{sen}(6x+1)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(6x+1)\,dx+\frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(6x+1)\cos(4x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(6x+1)\,dx+\frac{1}{4}\int \operatorname{sen}(10x+1)+\operatorname{sen}(2x+1)\,dx\\ &= -\frac{1}{12}\cos(6x+1)-\frac{1}{40}\cos(10x+1)-\frac{1}{8}\cos(2x+1)+C.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.47. Calcule la integral:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x dx.$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{8}\int \left(1-\cos^2(2x)\right)\left(1+\cos(2x)\right) dx \\
&= \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2(2x)\left(1+\cos(2x)\right) dx \\
&= \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2(2x) dx + \int \frac{1}{8}\operatorname{sen}^2(2x)\cos(2x) dx \\
&= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) dx + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2(2x)\cos(2x) dx \\
&= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen}(4x) + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3(2x) + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.48. Calcule la integral:

$$\int \operatorname{sen}^2(4x) dx.$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2(4x) dx &= \int \frac{1-\cos(8x)}{2} dx \\
&= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(8x) dx \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}\operatorname{sen}(8x) + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.49. Calcule:

$$\int \cos^5(3x) dx.$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\int \cos^5(3x) dx &= \int \cos^4(3x)\cos(3x) dx \\
&= \int \left(1-\operatorname{sen}^2(3x)\right)^2 \cos(3x) dx \\
&= \int \left(1-2\operatorname{sen}^2(3x)+\operatorname{sen}^4(3x)\right)\cos(3x) dx \\
&= \int \cos(3x) dx - 2\int \operatorname{sen}^2(3x)\cos(3x) dx + \int \operatorname{sen}^4(3x)\cos(3x) dx \\
&= \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) - \frac{2}{9}\operatorname{sen}^3(3x) + \frac{1}{15}\operatorname{sen}^5(3x) + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.50. Calcule la integral:

$$\int \tan^4(2x) dx.$$

Solución.

$$\begin{aligned}\int \tan^4(2x)dx &= \int \tan^2(2x)\tan^2(2x)dx\\ &= \int \left(\sec^2(2x)-1\right)\ \tan^2(2x)dx\\ &= \int \tan^2(2x)\sec^2(2x)dx - \int \tan^2(2x)dx\\ &= \frac{1}{6}\tan^3(2x) - \int \left(\sec^2(2x)-1\right)dx\\ &= \frac{1}{6}\tan^3(2x) - \frac{1}{2}\tan(2x)+x+C.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.51. Calcule la integral:

$$\int \cot^3(2x)dx$$

Solución.

$$\begin{aligned}\int \cot^3(2x)dx &= \int \cot^2(2x)\cot(2x)dx\\ &= \int \left(\csc^2(2x)-1\right)\ \cot(2x)dx\\ &= \int \csc^2(2x)\cot(2x)dx\ - \int \cot(2x)dx\\ &= -\frac{1}{4}\cot^2(2x) - \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen}(2x)|+C\end{aligned}$$

Ejemplo 1.52. Calcule la siguiente integral:

$$\int \tan^5(x)\sec^9(x)dx.$$

Solución.

$$\begin{aligned}\int \tan^5(x)\sec^9(x)dx &= \int \left(\sec^2(x)-1\right)^2\sec^8(x)\tan(x)\sec(x)dx\\ &= \int \left(\sec^4(x)-2\sec^2(x)+1\right)\sec^8(x)(\tan(x)\sec(x)dx)\\ &= \int \left(\sec^{12}(x)-2\sec^{10}(x)+\sec^8(x)\right)(\tan(x)\sec(x)dx)\\ &= \frac{\sec^{13}(x)}{13} - \frac{2}{11}\sec^{11}(x) + \frac{\sec^9(x)}{9}+C.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.53. Calcule:

$$\int \tan^5(3x)dx.$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\int \tan^5(3x)dx &= \int \tan^3(3x)(\sec^2(3x)-1)dx \\
&= \int \tan^3(3x)\sec^2(3x)dx - \int \tan^3(3x)dx \\
&= \int \tan^3(3x)d\left(\frac{\tan(3x)}{3}\right) - \int \tan(3x)(\sec^2(3x)-1)dx \\
&= \frac{\tan^4(3x)}{12} - \int \tan(3x)\sec^2(3x)dx + \int \tan(3x)dx \\
&= \frac{\tan^4(3x)}{12} - \frac{\tan^2(3x)}{6} + \frac{\ln|\sec(3x)|}{3} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.54. Calcule la integral:

$$I = \int 2x\cos^2\left(x^2\right) sen^4\left(x^2\right) dx.$$

Solución. Haciendo un cambio de variable:

$$z = x^2, \quad \text{con } dz = 2xdx$$

Luego,

$$\begin{aligned}
I &= \int \cos^2 z \operatorname{sen}^4 z dz \\
&= \int \left(\frac{1+\cos(2z)}{2}\right)\left(\frac{1-\cos(2z)}{2}\right)^2 dz \\
&= \frac{1}{8}\int (1+\cos(2z))\left(1-2\cos(2z)+\cos^2(2z)\right) dz \\
&= \frac{1}{8}\int \left(1-\cos(2z)-\cos^2(2z)+\cos^3(2z)\right) dz \\
&= \frac{1}{8}\int \left[1-\cos(2z)-\left(\frac{1+\cos(4z)}{2}\right)+\left(1-\operatorname{sen}^2(2z)\right)\cos(2z)\right] dz \\
&= \frac{1}{8}\int \left[1-\cos(2z)-\left(\frac{1+\cos(4z)}{2}\right)+\cos(2z)-\operatorname{sen}^2(2z)\cos(2z)\right] dz \\
&= \frac{1}{8}\int \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(4z)-sen^2(2z)\cos(2z)\right] dz \\
&= \frac{1}{16}\int dz - \frac{1}{16}\int \cos(4z)\,dz - \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2(2z)\cos(2z)\,dz \\
&= \frac{1}{16}z - \frac{1}{64}\operatorname{sen}(4z)\,dz - \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3(2z) + C \\
&= \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{64}\operatorname{sen}\left(4x^2\right)dz - \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3\left(2x^2\right) + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.55. Calcule:

$$I = \int \tan^5(x)\sec^{\frac{8}{3}}(x)\,dx.$$

Solución.

$$\begin{aligned}
I &= \int \sec^{\frac{5}{3}}(x)\tan^4(x)\sec(x)\tan(x)\,dx\\
&= \int \sec^{\frac{5}{3}}(x)\left(\sec^2(x)-1\right)^2\sec(x)\tan(x)\,dx\\
&= \int \sec^{\frac{5}{3}}(x)\left(\sec^4(x)-2\sec^2(x)+1\right)\sec(x)\tan(x)\,dx\\
&= \int \left(\sec^{\frac{17}{3}}(x)-2\sec^{\frac{11}{3}}(x)+\sec^{\frac{5}{3}}(x)\right)\sec(x)\tan(x)\,dx\\
&= \int \sec^{\frac{17}{3}}(x)\sec(x)\tan(x)\,dx-2\int \sec^{\frac{11}{3}}(x)\sec(x)\tan(x)\,dx+\int \sec^{\frac{5}{3}}(x)\sec(x)\tan(x)\,dx\\
&= \frac{3}{20}\sec^{\frac{20}{3}}(x)-\frac{3}{7}\sec^{\frac{14}{3}}(x)+\frac{3}{8}\sec^{\frac{8}{3}}(x)+C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.56. Calcule la integral:

$$\int \tan^2(2x)\sec^4(2x)\,dx.$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\int \tan^2(2x)\sec^4(2x)\,dx &= \int \left(\tan^2(2x)\sec^2(2x)\sec^2(2x)\right)dx\\
&= \int \left(\tan^2(2x)\left(1+\tan^2 2x\right)\sec^2(2x)\right)dx\\
&= \int \left(\tan^2(2x)+\tan^4(2x)\right)\sec^2(2x)\,dx\\
&= \int \tan^2(2x)\sec^2(2x)\,dx+\int \tan^4(2x)\sec^2(2x)\,dx\\
&= \frac{1}{2}\frac{\tan^3(2x)}{3}+\frac{1}{2}\frac{\tan^5(2x)}{5}+C\\
&= \frac{1}{6}\tan^3(2x)+\frac{1}{10}\tan^5(2x)+C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.57. Calcule la integral:

$$\int \cot^{\frac{3}{5}}(x)\csc^4(x)\,dx.$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\int \cot^{\frac{3}{5}}(x)\csc^4(x)\,dx &= \int \cot^{\frac{3}{5}}(x)\csc^2(x)\csc^2(x)\,dx\\
&= \int \cot^{\frac{3}{5}}(x)\left(1+\cot^2(x)\right)\csc^2(x)\,dx\\
&= \int \cot^{\frac{3}{5}}(x)\csc^2(x)\,dx+\int \cot^{\frac{13}{5}}(x)\csc^2(x)\,dx\\
&= -\frac{5}{8}\cot^{\frac{8}{5}}(x)-\frac{5}{18}\cot^{\frac{18}{5}}(x)+C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.58. Calcule la integral:

$$\int \frac{\cot^3(e^x)\csc^4(e^x)}{e^{-x}}dx.$$

Solución. Haciendo un cambio de variable $e^x = z$, con $e^x dx = dz$, se tiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cot^3(e^x)\csc^4(e^x)}{e^{-x}}dx &= \int \cot^3(z)\csc^4(z)\,dz \\
&= \int \cot^3(z)\csc^2(z)\csc^2(z)\,dz \\
&= \int \cot^3(z)\left(1+\cot^2(z)\right)\csc^2(z)\,dz \\
&= \int \cot^3(z)\csc^2(z)\,dz + \int \cot^5(z)\csc^2(z)\,dz \\
&= -\frac{\cot^4(z)}{4} - \frac{\cot^6(z)}{6} + C \\
&= -\frac{\cot^4(e^x)}{4} - \frac{\cot^6(e^x)}{6} + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.59. Calcule la integral:

$$I = \int \frac{\tan^5(2\sqrt{x}+7)\sec^{\frac{2}{3}}(2\sqrt{x}+7)}{\sqrt{x}}dx.$$

Solución. Haciendo un cambio de variable $u = 2\sqrt{x}+7$, cuyo diferencial es $du = \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
I &= \int \tan^4(u)\sec^{-\frac{1}{3}}(u)\tan(u)\sec(u)\,du \\
&= \int \left(\sec^2(u)-1\right)^2\sec^{-\frac{1}{3}}(u)\tan(u)\sec(u)\,du \\
&= \int \left(\sec^4(u)-2\sec^2(u)+1\right)\sec^{-\frac{1}{3}}(u)\tan(u)\sec(u)\,du \\
&= \int \left(\sec^{\frac{11}{3}}(u)-2\sec^{\frac{5}{3}}(u)+\sec^{-\frac{1}{3}}u\right)\tan(u)\sec(u)\,du \\
&= \int \sec^{\frac{11}{3}}(u)\tan(u)\sec(u)\,du - 2\int \sec^{\frac{5}{3}}(u)\tan(u)\sec(u)\,du + \int \sec^{-\frac{1}{3}}(u)\tan(u)\sec(u)\,du \\
&= \frac{3}{14}\sec^{\frac{14}{3}}(u) - \frac{3}{4}\sec^{\frac{8}{3}}(u) + \frac{3}{2}\sec^{\frac{2}{3}}(u) + C.
\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos

$$I = \frac{3}{14}\sec^{\frac{14}{3}}\left(2\sqrt{x}+7\right) - \frac{3}{4}\sec^{\frac{8}{3}}\left(2\sqrt{x}+7\right) + \frac{3}{2}\sec^{\frac{2}{3}}\left(2\sqrt{x}+7\right) + C.$$

Ejemplo 1.60. Calcule la integral

$$I = \int \sqrt{\cot(x)}\,\mathrm{sen}^{-6}(x)\,dx.$$

Solución.

$$\begin{aligned}
I &= \int \cot^{\frac{1}{2}}(x)\csc^6(x)\,dx \\
&= \int \cot^{\frac{1}{2}}(x)\csc^4(x)\csc^2(x)\,dx \\
&= \int \cot^{\frac{1}{2}}(x)\left(1+\cot^2(x)\right)^2\csc^2(x)\,dx \\
&= \int \cot^{\frac{1}{2}}(x)\left(1+2\cot^2(x)+\cot^4(x)\right)\csc^2(x)\,dx \\
&= \int \cot^{\frac{1}{2}}(x)\csc^2(x)\,dx + 2\int \cot^{\frac{5}{2}}(x)\csc^2(x)\,dx + \int \cot^{\frac{9}{2}}(x)\csc^2(x)\,dx \\
&= -\frac{2}{3}\cot^{\frac{3}{2}}(x) - \frac{4}{7}\cot^{\frac{7}{2}}(x) - \frac{2}{11}\cot^{\frac{11}{2}}(x) + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.61. Calcule:

$$\int \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\csc^2\left(\frac{5}{2}x\right)}dx.$$

Solución. Se puede observar que

$$\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\csc^2\left(\frac{5}{2}x\right)} = \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}^2\left(\frac{5}{2}x\right).$$

Luego, como

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2},$$

vemos que el integrando se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\csc^2\left(\frac{5}{2}x\right)} = \operatorname{sen}(3x)\left(\frac{1-\cos(5x)}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(3x)-\operatorname{sen}(3x)\cos(5x)}{2}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\csc^2\left(\frac{5}{2}x\right)}dx &= \frac{1}{2}\int(\operatorname{sen}(3x)-\operatorname{sen}(3x)\cos(5x))dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int \operatorname{sen}(3x)dx - \int \operatorname{sen}(3x)\cos(5x)dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(3x)}{3} - \int \frac{1}{2}((\cos(8x)+\cos(2x)))dx\right] \\
&= -\frac{\cos(3x)}{6} - \frac{\operatorname{sen}(8x)}{32} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{8} + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.62. Calcule la integral:

$$\int \frac{\tan^2(e^x)\csc^3(e^x)}{e^{-x}}dx$$

Solución. Haciendo un cambio de variable $u = e^x$, con $du = e^x dx$:

$$\begin{aligned}
\int \tan^2(u)\csc^3(u)\,du &= \int \tan^2(u)\left(1+\cot^2(u)\right)\csc(u)\,du \\
&= \int \left(1+\cot^2 u\right)\csc(u)\tan^2(u)\,du \\
&= \int \csc(u)\tan^2(u)\,du + \int \csc(u)\,du \\
&= \int \frac{\operatorname{sen}(u)}{\cos^2(u)}du + \int \csc(u)\,du \\
&= \frac{1}{\cos(u)} + \ln\left|\csc(u)-\cot(u)\right| + C
\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos

$$\int \frac{\tan^2(e^x)\csc^3(e^x)}{e^{-x}}dx = \frac{1}{\cos(e^x)} + \ln\left|\csc(e^x)-\cot(e^x)\right| + C.$$

Ejercicios propuestos 1.4.

Encuentre las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \cos^3(4x)\,\mathrm{sen}^7(4x)dx$
2. $\displaystyle\int \frac{\cos^5(2x)}{\sqrt[3]{\mathrm{sen}(2x)}}dx$
3. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^4(6x)\cos^2(6x)dx$
4. $\displaystyle\int \cot^5(ax)dx,\ a>0.$
5. $\displaystyle\int \tan^5(5x)\sec^3(5x)dx$
6. $\displaystyle\int \cot^5(7x)\csc^7(7x)dx$
7. $\displaystyle\int x^2\cos(2-5x^3)\,\mathrm{sen}^{-2}(2-5x^3)dx$
8. $\displaystyle\int \tan^5(3x)\sqrt{\sec^9(3x)}dx$
9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\tan^2(\ln x)\sec^{12}(\ln x)}}{x}dx$
10. $\displaystyle\int \frac{e^{-x}\tan^{4/3}(e^{-x})}{\mathrm{sen}^6(e^{-x})}dx$
11. $\displaystyle\int x^{-1/2}\left(\frac{\tan(\sqrt{x})}{2}\right)^3\cos^{5/2}(\sqrt{x})dx$
12. $\displaystyle\int \mathrm{sen}(2x)\cos(5x)dx.$
13. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^3(4x)\cos^{7/2}(4x)dx$
14. $\displaystyle\int \mathrm{sen}(2x)\,\mathrm{sen}(4x)dx.$
15. $\displaystyle\int \sec^6(x)\cot^{2/3}(x)dx.$
16. $\displaystyle\int \cos(3x)\cos(7x)dx.$
17. $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{sen}^2\left(\sqrt{x^3+1}\right)\cos^4\left(\sqrt{x^3+1}\right)}{\sqrt{x^3+1}}dx.$
18. $\displaystyle\int \mathrm{sen}\,3x\,\mathrm{sen}\,2x\,\mathrm{sen}\,x\,dx.$
19. $\displaystyle\int \sqrt{\sec x}\tan^5 x\,dx.$
20. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^3 x\cos^4 x\,dx.$
21. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^4 x\cos^5 x\,dx.$
22. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}^5(3x)}{\cos^{14}(3x)}dx.$
23. $\displaystyle\int \left(\cot x+\tan^2 x\right)^2dx.$
24. $\displaystyle\int \frac{\sec^6 e^x}{e^{-x}}dx.$
25. $\displaystyle\int \left(\cos^4 t+\cos t\right)\mathrm{sen}^2 t\,dt.$
26. $\displaystyle\int \mathrm{sen}(x-\pi/2)\,\mathrm{sen}(3x-\pi/2)dx.$
27. $\displaystyle\int \cot^6(2w)dw.$
28. $\displaystyle\int \sqrt[5]{\csc^4 2x}\cot^3 2x\,dx$
29. $\displaystyle\int \left(\sec^2 x+2\,\mathrm{sen}\,x\right)\tan^2 x\,dx.$
30. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\mathrm{sen}\,x}\cos^5(x)dx$

1.3.3. Integración por sustitución trigonométrica

En esta sección, estudiaremos una técnica denominada **sustitución trigonométrica**, la cual es útil en el cálculo de integrales que tienen raíces cuadradas de sumas o diferencias de cuadrados. Con este método, transformamos estas expresiones usando funciones trigonométricas, lo que hace que las integrales parezcan más simples de resolver.

Sea $u = f(x)$ una función de x, estas integrales son de la forma que incluyen términos como

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \qquad \sqrt{a^2 + u^2} \qquad \text{y} \qquad \sqrt{u^2 - a^2}, \qquad \text{con } a > 0.$$

Para este tipo de integrales se consideran tres casos:

- **Caso 1.** Si el integrando contiene una expresión de la forma

  $$\sqrt{a^2 - u^2}, \quad a > 0,$$

  sustituimos $u = a \operatorname{sen} \theta$ considerando $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$. Al usar esta sustitución, notamos lo siguiente:

  $$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = \sqrt{a^2\left(1 - \operatorname{sen}^2 \theta\right)} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = a \cos \theta;$$

  además, $\theta = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{u}{a}\right)$ y $du = a \cos \theta d\theta$.

- **Caso 2.** Si el integrando contiene una expresión de la forma

  $$\sqrt{a^2 + u^2}, \; a > 0,$$

  sustituimos $u = a \tan \theta$, con $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. De manera similar al caso anterior, con esta sustitución se puede observar que

  $$\sqrt{a^2 + u^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} = \sqrt{a^2\left(1 + \tan^2 \theta\right)} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} = a \sec \theta$$

  donde $\theta = \arctan\left(\dfrac{u}{a}\right)$ y $du = a \sec^2 \theta d\theta$.

- **Caso 3.** Si en el integrando hay una expresión de la forma

  $$\sqrt{u^2 - a^2}, \; a > 0,$$

  se realiza la sustitución $u = a \sec \theta$, donde $\begin{cases} 0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}, & \text{si } u \geq a \\ \dfrac{\pi}{2} < \theta \leq \pi, & \text{si } u \leq -a \end{cases}$. Además, para esta sustitución notamos que

  $$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = \sqrt{a^2\left(\sec^2 \theta - 1\right)} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = a|\tan \theta|,$$

  con $\theta = \operatorname{arcsec}\left(\dfrac{u}{a}\right)$ y $du = a \sec \theta \tan \theta d\theta$.

Cuando nos encontramos con una expresión como $\sqrt{a^2 - u^2}$ en el denominador de una función a integrar, se impone una restricción adicional sobre la variable θ: en este caso, θ debe estar comprendida en el intervalo $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Además, después de realizar la integración con respecto a la variable θ, es necesario regresar a la variable original x.

Si dibujamos un triángulo rectángulo de referencia donde

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{u}{a}, \quad \tan \theta = \frac{u}{a}, \quad \text{o} \quad \sec \theta = \frac{u}{a},$$

tal como se muestra en la Figura 1.3, entonces las demás funciones trigonométricas pueden expresarse fácilmente en términos de u.

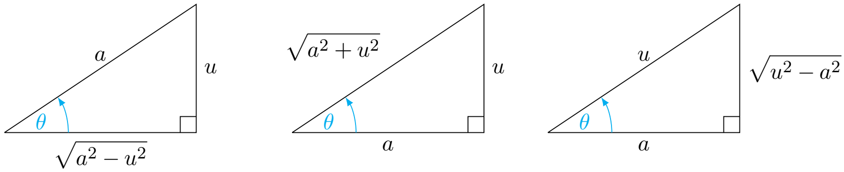


Figura 1.3: Triángulos rectángulos usados para representar las funciones trigonométricas usando una expresión algebraica que incluye a u y a.

Ejemplo 1.63. Calcule:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}.$$

Solución. Se observa que este ejemplo corresponde al primer caso. Identificando $u = x$ y $a = 3$ podemos hacer la sustitución

$$x = 3\operatorname{sen}\theta, \quad dx = 3\cos\theta d\theta$$

donde $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

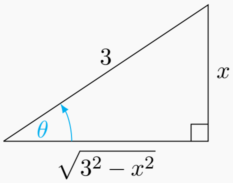


Figura 1.4: Triángulo rectángulo del ejemplo 1.63.

Del triángulo, tenemos que

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3},$$

entonces

$$\sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta.$$

Reemplazando, vemos que la integral se convierte en

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{3\cos\theta d\theta}{9\operatorname{sen}^2\theta(3\cos\theta)} = \frac{1}{9}\int \csc^2\theta d\theta = -\frac{1}{9}\cot\theta + C.$$

Además, de la Figura (1.4), tenemos que $\cot\theta = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$.
Finalmente,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = -\frac{1}{9}\cot\theta + C = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C.$$

Ejemplo 1.64. Calcule la integral

$$I = \int \frac{x-3}{3+\sqrt{6x-x^2}}dx.$$

Solución. Notamos que la integral se puede reescribir de la siguiente manera

$$\int \frac{x-3}{3+\sqrt{6x-x^2}}dx = \int \frac{x-3}{3+\sqrt{9-(x-3)^2}}dx.$$

Así, podemos realizar la siguiente sustitución

$$x-3=3\operatorname{sen}\theta, \text{ con } dx=3\cos\theta d\theta$$

y reemplazarla en la integral

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3\operatorname{sen}\theta}{3+\sqrt{9-9\operatorname{sen}^2\theta}}(3\cos\theta d\theta) \\ &= 3\int \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{1+\cos\theta}d\theta \end{aligned}$$

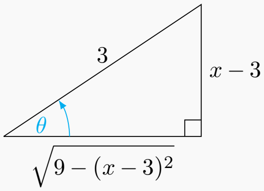


Figura 1.5: Triángulo rectángulo del ejemplo 1.64.

Ahora, si hacemos nuevamente un cambio de variable en la última integral:

$$u=1+\cos\theta \quad \text{y} \quad du=-\operatorname{sen}\theta d\theta$$

obtenemos

$$\begin{aligned} 3\int \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{1+\cos\theta}d\theta &= -3\int \frac{(u-1)}{u}du \\ &= -\int du+3\int \frac{1}{u}du \\ &= -3u+3\ln|u|+C \\ &= -3\left(1+\cos\theta\right)+3\ln|1+\cos\theta|+C \\ &= -3\left(1+\frac{\sqrt{9-(x-3)^2}}{3}\right)+3\ln\left|1+\frac{\sqrt{9-(x-3)^2}}{3}\right|+C. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.65. Calcule:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}dx.$$

Solución. Para el cálculo de esta integral,

utilizamos la sustitución trigonométrica

$$x=2\tan\theta \quad \text{y} \quad dx=2\sec^2\theta d\theta.$$

Además, del triángulo rectángulo dado en la Figura (1.6), tenemos que

$$\sec\theta=\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$$

lo que implica que

$$\sqrt{x^2+4}=2\sec\theta.$$

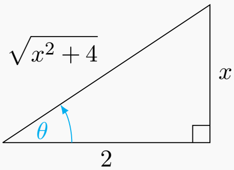


Figura 1.6: Triángulo rectángulo del ejemplo 1.65.

Luego, reemplazando estos datos en la integral inicial se obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}dx &= \int \frac{2\sec(\theta)(2\sec^2(\theta)d\theta)}{2\tan(\theta)}=2\int \frac{\sec(\theta)(1+\tan^2(\theta))d\theta}{\tan(\theta)} \\ &= 2\int \frac{\sec(\theta)d\theta}{\tan(\theta)}+2\int \frac{\sec(\theta)\tan^2(\theta)d\theta}{\tan(\theta)} \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando identidades trigonométrica y resolviendo las últimas integrales se consigue

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}dx &= 2\int \csc(\theta)d\theta + 2\int \sec(\theta)\tan(\theta)d\theta \\
&= 2\ln|\csc(\theta)-\cot(\theta)| + 2\sec(\theta) + C \\
&= 2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\right| + \sqrt{x^2+4} + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.66. Calcule la integral:

$$\int \frac{\ln^2 z - 4}{z\left(\ln^2 z + 4\ln z + 8\right)^{\frac{5}{2}}}dz$$

Solución. Antes de utilizar el método de sustitución trigonométrica, hacemos un cambio de variable:

$$x = \ln z \quad \text{entonces} \quad dx = \frac{dz}{z}.$$

Así, la integral se puede expresar como

$$\int \frac{\ln^2 z - 4}{z\left(\ln^2 z + 4\ln z + 8\right)^{\frac{5}{2}}}dz = \int \frac{x^2-4}{\left((x+2)^2+4\right)^{\frac{5}{2}}}dx.$$

Luego, sustituimos:

$$x+2 = 2\tan\theta \quad \text{y} \quad dx = 2\sec^2\theta d\theta$$

Adicionalmente, del triángulo rectángulo dado en la Figura (1.7), tenemos que

$$\sqrt{(x+2)^2+4} = 2\sec\theta.$$

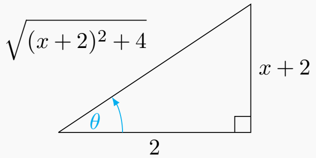


Figura 1.7: Triángulo rectángulo del ejemplo 1.66.

Entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2-4}{\left((x+2)^2+4\right)^{\frac{5}{2}}}dx &= \int \frac{4\left[(\tan\theta-1)^2-1\right]}{(4\sec^2\theta)^{\frac{5}{2}}}2\sec^2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\tan^2\theta - 2\tan\theta}{\sec^3\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta d\theta - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{4}\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3} + \frac{1}{6}\cos^3\theta + C \\
&= \frac{1}{12}\left(\frac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2+4}}\right)^3 + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{\sqrt{(x+2)^2+4}}\right)^3 + C \\
&= \frac{1}{12}\left(\frac{\ln z+2}{\sqrt{(\ln z+2)^2+4}}\right)^3 + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{\sqrt{(\ln z+2)^2+4}}\right)^3 + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.67. Calcule:

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}.$$

Solución. Este ejemplo corresponde al tercer caso de sustitución trigonométrica.

Haciendo el cambio trigonométrico

$$x = 3\sec\theta \quad \text{y} \quad dx = 3\sec\theta\tan\theta d\theta$$

Además, por el triángulo rectángulo dado en la Figura 1.8, obtenemos que

$$\sqrt{x^2-9} = 3\tan\theta.$$

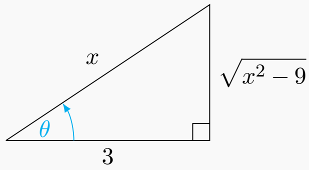


Figura 1.8: Triángulo rectángulo del ejemplo 1.67.

Luego, reemplazando estos datos se puede resolver la integral de manera rápida

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} &= \int \frac{3\sec\theta\tan\theta d\theta}{27\sec^3\theta(3\tan\theta)} = \frac{1}{27}\int \cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{27}\int \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{54}\left(\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right) + C \\
&= \frac{1}{54}\left(\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right) + C \\
&= \frac{1}{54}\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{3\sqrt{x^2-9}}{x^2}\right) + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.68. Calcule la integral:

$$\int \frac{(\operatorname{sen}(x)-5)\cos(x)}{(3+2\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}^2(x))^{\frac{3}{2}}}dx.$$

Solución. Buscando utilizar una sustitución trigonométrica, primero hacemos un cambio de variable dado por:

$$u = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad du = \cos x dx.$$

Con este cambio la integral se transforma en

$$\begin{aligned}
\int \frac{(\operatorname{sen}(x)-5)\cos(x)}{(3+2\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}^2(x))^{\frac{3}{2}}}dx &= \int \frac{u-5}{(3+2u-u^2)^{\frac{3}{2}}}du \\
&= \int \frac{u-5}{\left(4-(u-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}}du.
\end{aligned}$$

Luego, aplicando la sustitución:

$$u-1 = 2\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad du = 2\cos\theta d\theta$$

en la última integral de la derecha

$$
\begin{aligned}
\int \frac{u-5}{\left(4-(u-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}}du &= \int \frac{(2\operatorname{sen}(\theta)-4)}{(2\cos(\theta))^3}2\cos\theta d\theta = \int \frac{(\operatorname{sen}(\theta)-2)}{2\cos^2(\theta)}d\theta \\
&= \frac{1}{2}\sec(\theta)-\tan(\theta)+C \\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{4-(u-1)^2}} - \frac{u-1}{\sqrt{4-(u-1)^2}}+C \\
&= \frac{1}{\sqrt{4-(\operatorname{sen}(x)-1)^2}} - \frac{\operatorname{sen}(x)-1}{\sqrt{4-(\operatorname{sen}(x)-1)^2}}+C.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.69. Calcule la integral:

$$\int \frac{4}{e^{-x}\left(e^{2x}+4e^x+4\right)^2\sqrt{e^{2x}+4e^x}}dx$$

Solución. Utilizando el cambio de variable $z=e^x$ y $dz=e^x dx$:

$$\int \frac{4}{e^{-x}\left(e^{2x}+4e^x+4\right)^2\sqrt{e^{2x}+4e^x}}dx = \int \frac{4dz}{(z+2)^4\sqrt{(z+2)^2-4}}$$

Luego, sustituimos: $z+2=2\sec\theta$ y $dz=2\sec\theta\tan\theta d\theta$ en la última integral, obteniendo

$$
\begin{aligned}
\int \frac{4dz}{(z+2)^4\sqrt{(z+2)^2-4}} &= \int \frac{8\sec\theta\tan\theta}{32\sec^4\theta\tan\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int \cos^3\theta d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1-\operatorname{sen}^2\theta\right)\cos\theta d\theta \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{12}\operatorname{sen}^3\theta + C \\
&= \frac{1}{4}\frac{\sqrt{e^{2x}+4e^x}}{e^x+2} - \frac{1}{12}\left(\frac{\sqrt{e^{2x}+4e^x}}{e^x+2}\right)^3 + C.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.70. Calcule la integral:

$$\int \frac{e^x}{\left(9+6e^x+e^{2x}\right)^2\sqrt{-e^{2x}-6e^x}}dx$$

Solución. Rápidamente notamos que la integral se puede expresar como

$$\int \frac{e^x}{\left(9+6e^x+e^{2x}\right)^2\sqrt{-e^{2x}-6e^x}}dx = \int \frac{e^x}{(e^x+3)^4\sqrt{9-(e^x+3)^2}}dx.$$

Además, utilizando el cambio de variable $z=e^x$ y $dz=e^x dx$, logramos convertir la integral en

$$\int \frac{e^x}{(e^x+3)^4\sqrt{9-(e^x+3)^2}}dx = \int \frac{dz}{(z+3)^4\sqrt{9-(z+3)^2}}$$

de donde claramente la sustitución trigonométrica a utilizar es

$$z+3 = 3\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad dz = 3\cos\theta d\theta.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3\cos\theta d\theta}{(3\operatorname{sen}\theta)^4\sqrt{9-(3\operatorname{sen}\theta)^2}} &= \int \frac{3\cos\theta}{81\operatorname{sen}^4\theta\sqrt{9-9\operatorname{sen}^2\theta}}d\theta \\
&= \int \frac{3\cos\theta}{81\operatorname{sen}^4\theta(3\cos\theta)}d\theta \\
&= \frac{1}{81}\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^4\theta} \\
&= \frac{1}{81}\int \csc^4\theta d\theta \\
&= \frac{1}{81}\int \csc^2\theta\left(\cot^2\theta+1\right)d\theta \\
&= \frac{1}{81}\int \csc^2\theta\cot^2\theta d\theta + \frac{1}{81}\int \csc^2\theta d\theta \\
&= -\frac{1}{243}\cot^3\theta - \frac{1}{81}\cot\theta + C \\
&= -\frac{1}{243}\left(\frac{\sqrt{9-(z+3)^2}}{z+3}\right)^3 - \frac{1}{81}\frac{\sqrt{9-(z+3)^2}}{z+3} + C \\
&= -\frac{1}{243}\left(\frac{\sqrt{9-(e^x+3)^2}}{e^x+3}\right)^3 - \frac{1}{81}\frac{\sqrt{9-(e^x+3)^2}}{e^x+3} + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.71. Calcule la integral:

$$\int \frac{2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Solución. En este ejemplo, inmediatamente nos damos cuenta que la sustitución a utilizar es

$$x = \operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad dx = \cos\theta d\theta.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \frac{2\cos\theta}{(1+\operatorname{sen}\theta)\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}d\theta \\
&= 2\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}\theta}d\theta = 2\int \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}d\theta \\
&= 2\int \sec^2\theta d\theta - 2\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}d\theta \\
&= 2\tan\theta - 2\sec\theta + C \\
&= \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.72. Calcule la integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{(5-4x-x^2)^5}}dx.$$

Solución. Completando cuadrados, se observa que la integral se puede escribir la siguiente manera

$$\int \frac{1}{\sqrt{(5-4x-x^2)^5}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(9-(x+2)^2\right)^5}}dx.$$

Luego, haciendo la sustitución:

$$x+2 = 3\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad dx = 3\cos\theta d\theta,$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{3\cos\theta}{\sqrt{(9-9\operatorname{sen}^2\theta)^5}}d\theta &= \frac{1}{81}\int \frac{1}{\cos^4\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{81}\int \sec^4\theta d\theta \\
&= \frac{1}{81}\int \left(\tan^2\theta+1\right)\sec^2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{81}\int \tan^2\theta\sec^2\theta d\theta + \frac{1}{81}\int \sec^2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{81}\frac{\tan^3\theta}{3} + \frac{1}{81}\tan\theta + C \\
&= \frac{1}{243}\left(\frac{x+2}{\sqrt{9-(x+2)^2}}\right)^3 + \frac{1}{81}\frac{x+2}{\sqrt{9-(x+2)^2}} + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.73. Calcule:

$$\int \frac{4e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+8e^x+12}}dx.$$

Solución. Se observa que

$$\int \frac{4e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+8e^x+12}}dx = \int \frac{4e^x e^x}{\sqrt{(e^x+4)^2-4}}dx.$$

Luego, haciendo un cambio conveniente $e^x+4 = 2\sec\theta$ y $e^x dx = 2\sec\theta\tan\theta d\theta$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{4e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+8e^x+12}}dx &= \int \frac{4(2\sec\theta-4)2\sec\theta\tan\theta}{2\sqrt{\sec^2\theta-1}}d\theta = 8\int \sec^2\theta d\theta - 16\int \sec\theta d\theta \\
&= 8\tan\theta - 16\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C \\
&= 8\left(\frac{\sqrt{(e^x+4)^2-4}}{2}\right) - 16\ln\left|\frac{e^x+4}{2} + \frac{\sqrt{(e^x+4)^2-4}}{2}\right| + C
\end{aligned}$$

1. Integral Indefinida

Finalmente,

$$\int \frac{4e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+8e^x+12}}dx = 4\sqrt{(e^x+4)^2-4} - 16\ln\left|\frac{e^x+4}{2} + \frac{\sqrt{(e^x+4)^2-4}}{2}\right| + C.$$

Ejemplo 1.74. Calcule la integral:

$$\int \frac{1-3x}{2+\sqrt{3+6x-9x^2}}dx.$$

Solución. Si factorizamos en el denominador $-9x^2+6x+3 = 4-(3x-1)^2$, la integral se expresa como

$$\int \frac{1-3x}{2+\sqrt{3+6x-9x^2}}dx = \int \frac{1-3x}{2+\sqrt{4-(3x-1)^2}}dx.$$

Haciendo un primer cambio de variable: $3x-1 = 2\operatorname{sen}\theta$ y $dx = \frac{2}{3}\cos\theta d\theta$, tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{1-3x}{2+\sqrt{4-(3x-1)^2}}dx &= -\int \frac{2\operatorname{sen}\theta}{2+\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2\theta}}\frac{2}{3}\cos\theta d\theta\\ &= \frac{2}{3}\int \frac{-\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{1+\cos\theta}d\theta\end{aligned}$$

Luego, realizando un nuevo cambio: $u = 1+\cos\theta$ y $du = -\operatorname{sen}\theta d\theta$, se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{1-3x}{2+\sqrt{4-(3x-1)^2}}dx &= \frac{2}{3}\int \frac{(u-1)}{u}du\\ &= \frac{2}{3}\int du - \frac{2}{3}\int \frac{1}{u}du\\ &= \frac{2}{3}u - \frac{2}{3}\ln|u| + C\\ &= \frac{2}{3}(1+\cos\theta) - \frac{2}{3}\ln|1+\cos\theta| + C\\ &= \frac{2}{3}\left(1+\frac{\sqrt{3+6x-9x^2}}{2}\right) - \frac{2}{3}\ln\left|1+\frac{\sqrt{3+6x-9x^2}}{2}\right| + C.\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos 1.5.

Calcule las siguientes integrales.

1. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{(x^2+2x-3)^{3/2}}dx$
2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}dx$
3. $\displaystyle\int \frac{e^{-x}}{(9e^{-2x}+1)^{3/2}}dx$
4. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{5-(3-x)^2}}$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2}$
6. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}dx$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-8}}$
8. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{6x-x^2}}$
9. $\displaystyle\int \frac{5e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+8}}dx$
10. $\displaystyle\int \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{\sqrt{(x+\ln x)^2-4}}dx$
11. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-8e^x}{(8-2e^x-e^{2x})^{3/2}}dx$
12. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-4)\sqrt{x^2-8x+20}}dx$
13. $\displaystyle\int \frac{4x-5}{(x^2-2x+2)^{\frac{3}{2}}}dx$
14. $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2-2)\sqrt{x^4-4x^2+5}}dx$
15. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-4)\sqrt{(x^2-8x+20)^3}}dx$
16. $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}}dx$
17. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-e^{2x}}+8}{e^x}dx$
18. $\displaystyle\int \frac{1-3x}{2+\sqrt{3+6x-9x^2}}dx$
19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}dx$
20. $\displaystyle\int \frac{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}dx$
21. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$
22. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-2x+5)^2}dx$

1.3.4. Integración de funciones racionales por fracciones parciales

En esta parte, estudiaremos una técnica fundamental para abordar integrales de funciones racionales, mediante un proceso de descomposición en términos más simples que faciliten su integración.
Iniciamos nuestro estudio, sumando dos funciones racionales, por ejemplo,

$$f(x)=\frac{2}{x+1} \quad \text{y} \quad g(x)=\frac{3}{x-2}.$$

Entonces, realizando la suma se obtiene:

$$f(x)+g(x)=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-2}=\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}.$$

Notamos que al sumar, los términos se combinan mediante un denominador común. Ahora, supongamos que queremos integrar el resultado de la suma; esto es,

$$\int \frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}dx.$$

No obstante, podemos expresar esta integral como una suma de funciones racionales para facilitar la integración

$$\int \frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}dx = \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}\right) dx = 2\ln|x+1| + 3\ln|x-2| + C.$$

El método de **descomposición mediante fracciones parciales**, consiste en descomponer una función racional en la suma de fracciones más simples, lo que facilita la integración.

Antes de continuar con método de las fracciones parciales, es crucial entender algunas definiciones básicas que nos servirán como cimientos sólidos para nuestro estudio. Comencemos por explorar qué son las funciones racionales.

Definición 1.4: Función racional

Una **función racional** tiene la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios en la variable x de grados n y m, respectivamente.

Importante.

- Si $n < m$ diremos que la función racional R es **propia**.
- si $n \geq m$ diremos que la función racional R es **impropia**.

Teorema 1.3

Si $R(x)$ es una función racional impropia, por la **división de polinomios**, existen dos polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)},$$

donde el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.

Importante.

- Se observa que el cociente $\dfrac{r(x)}{Q(x)}$ es una función racional propia.
- Si se quiere determinar la integral $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ solo es necesario conocer cómo integrar funciones racionales propias.

Casos de descomposición en fracciones parciales de la función $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$:

Caso 1: Factores lineales diferentes. Si el denominador $Q(x)$ contiene un producto de k **factores lineales distintos**. Es decir, si

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_kx + b_k),$$

donde los coeficientes a_i y b_i, $i = 1, ..., k$ son números reales. Entonces es posible encontrar constantes única A_i, $i = 1, ..., k$, tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}. \tag{1.6}$$

Ejemplo 1.75. Exprese en una suma de fracciones parciales la siguiente función racional:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 3}{x^3 - 7x - 6}.$$

Solución. Para el primer caso es muy sencillo encontrar los coeficientes, pero primero tenemos que factorizar el denominador:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 3}{x^3 - 7x - 6} = \frac{x^2 + x + 3}{(x + 1)(x + 2)(x - 3)}$$

Así, f se puede expresar como

$$f(x) = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 3}.$$

Luego, determinando las constantes

$$A = \left[\frac{x^2 + x + 3}{(x + 2)(x - 3)}\right]_{x=-1} = -\frac{3}{4}, \quad B = \left[\frac{x^2 + x + 3}{(x + 1)(x - 3)}\right]_{x=-2} = 1$$

y

$$C = \left[\frac{x^2 + x + 3}{(x + 1)(x + 2)}\right]_{x=3} = \frac{3}{4}.$$

Finalmente, la representación de la función f en fracciones parciales es

$$f(x) = -\frac{3}{4(x + 1)} + \frac{1}{x + 2} + \frac{3}{4(x - 3)}.$$

Importante. El método utilizado para hallar las constantes del ejemplo anterior, se denomina **método de encubrimiento**, y se usa en una descomposición en fracciones parciales en el caso especial cuando el denominador del integrando es el producto de factores lineales distintos:

$$f(x) = \frac{P(x)}{(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_k)}.$$

Caso 2: Factores lineales repetidos. Si el denominador $Q(x)$ contiene un **factor lineal repetido**; es decir, si el factor lineal $(ax + b)$ se repite k veces

$$Q(x) = \cdots(ax + b)^k\cdots$$

donde a y b son números reales. Entonces es posible hallar constantes reales únicas A_i, $i = 1, ..., k$ tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \cdots + \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k} + \cdots \tag{1.7}$$

Ejemplo 1.76. Descomponer la siguiente función racional en fracciones parciales:

$$f(x) = \frac{3x+5}{(x-1)^2}.$$

Solución. Tenemos que

$$\frac{3x+5}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

Para encontrar A y B, multiplicamos ambos lados de la ecuación por el denominador común $(x-1)^2$, obteniendo:

$$3x + 5 = A(x-1) + B$$

Luego, expandimos y agrupamos términos semejantes:

$$3x + 5 = Ax - A + B$$

Igualando los coeficientes de x y los términos independientes:

$$\begin{cases} A = 3 \\ -A + B = 5 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, encontramos que $A = 3$ y $B = 8$. Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales de f es:

$$f(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{8}{(x-1)^2}$$

Caso 3: Factores cuadráticos distintos. Si el denominador $Q(x)$ contiene un producto de k **factores cuadráticos irreductibles** y ninguno de ellos se repite. Es decir, si

$$Q(x) = \cdots \left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right)\left(a_2x^2 + b_2x + c_2\right)\cdots\left(a_kx^2 + b_kx + c_k\right)\cdots,$$

donde los coeficientes a_i, b_i y $c_i, i = 1, 2, \ldots, k$ son números reales, entonces existen constantes reales únicas A_i y B_i, $i = 1, ..., k$ tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \cdots + \frac{A_1x + B_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_2x + B_2}{a_2x^2 + b_2x + c_2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{a_kx^2 + b_kx + c_k} + \cdots \tag{1.8}$$

Ejemplo 1.77. Sea f una función definida por:

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}.$$

Exprese f en una suma de fracciones parciales.

Solución. Factorizamos el denominador:

$$Q(x) = x^3 + 4x = x\left(x^2+4\right)$$

Luego, expresamos el cociente como suma de fracciones parciales

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x\left(x^2+4\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Determinamos los valores de A, B y C

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A\left(x^2+4\right) + (Bx+C)x, \\ &= (A+B)x^2 + Cx + 4A. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de x y los términos independientes: $A+B=2$, $C=-1$ y $4=4A$, obtenemos $A=1$, $B=1$ y $C=-1$. Finalmente, la suma de fracciones parciales es

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 4}{x\left(x^2+4\right)} = \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4}.$$

Caso 4: Factores cuadráticos repetidos. Si el denominador $Q(x)$ contiene **factores cuadráticos irreductibles repetidos**. Es decir, si suponemos que el factor (ax^2+bx+c) se repite k veces

$$Q(x) = \cdots (ax^2+bx+c)^k \cdots$$

donde a, b y c son números reales. Entonces, es posible encontrar constantes únicas A_i y B_i, con $i = 1, ..., k$ tales que la descomposición en fracciones parciales contiene la suma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \cdots + \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k} + \cdots \tag{1.9}$$

Ejemplo 1.78. Sea f una función dada por:

$$f(x) = \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x\left(x^2+1\right)^2}.$$

Encuentre su descomposición en fracciones parciales.

Solución. Expresando $f(x)$ como suma de fracciones parciales

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Luego, para determinar los valores de las constantes A, B, C, D y E, en

$$\begin{aligned} -x^3 + 2x^2 - x + 1 &= A\left(x^2+1\right)^2 + (Bx+C)x\left(x^2+1\right) + (Dx+E)x, \\ &= (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A, \end{aligned}$$

igualamos los coeficientes y términos independientes

$$\begin{aligned} A+B=0, \quad C=-1, \quad 2A+B+D=2, \quad C+E=-1, \quad A=1 \\ \Rightarrow A=1, \quad B=-1, \quad C=-1, \quad D=1 \;\text{ y }\; E=0. \end{aligned}$$

En consecuencia, la descomposición en fracciones parciales de $f(x)$ es

$$f(x)=\frac{1-x+2x^2-x^3}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Importante. Estrategia para la integración de una función racional $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$:

1. **Si la función racional es propia.**
   (i) Se factoriza el denominador en factores lineales y/o factores cuadráticos irreductibles.
   (ii) Se usan los casos del $(1)-(4)$ para expresar la función racional como suma de fracciones parciales.
   (iii) Integrar la suma de las fracciones parciales obtenidas.
2. **Si la función racional es impropia**, se realiza la división de polinomios obteniendo
$$R(x)=q(x)+\frac{r(x)}{Q(x)},$$
donde $\dfrac{r(x)}{Q(x)}$ es una función propia. Luego, realizamos los pasos anteriores a $\dfrac{r(x)}{Q(x)}$.

Ejemplo 1.79. Calcule: $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^3-2x^2-3x}dx.$

Solución. Vemos que

$$\frac{3x+1}{x(x-3)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+1},$$

donde los valores de las constantes son: $A=-\dfrac{1}{3}$, $B=\dfrac{5}{6}$ y $C=-\dfrac{1}{2}$.
Así,

$$\frac{3x+1}{x^3-2x^2-3x}=-\frac{1}{3x}+\frac{5}{6\,(x-3)}-\frac{1}{2\,(x+1)}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+1}{x^3-2x^2-3x}dx &= \int\left(-\frac{1}{3x}+\frac{5}{6\,(x-3)}-\frac{1}{2\,(x+1)}\right)dx\\ &= -\frac{1}{3}\ln|x|+\frac{5}{6}\ln|x-3|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.80. Calcule la integral:

$$\int \frac{2x-6}{(x-4)\left(x^2-2x-3\right)}dx.$$

Solución. Factorizando el denominador del integrando y, expresando el cociente en una suma de fracciones parciales

$$\frac{2x-6}{(x-4)(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-3}$$

Luego, multiplicando por $(x-4)(x+1)(x-3)$ a ambos miembros

$$2x-6 = A(x+1)(x-3)+B(x-4)(x-3)+C(x-4)(x+1). \qquad (1.10)$$

Para hallar los valores de las constantes, tomaremos algunos valores específicos para x, para luego reemplazarlos en (1.10):

- si $x=-1$ entonces $B=-\frac{2}{5}$,
- si $x=3$ entonces $C=0$,
- si $x=4$ entonces $A=\frac{2}{5}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int\frac{2x-6}{(x-4)(x+1)(x-3)}dx &= \frac{2}{5}\int\frac{dx}{x-4}-\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x+1}\\ &= \frac{2}{5}\ln|x-4|-\frac{2}{5}\ln|x+1|+C.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.81. Calcule la integral:

$$\int\frac{3x^3+9x^2+5x+1}{x^3+2x^2-x-2}dx.$$

Solución. Como el integrando es una función racional impropia, tenemos que dividir

$$\frac{3x^3+9x^2+5x+1}{x^3+2x^2-x-2} = 1+\frac{7x^2+6x+3}{(x+2)(x+1)(x-1)}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int\frac{3x^3+9x^2+5x+1}{x^3+2x^2-x-2}dx &= \int\left(1+\frac{7x^2+6x+3}{(x+2)(x+1)(x-1)}\right)dx\\ &= \int dx+\underbrace{\int\frac{7x^2+6x+3}{(x+2)(x+1)(x-1)}dx}_{I}\end{aligned}$$

Ahora expresamos el integrando de I como una suma de fracciones parciales

$$\frac{7x^2+6x+3}{(x+2)(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x-1)}$$

Para hallar las constantes A, B y C, utilizamos el método de encubrimiento, entonces

$$A=\left[\frac{7x^2+6x+3}{(x+1)(x-1)}\right]_{x=-2}=\frac{19}{3}, \quad B=\left[\frac{7x^2+6x+3}{(x+2)(x-1)}\right]_{x=-1}=-2$$

y

$$C=\left[\frac{7x^2+6x+3}{(x+2)(x+1)}\right]_{x=1}=\frac{8}{3}.$$

Luego, la suma de fracciones parciales es

$$\frac{7x^2+6x+3}{(x+2)(x+1)(x-1)} = \frac{\frac{19}{3}}{x+2} + \frac{-2}{x+1} + \frac{\frac{8}{3}}{x-1}.$$

Integrando

$$\begin{aligned} \int \frac{7x^2+6x+3}{(x+2)(x+1)(x-1)} dx &= \frac{19}{3}\int \frac{1}{x+2}dx - 2\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{8}{3}\int \frac{1}{x-1}dx \\ &= \frac{19}{3}\ln|x+2| - 2\ln|x+1| + \frac{8}{3}\ln|x-1| + C \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int \frac{3x^3+9x^2+5x+1}{x^3+2x^2-x-2}dx = x + \frac{19}{3}\ln|x+2| - 2\ln|x+1| + \frac{8}{3}\ln|x-1| + C.$$

Ejemplo 1.82. Calcule la integral:

$$\int \frac{5x^2-22x-26}{(x-4)^2(x^2+1)}dx.$$

Solución. Descomponiendo el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{5x^2-22x-26}{(x-4)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Luego, hallando las constantes

$$5x^2-22x-26 = A(x-4)\left(x^2+1\right) + B\left(x^2+1\right) + (Cx+D)(x-4)^2$$

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ -4A+B-8C+D &= 5 \\ A+16C-8D &= -22 \\ -4A+B+16D &= -26 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, notamos que el integrando está dado por:

$$\frac{5x^2-22x-26}{(x-4)^2(x^2+1)} = \frac{2}{x-4} - \frac{2}{(x-4)^2} - \frac{2x+1}{x^2+1}$$

Por último, integrando se obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2-22x-26}{(x-4)^2(x^2+1)}dx &= \int \frac{2}{x-4}dx - \int \frac{2}{(x-4)^2}dx - \int \frac{2x+1}{x^2+1}dx \\ &= 2\ln|x-4| - \frac{2}{x-4} - \ln\left|x^2+1\right| - \arctan x + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.83. Calcule la integral:

$$\int \frac{2x^2+4x+3}{(x^2+2x+2)(x+1)}dx.$$

Solución. Expresando el integrando como una suma de fracciones parciales

$$\frac{2x^2+4x+3}{\left(x^2+2x+2\right)(x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{C}{x+1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{2x^2+4x+3}{\left(x^2+2x+2\right)(x+1)} &= \frac{(Ax+B)(x+1)+C\left(x^2+2x+2\right)}{\left(x^2+2x+2\right)(x+1)}\\ 2x^2+4x+3 &= (Ax+B)(x+1)+C\left(x^2+2x+2\right)\end{aligned}$$

de donde las constantes toman los valores de

$$A=1,\ B=1 \text{ y } C=1.$$

Entonces, reemplazando los valores de las constantes e integrando, se consigue

$$\begin{aligned}\int\frac{2x^2+4x+3}{\left(x^2+2x+2\right)(x+1)}dx &= \int\frac{x+1}{x^2+2x+2}dx+\int\frac{1}{x+1}dx\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|+\ln|x+1|+C.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.84. Calcule integral:

$$\int\frac{5x^3-16x^2-8x-32}{(x+2)(x-3)\left(x^2+4\right)}dx$$

Solución. Separando el integrando en la suma de fracciones parciales

$$\frac{5x^3-16x^2-8x-32}{(x+2)(x-3)\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Luego, hallando las constantes

$$A=3,\ B=-1,\ C=3 \text{ y } D=-2.$$

Finalmente, reemplazando en la integral

$$\begin{aligned}\int\frac{5x^3-16x^2-8x-32}{(x+2)(x-3)\left(x^2+4\right)}dx &= \int\frac{3}{x+2}dx-\int\frac{1}{x-3}dx+\int\frac{3x-2}{x^2+4}dx\\ &= 3\ln|x+2|-\ln|x-3|+\frac{3}{2}\ln\left|x^2+4\right|-\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C\end{aligned}$$

Ejemplo 1.85. Calcule:

$$I=\int\frac{x^3+3x^2-5x+11}{(x-1)^2\left(x^2-2x+3\right)}dx.$$

Solución. Desglosando la función integrando en fracciones parciales

$$\frac{x^3+3x^2-5x+11}{(x-1)^2\left(x^2-2x+3\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+3}.$$

Encontrando los valores de las constantes

$$A = 2,\ B = 5,\ C = -1 \text{ y } D = 2.$$

Reemplazando en el integrando

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 11}{(x-1)^2(x^2 - 2x + 3)} = \frac{2}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2} + \frac{-x+2}{x^2 - 2x + 3}$$

En consecuencia, se logra obtener

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{5}{(x-1)^2}dx + \int \frac{-x+2}{x^2-2x+3}dx \\ &= 2\ln|x-1| - \frac{5}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+3}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2+2}dx \\ &= 2\ln|x-1| - \frac{5}{x-1} - \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+3\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.86. Calcule la integral

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}dx$$

Solución. Expresando el integrando como una suma de fracciones simples

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2}$$

Luego,

$$\begin{aligned} -x^3 + 2x^2 - x + 1 &= A\left(x^2+1\right)^2 + (Bx + C)\,x\left(x^2+1\right) + (Dx+E)\,x \\ -x^3 + 2x^2 - x + 1 &= (A+B)\,x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)\,x^2 + (C+E)\,x + A. \end{aligned}$$

A continuación, se igualan los coeficientes para determinar los valores de las constantes

$$A + B = 0,\ C = -1,\ 2A + B + D = 2,\ C + E = -1,\ A = 1$$

Obteniendo

$$A = 1,\ B = -1,\ C = -1,\ D = 1 \ \ y \ \ E = 0.$$

Reemplazando los valores hallados en el integrando se tiene

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

Luego, integrando

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}dx &= \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x+1}{x^2+1}dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \arctan(x) - \frac{1}{2(x^2+1)} + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.87. Calcule la integral:

$$\int \frac{11x^2 - 22x + 44}{\left(x^2+4\right)^2} dx$$

Solución.

$$\frac{11x^2 - 22x + 44}{\left(x^2+4\right)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+4\right)^2}$$

Igualando y hallando las constantes

$$11x^2 - 22x + 44 = Ax^3 + Bx^2 + (4A + C) + 4B + D$$

$$A = 0,\ B = 11,\ C = -22,\ D = 0$$

Reemplazando las constantes

$$\frac{11x^2 - 22x + 44}{\left(x^2+4\right)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+4\right)^2}$$

Para terminar, integramos

$$\begin{aligned}\int \frac{11x^2 - 22x + 44}{\left(x^2+4\right)^2} dx &= \int \frac{11}{x^2+4} dx - \int \frac{22x}{\left(x^2+4\right)^2} dx \\ &= \frac{11}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{11}{x^2+4} + C\end{aligned}$$

Ejemplo 1.88. Calcule la integral:

$$I = \int \frac{2\,\mathrm{sen}^2(z)\cos(z) + 4\,\mathrm{sen}(z)\cos(z) + 3\cos(z)}{\left(\mathrm{sen}^2(z) + 2\,\mathrm{sen}(z) + 2\right)\left(\mathrm{sen}(z) + 1\right)} dz$$

Solución. Haciendo un cambio de variable $x = \mathrm{sen}(z) \Rightarrow dx = \cos(z)\,dz$.
Luego, reemplazando obtenemos

$$\int \frac{2x^2 + 4x + 3}{\left(x^2 + 2x + 2\right)(x+1)} dx.$$

Posteriormente, expresando el integrando como una suma de fracciones parciales:

$$\begin{aligned}\frac{2x^2 + 4x + 3}{\left(x^2 + 2x + 2\right)(x+1)} &= \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{C}{x+1} \\ 2x^2 + 4x + 3 &= (Ax+B)(x+1) + C\left(x^2 + 2x + 2\right)\end{aligned}$$

Y, encontrando los valores de las constantes $A = 1,\ B = 1,\ C = 1$

$$\frac{2x^2 + 4x + 3}{\left(x^2 + 2x + 2\right)(x+1)} = \frac{x+1}{x^2+2x+2} + \frac{1}{x+1}$$

Entonces, integrando se obtiene

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx + \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln\left|x^2 + 2x + 2\right| + \ln|x+1| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln\left|\mathrm{sen}^2(z) + 2\,\mathrm{sen}(z) + 2\right| + \ln|\mathrm{sen}(z) + 1| + C.\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos 1.6.

Calcule las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2-x+2}{x^3-x^2+4x-4}dx$
2. $\displaystyle\int \frac{x^3+3x^2-2x-1}{x^2-1}dx$
3. $\displaystyle\int \frac{3x^4+4}{x^2\left(x^2+1\right)^3}dx$
4. $\displaystyle\int \frac{x^3+x-1}{\left(x^2+2\right)^2}dx$
5. $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{\left(x^2+1\right)^3}dx$
6. $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3\left(x^2+1\right)}dx$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+4x^2+6x+4}dx$
8. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}dx$
9. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-2)(x^2+2)^2}dx$
10. $\displaystyle\int \frac{x^4+x^3-x^2-x+1}{x^3-x}dx$
11. $\displaystyle\int \left(\frac{x^3+1}{x^4+5x^2+6}+\frac{5\left(x^2+1\right)}{x^2-1}\right)dx$
12. $\displaystyle\int \frac{\left(2x^3+2x^2-4x+2\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-2x+1\right)}dx$
13. $\displaystyle\int \left(\frac{2x^2+3x-1}{(x+3)(x+5)(x-1)}+\frac{1}{x^2-1}\right)dx$
14. $\displaystyle\int \frac{\left(x^2-x+1\right)}{x^4-5x^3+5x^2+5x-6}dx$
15. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x+2)(x-1)^3}dx$
16. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2-x+2}{x^3-x^2+4x-4}dx$
17. $\displaystyle\int \frac{6x^2}{\left(x^6+1\right)\left(x^3-1\right)}dx$
18. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2-2x-5}{x^2+2x-3}dx$
19. $\displaystyle\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$
20. $\displaystyle\int \frac{-5x^2+22x+26}{(x-4)^2\left(x^2+1\right)}dx$

1.3.5. Integrales de funciones racionales de seno y coseno

Definición 1.5: Función racional de seno y coseno

Una **función racional de seno y coseno** tiene la forma:

$$I = \int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx,$$

donde R es una función racional que contiene senos y cosenos.

Caso general

Si un integrando es función racional de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, se puede utilizar el cambio

$$\boxed{z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{1.11}$$

que convierte el integrando $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ en una función racional de variable z. De este cambio se pueden obtener los siguientes resultados:

- Como $\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, entonces

$$\operatorname{sen} x = 2\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2z}{1+z^2}$$

- Asimismo, como $\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$, se tiene

$$\cos x = \frac{2}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 = \frac{2}{1+z^2} - 1 = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

- Teniendo en cuenta la sustitución dada en (1.11), tenemos

$$x = 2\arctan z \Rightarrow dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

Estas igualdades se emplean en la integral para transformar el integrando en una función racional de variable z.

Propiedad 1.2. Si $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, entonces

$$\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \text{ y } dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Ejemplo 1.89. Determine la siguiente integral

$$I = \int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x - \cos x}$$

Solución. La función racional es

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}$$

Luego, usando la sustitución

$$z = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$$

se tiene

$$\begin{aligned} I = \int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x} &= \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1 + \frac{2z}{1+z^2} - \frac{1-z^2}{1+z^2}} \\ &= \int \frac{dz}{z(z+1)} = \int \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right) dz \\ &= \ln|z| - \ln|z+1| + C, \end{aligned}$$

volviendo a la variable original x, obtenemos

$$I = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right| + C = \ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1}\right| + C.$$

Ejemplo 1.90. Calcule la siguiente integral:

$$I = \int \frac{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}{1 - \operatorname{sen} x + \cos x} dx.$$

Solución. En este caso, la función racional es

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}{1 - \operatorname{sen} x + \cos x}.$$

Luego, usando la sustitución

$$z = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$$

se tiene

$$\begin{aligned} I = \int \frac{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}{1 - \operatorname{sen} x + \cos x} dx &= \int \frac{1 + \left(\frac{2z}{1+z^2}\right) - \left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}{1 - \frac{2z}{1+z^2} + \frac{1-z^2}{1+z^2}} \left(\frac{2dz}{1+z^2}\right) \\ &= \int \frac{2z^2 + 2z}{2 - 2z} \left(\frac{2dz}{1+z^2}\right) = 2\int \frac{z^2 + z}{(1-z)(1+z^2)} dz \\ &= 2\int \left(-\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z^2+1}\right) dz, \quad \text{por fracciones parciales} \\ &= -2\ln|z-1| - 2\arctan(z) + C. \end{aligned}$$

Regresando a la variable x,

$$I = -2\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right| - \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C.$$

Ejemplo 1.91. Calcule:

$$\int \frac{1}{(2 - \cos x)(3 - \cos x)} dx.$$

Solución. Reconociendo la función racional

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{1}{(2-\cos x)(3-\cos x)}$$

Ahora, usando la sustitución

$$z = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(2-\cos x)(3-\cos x)}dx &= \int \frac{1}{\left(2-\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\left(3-\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}\left(\frac{2dz}{1+z^2}\right)\\
&= \int \frac{2(1+z^2)dz}{(3z^2+1)(4z^2+2)}\\
&= \int \left(\frac{2}{3z^2+1}-\frac{1}{2z^2+1}\right)dz, \quad \text{utilizando fracciones parciales}\\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}z\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}z\right)+C,
\end{aligned}$$

Finalmente, retornando a la variable original x, se tiene

$$\int \frac{1}{(2-\cos x)(3-\cos x)}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C.$$

Ejemplo 1.92. Halle:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{2+4\operatorname{sen} x+2\cos x}dx.$$

Solución. Sea $z=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, entonces $\quad x = 2\arctan(z)$ y

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen} x}{2+4\operatorname{sen} x+2\cos x}dx &= \int \frac{\frac{2z}{1+z^2}}{2+4\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)+2\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}\left(\frac{2dz}{1+z^2}\right)\\
&= \int \frac{4zdz}{(1+z^2)\left(\frac{2+2z^2+8z+2-2z^2}{1+z^2}\right)(1+z^2)}\\
&= \int \frac{4zdz}{(1+z^2)(8z+4)}\\
&= \int \frac{zdz}{(1+z^2)(2z+1)}\\
&= \int \left[\frac{z+2}{5(z^2+1)}-\frac{2}{5(z^2+1)}\right]dz\\
&= \frac{1}{5}\int \frac{z}{z^2+1}dz+\frac{2}{5}\int\frac{dz}{z^2+1}-\frac{2}{5}\int\frac{dz}{2z+1}\\
&= \frac{1}{10}\ln\left|z^2+1\right|+\frac{2}{5}\arctan(z)-\frac{1}{5}\ln|2z+1|+C\\
&= \frac{1}{10}\ln\left|\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right|+\frac{x}{5}-\frac{1}{5}\ln\left|2\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right|+C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.93. Halle:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2 + 2\cos x} dx.$$

Solución. Sea $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, entonces $x = 2\arctan(z)$ y

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2 + 2\cos x} dx &= \int \frac{\frac{2z}{1+z^2} - \frac{1-z^2}{1+z^2}}{2 + 2\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} \left(\frac{2dz}{1+z^2}\right) \\
&= \int \frac{\frac{2z-1+z^2}{1+z^2}}{\frac{2+2z^2+2-2z^2}{1+z^2}} \left(\frac{2dz}{1+z^2}\right) \\
&= \int \left(\frac{z^2+2z-1}{2(1+z^2)}\right) dz = \frac{1}{2}\int \frac{z^2 {\color{blue}+1-1} + 2z - 1}{1+z^2} dz \\
&= \frac{1}{2}\left[\int \left(1 + \frac{2z}{1+z^2} - \frac{2}{1+z^2}\right)\right] dz \\
&= \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\ln\left|1+z^2\right| - \arctan(z) + C \\
&= \frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left|1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C.
\end{aligned}$$

Importante. La sustitución presentada en (1.11), puede conducir a integrales de fracciones racionales difíciles de calcular; por ejemplo, si utilizamos este cambio en $\int \frac{\cos^2 x dx}{1 + 2\operatorname{sen}(2x)}$, se convierte a una integral de la forma $\int \frac{2(1-z^2)^2 dz}{(z^4 - 8z^3 + 2z^2 + 8z + 1)(1+z^2)}$, la cual es de difícil de resolver. Por lo que en tales casos es recomendable emplear otras sustituciones adecuadas.

Casos particulares

Existen algunos casos particulares de sustituciones para funciones racionales de seno y coseno $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$.

Caso 1: Si la función racional $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es una función par en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Esto es, si la función satisface

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x) = R(-\operatorname{sen} x, -\cos x).$$

En este caso se usa la sustitución:

$$\boxed{z = \tan x} \qquad (1.12)$$

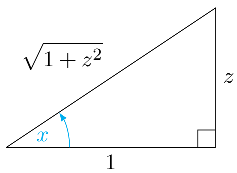


Figura 1.9: Triángulo rectángulo usado para representar la sustitución $z = \tan x$.

Luego, del triángulo rectángulo se obtienen los siguientes resultados

$$\operatorname{sen} x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \quad y \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}.$$

Ejemplo 1.94. Determine:

$$\int \frac{dx}{5+\cos^2 x}.$$

Solución. Analizando la función racional

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{1}{5+\cos^2 x} = \frac{1}{5+(-\cos x)^2} = R(-\operatorname{sen} x, -\cos x),$$

se observa que es una función par en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Luego, utilizando la sustitución $z = \tan x$, se obtiene

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \quad y \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}.$$

Reemplazando, notamos que la integral se reduce a

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5+\cos^2 x} &= \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{5+\left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2} = \int \frac{dz}{6+5z^2} \\ &= \frac{1}{6}\int \frac{dz}{1+\left(\sqrt{\frac{5}{6}}z\right)^2} \\ &= \frac{1}{6}\sqrt{\frac{6}{5}}\arctan\left(\sqrt{\frac{5}{6}}z\right) + C. \end{aligned}$$

Luego, volviendo a la variable x, obtenemos

$$\int \frac{dx}{5+\cos^2 x} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{6}{5}}\arctan\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\tan x\right) + C.$$

Ejemplo 1.95. Calcule la siguiente integral:

$$I = \int \frac{\cos^2 x dx}{1+2\operatorname{sen}(2x)}.$$

Solución. En este caso, analizando la función racional

$$\begin{aligned} R(\operatorname{sen} x, \cos x) &= \frac{\cos^2 x}{1+2\operatorname{sen}(2x)} = \frac{\cos^2 x}{1+4\operatorname{sen} x\cos x} \\ &= \frac{(-\cos x)^2}{1+4(-\operatorname{sen} x)(-\cos x)} = R(-\operatorname{sen} x, -\cos), \end{aligned}$$

concluimos que es una función racional par en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Luego, usando la sustitución

$$z = \tan x,$$

se tiene

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2\left(\frac{dz}{1+z^2}\right)}{1+4\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)} \\
&= \int \frac{dz}{(z^2+4z+1)(z^2+1)} \\
&= \int \left(\frac{z+4}{4\,(z^2+4z+1)} - \frac{z}{4\,(z^2+1)}\right) dz \\
&= \int \left(\frac{z+2}{4\,[(z+2)^2-3]} + \frac{1}{2[(z+2)^2-3]} - \frac{z}{4\,(z^2+1)}\right) dz \\
&= \frac{1}{8}\ln\left|z^2+4z+1\right| - \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\ln\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\,(z+2)+1}{\frac{1}{\sqrt{3}}\,(z+2)-1}\right|\right) - \frac{1}{8}\ln\left|z^2+1\right| + C.
\end{aligned}
$$

Regresando a la variable x,

$$
I = \frac{1}{8}\ln\left|\tan^2 x + 4\tan x + 1\right| - \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\ln\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\,(\tan x+2)+1}{\frac{1}{\sqrt{3}}\,(\tan x+2)-1}\right|\right) - \frac{1}{8}\ln\left|\tan^2 x+1\right| + C.
$$

Caso 2: Si la función $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es impar en $\cos x$. Es decir, R satisface

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, -\cos x).$$

En este caso se usa la sustitución:

$$\boxed{z = \operatorname{sen} x} \tag{1.13}$$

Del triángulo adjunto, tenemos

$$\cos x = \sqrt{1-z^2}.$$

Además, como $x = \operatorname{arc\,sen} z$, vemos que dx está dada por:

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

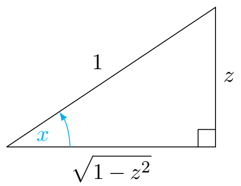


Figura 1.10: Triángulo rectángulo usado para representar la sustitución $z = \operatorname{sen} x$.

Ejemplo 1.96. Determine:

$$I = \int \frac{\cos x\,dx}{1-\operatorname{sen}^2 x}.$$

Solución. Examinando el integrando, tenemos

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x} = -\left(\frac{-\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\right) = -R(\operatorname{sen} x, -\cos x).$$

Luego, reemplazando el cambio $z = \operatorname{sen} x$ y $dx = \dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ en el integrando se obtiene

$$I = \int \frac{\sqrt{1-z^2}}{(1-z^2)}\left(\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right) = \int \frac{dz}{1-z^2} = \frac{\ln|z+1|}{2} - \frac{\ln|z-1|}{2} + C$$

Finalmente,

$$I = \frac{\ln|\operatorname{sen} x+1|}{2} - \frac{\ln|\operatorname{sen} x-1|}{2} + C.$$

Ejemplo 1.97. Determine:

$$I = \int \frac{1}{(3-\operatorname{sen} x)\cos x}dx.$$

Solución. Rápidamente, se puede notar que el integrando

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{1}{(3-\operatorname{sen} x)\cos x} = -\left(\frac{1}{(3-\operatorname{sen} x)(-\cos x)}\right) = -R(\operatorname{sen} x, -\cos x)$$

es una función racional impar en $\cos x$. Luego, haciendo el cambio

$$z = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(3-z)\sqrt{1-z^2}}\left(\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right) = \int \frac{dz}{(3-z)(1-z^2)} \\ &= \int \left(\frac{1}{8\,(z-3)} + \frac{1}{8\,(z+1)} - \frac{1}{4\,(z-1)}\right)dz \\ &= \frac{1}{8}\ln|z-3| + \frac{1}{8}\ln|z+1| - \frac{1}{4}\ln|z-1| + C. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$I = \frac{1}{8}\ln|\operatorname{sen} x-3| + \frac{1}{8}\ln|\operatorname{sen} x+1| - \frac{1}{4}\ln|\operatorname{sen} x-1| + C.$$

Caso 3: Si la función $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es impar en $\operatorname{sen} x$. Esto es, la función R satisface

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(-\operatorname{sen} x, \cos x).$$

Para este tipo de funciones se utiliza la sustitución:

$$\boxed{z = \cos x} \qquad (1.14)$$

De la Figura 1.11, tenemos

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1-z^2}.$$

Además, dx está dada por:

$$dx = -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

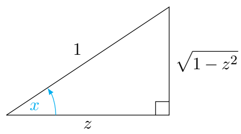


Figura 1.11: Triángulo rectángulo usado para representar la sustitución $z = \cos x$.

Ejemplo 1.98. Determine

$$I = \int \frac{\operatorname{sen} x \cos x dx}{\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x}.$$

Solución. Se observa que

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x} = -\left(\frac{(-\operatorname{sen} x)\cos x}{\cos^4 x - (-\operatorname{sen} x)^4}\right) = -R(-\operatorname{sen} x, \cos x).$$

Luego, usando $z = \cos x$ y $\operatorname{sen} x = \sqrt{1-z^2}$, con $dx = -\dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\left(\sqrt{1-z^2}\right)(z)\left(-\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right)}{z^4 - \left(\sqrt{1-z^2}\right)^4} = -\int \frac{zdz}{z^4-(1-z^2)^2}\\
&= -\int \frac{zdz}{2z^2-1} = -\int \frac{du/4}{u}, \qquad \text{si } u = 2z^2-1 \Rightarrow du = 4zdz\\
&= -\frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{4}\ln|u| + C\\
&= -\frac{1}{4}\ln\left|2z^2-1\right| + C\\
&= -\frac{1}{4}\ln\left|2\cos^2 x - 1\right| + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.99. Halle:

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x + 2\operatorname{sen} x} dx.$$

Solución. Se observa que $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x\cos x + 2\operatorname{sen} x} = -R(-\operatorname{sen} x, \cos x)$.

Luego, sea $z = \cos x \Longrightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{1-z^2} \quad \wedge \quad dx = \dfrac{-dz}{\sqrt{1-z^2}}$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{-\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}}{\left(\sqrt{1-z^2}\right)(z+2)} = \int \frac{-dz}{(1-z^2)(z+2)}\\
&= \int \frac{dz}{(z^2-1)(z+2)}\\
&= \int \frac{dz}{(z-1)(z+1)(z+2)}\\
&= \int \left(\frac{1}{6(z-1)} - \frac{1}{2(z+1)} + \frac{1}{3(z+2)}\right) dz\\
&= \frac{1}{6}\ln|z-1| - \frac{1}{2}\ln|z+1| + \frac{1}{3}\ln|z+2| + C\\
&= \frac{1}{6}\ln|\cos x - 1| - \frac{1}{2}\ln|\cos x + 1| + \frac{1}{3}\ln|\cos x + 2| + C.
\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos 1.7.

Halle las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}$.
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$
3. $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{5+4\cos x}$.
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}$
5. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2(x)-3\cos^2(x)}{2-\cos^2(x)}dx$
6. $\displaystyle\int \frac{4-\cos x}{3+\cos x}dx$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{4\cot(x)+4+\tan(x)}dx$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\operatorname{sen}(x)}$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}$
10. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}dx$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\operatorname{sen}(x)-3\cos(x)-5}$
12. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{2+\cos(x)}dx$
13. $\displaystyle\int \frac{2-\operatorname{sen}(x)}{2+\operatorname{sen}(x)}dx$
14. $\displaystyle\int \frac{3\operatorname{sen}(x)+2\cos(x)}{2\operatorname{sen}(x)+3\cos(x)}dx$
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2(3x)+\tan^2(3x)}$
16. $\displaystyle\int \frac{\sec(x)}{2\tan(x)+\sec(x)-1}dx$
17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2(x)-5\operatorname{sen}(x)\cos(x)}$

2 Capítulo
Integral Definida

La integral definida es un concepto fundamental en el cálculo y análisis matemático. En matemáticas se utiliza para calcular el área bajo una curva en un intervalo específico o para encontrar el valor acumulado de una función en ese intervalo. También se pueden encontrar diferentes aplicaciones en el cálculo de magnitudes físicas, como el trabajo, la energía, la densidad de masa, el momento de inercia, entre otros.

Geométricamente, la integral definida se interpreta como el límite de la suma de áreas de rectángulos infinitesimales, donde el ancho de cada rectángulo tiende a cero. Este proceso se conoce como sumas de Riemann, eso lo veremos más adelante.

2.1. Cálculo del área de una región plana usando sumas

Antes de iniciar con el cálculo de áreas de regiones planas, vamos a apartarnos brevemente para presentar una notación que nos permitirá escribir de manera más concisa sumas que involucren un gran número de términos. Esta notación hace uso de la letra griega mayúscula sigma (Σ) y, por lo tanto, se conoce como notación sigma.

2.1.1. Notación Sigma

La notación Sigma (Σ) es una herramienta fundamental en cálculo integral que permite expresar de manera compacta sumas de términos. La forma general de la notación Sigma es:

$$\sum_{k=m}^{n} x_k$$

donde k es el índice de la suma que varía desde m hasta n, con $m \leq n$, y x_k representa los términos que se están sumando. Sin pérdida de generalidad, podemos realizar un cambio de variable en el índice de la suma para iniciar desde uno. Esto nos permite expresar la suma de la siguiente manera.

Definición 2.1: Notación sigma.

Sea x_k un número real que depende de un entero k. Designamos la suma de los n números reales $x_1, x_2, \cdots, x_n$, mediante la notación sigma o notación suma

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

donde la variable k es el índice de la suma.

Ejemplo 2.1. Calcule las siguientes sumas:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k^2$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} k^3$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}(3k+2)$ (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$

Solución.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55.$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = 441.$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}(3k+2) = (3(1)+2) + (3(2)+2) + (3(3)+2) = 24.$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{(-1)^1}{(1+1)^2} + \frac{(-1)^2}{(2+1)^2} + \frac{(-1)^3}{(3+1)^2} = -\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \approx -0.201.$

Hasta el momento, solo hemos utilizado a la variable k como el índice de la suma, pero en realidad podemos usar cualquier letra. Por ejemplo, cada una de las siguientes sumas:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j$$

representa la suma de los n números $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n$.

Propiedad 2.1. Reglas de suma

1. **Propiedad de linealidad:** Para constantes α y β, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha\sum_{k=1}^{n} x_k + \beta\sum_{k=1}^{n} y_k.$$

2. **Propiedad de suma de constantes:** Para una constante α, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha = \alpha n.$$

3. **Propiedad de cambio de índice:** Si i es una constante, entonces:

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{k=m-i}^{n-i} x_{k+i}.$$

2. Integral Definida

4. **Propiedad Telescópica:**

$$\sum_{k=m}^{n}(x_{k+1}-x_k)=x_{n+1}-x_m.$$

La propiedad anterior 3, nos dice que a veces es más conveniente usar un límite inferior de suma distinto de 1. Por ejemplo, podemos escribir

$$\sum_{k=3}^{7}(3k+2)=11+14+17+20+23$$

lo cual es equivalente a

$$\sum_{k=3-2}^{7-2}(3(k+2)+2)=\sum_{k=1}^{5}(3k+8)=11+14+17+20+23.$$

Ejemplo 2.2. Escriba cada una de las siguientes sumas en su forma expandida o desarrollada:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{k=-3}^{0}(3k+1)^2$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\left(\frac{k}{n}\right)$

Solución.

$$\text{(a)}\ \sum_{k=1}^{15}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{2}\right)+\cdots+\cos\left(\frac{15\pi}{2}\right)$$

$$\text{(b)}\ \sum_{k=-3}^{0}(3k+1)^2=(3(-3)+1)^2+(3(-2)+1)^2+(3(-1)+1)^2+(3(0)+1)^2$$

$$\text{(c)}\ \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\left(\frac{k}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)+\left(1+\frac{3}{n}\right)^2\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots$$
$$+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^2\left(\frac{n-1}{n}\right)+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\left(\frac{n}{n}\right)$$

La parte (c) del ejemplo anterior, nos muestra que el límite superior n de la suma es constante con respecto a la suma.

Propiedad 2.2. Fórmulas de las sumas más usuales:

(i) **Suma de los primeros n números naturales:**

$$1+2+3+\ldots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

(ii) **Suma de los primeros n cuadrados:**

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(iii) **Suma de los primeros n cubos:**

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

(iv) **Suma de los primeros n números a la cuarta:**

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$$

(v) **Suma de una progresión geométrica:**

$$x + x + x^2 + \ldots + x^n = \sum_{k=1}^{n} x^k = x\left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right), \quad \text{para } x > 0,\ x \neq 1.$$

Ejemplo 2.3. Calcule la suma de

$$\sum_{k=1}^{5} 2k - 3.$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{5} 2k - 3 &= \sum_{k=1}^{5} 2k - \sum_{k=1}^{5} 3 \\
&= 2\sum_{k=1}^{5} k - \sum_{k=1}^{5} 3 \\
&= 2\frac{5(5+1)}{2} - 3(5) \\
&= 15.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.4. Halle la suma

$$\sum_{i=1}^{2} \left[(-2 + 3i)^3 + 1\right].$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2} \left[-7 + 36i - 54i^2 + 27i^3\right] &= \sum_{i=1}^{2} -7 + 36\sum_{i=1}^{2} i - 54\sum_{i=1}^{2} i^2 + 27\sum_{i=1}^{2} i^3 \\
&= -14 + 36 \cdot \frac{2(2+1)}{2} - 54\frac{2(2+1)(4+1)}{6} + 27\frac{4(2+1)^2}{4} \\
&= -14 + 36(3) - 54(5) + 27(9) \\
&= 67.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.5. Calcule la suma

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i^2 + 9i + 20}.$$

Solución. Para calcular esta suma, primero factorizamos el denominador

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i^2 + 9i + 20} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{(i+4)(i+5)},$$

luego, aplicando fracciones parciales

$$\frac{1}{(i+4)(i+5)} = \frac{A}{i+4} + \frac{B}{i+5}$$

encontramos que: $A = 1$ y $B = -1$. Por tanto, empleando la propiedad telescópica, se obtiene el siguiente resultado

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i^2 + 9i + 20} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{i+4} - \frac{1}{i+5} \right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{3}{40}.$$

Ejemplo 2.6. Determine la siguiente suma en términos de n:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1).$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n} (k^2 + k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= n(n+1) \left[\frac{2n+1}{6} + \frac{1}{2} \right] \\
&= n(n+1) \left[\frac{n+2}{3} \right] \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.7. Halle la siguiente suma en términos de n:

$$\sum_{k=1}^{n} ke^k.$$

Solución. Para el cálculo de la suma, usaremos un artificio. Primero hallamos la suma de

$$\sum_{k=1}^{n} \left[ke^k - (k-1)e^{k-1} \right].$$

Por la propiedad telescópica, se observa que la suma es

$$\sum_{k=1}^{n}\left[ke^k-(k-1)e^{k-1}\right]=ne^n-0=ne^n. \tag{2.1}$$

Además,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left[ke^k-(k-1)e^{k-1}\right]&=\sum_{k=1}^{n}ke^k\left(1-e^{-1}\right)+\sum_{k=1}^{n}e^{k-1}\\&=\left(\frac{e-1}{e}\right)\sum_{k=1}^{n}ke^k+\frac{1}{e}\sum_{k=1}^{n}e^k\\&=\left(\frac{e-1}{e}\right)\sum_{k=1}^{n}ke^k+\frac{1}{e}\left[e\left(\frac{e^n-1}{e-1}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.2}$$

Luego, reemplazando (2.1) en (2.2), se obtiene

$$ne^n-\frac{e^n-1}{e-1}=\frac{e-1}{e}\sum_{k=1}^{n}ke^k$$

Finalmente, realizando algunas operaciones básicas, se concluye que la suma es

$$\sum_{k=1}^{n}ke^k=\frac{ne^{n+1}}{e-1}-\frac{e^{n+1}-e}{(e-1)^2}.$$

Ejemplo 2.8. Encuentre, en términos de n, el valor de

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos^2(i)-\cos(2i-2)}{2^i}.$$

Solución.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos^2(i)-\cos(2i-2)}{2^i}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{1+\cos(2i)}{2}-\cos(2(i-1))}{2^i}\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^{i+1}}+\frac{\cos(2i)}{2^{i+1}}-\frac{\cos(2(i-1))}{2^i}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\cos(2i)}{2^{i+1}}-\frac{\cos(2(i-1))}{2^i}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\cos(2i)}{2^i}-\frac{\cos(2(i-1))}{2^{i-1}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{(\frac{1}{2})^n-1}{(\frac{1}{2}-1)}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(2n)}{2^n}-1\right)\\&=-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{\cos(2n)}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

2.1.2. Partición de un intervalo cerrado

Supongamos que descomponemos un intervalo cerrado dado $[a, b]$ en n subintervalos mediante la inserción de $n-1$ puntos de subdivisión, digamos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, sujetos únicamente a la restricción

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b. \tag{2.3}$$

Es conveniente denotar al punto a en sí mismo como x_0 y al punto b como x_n. En relación con esto, se establece la siguiente definición.

Definición 2.2: Partición de un intervalo cerrado.

Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado. La colección de números

$$\mathbf{P} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$$

es denominado una **partición** de $[a, b]$, si $\mathbf{P}$ satisface la restricción (2.3).

Importante. La partición $\mathbf{P}$ determina n subintervalos cerrados

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n].$$

Un subintervalo cerrado típico es $[x_{k-1}, x_k]$, y se refiere como el k-ésimo subintervalo cerrado de $\mathbf{P}$; un ejemplo se muestra en la Figura 2.1. Asimismo, su intervalo abierto correspondiente es $]x_{k-1}, x_k[$ y se llama el k-ésimo subintervalo abierto de $\mathbf{P}$; y la longitud de cada subintervalo, se denota por $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

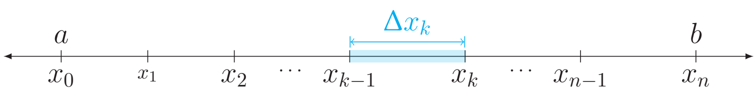


Figura 2.1: Partición de un intervalo cerrado $[a, b]$.

Definición 2.3: Clases de particiones.

Una partición $\mathbf{P}$ puede ser:

(i) **Regular**, cuando las distancias Δx_k tienen la misma medida.

(ii) **No regular**, cuando las longitudes Δx_k tienen diferentes medidas.

La definición anterior, indica que las longitudes de cada subintervalo de una partición $\mathbf{P}$ pueden tener medidas diferentes, dependiendo del tipo; sin embargo, para nuestro propósito nos enfocaremos solamente en las particiones regulares.

Definición 2.4: Norma de una partición.

Dada una partición $\mathbf{P}$ de $[a, b]$, se denomina **norma** de la partición al número

$$\|\mathbf{P}\| = \text{máx}\{\Delta x_k = x_k - x_{k-1} : k = 1, 2, 3, ..., n\}.$$

Ejemplo 2.9. Sea $\mathbf{P} = \{3,\ 3.5,\ 3.7,\ 4,\ 4.5,\ 5,\ 5.3,\ 6\}$ una partición en el intervalo $[3, 6]$. Halle la norma de la partición.

Solución. Observamos que

$$x_0 = 3, \quad x_1 = 3.5, \quad x_2 = 3.7, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 4.5, \quad x_5 = 5, \quad x_6 = 5.3, \quad \text{y} \quad x_7 = 6.$$

Luego, hallando las distancias de cada subintervalo

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_1 &= x_1 - x_0 = 0.5 \\ \Delta x_2 &= x_2 - x_1 = 0.2 \\ \Delta x_3 &= x_3 - x_2 = 0.3 \\ \Delta x_4 &= x_4 - x_3 = 0.5 \\ \Delta x_5 &= x_5 - x_4 = 0.5 \\ \Delta x_6 &= x_6 - x_5 = 0.3 \\ \Delta x_7 &= x_7 - x_6 = 0.7 \end{aligned}\right\}$$

Comparando cada longitud, se observa que la norma de la partición es $\|\mathbf{P}\| = 0.7$.

Proposición 2.1.1. Sea $\mathbf{P}$ una partición del intervalo cerrado $[a, b]$. Si la partición $\mathbf{P}$ es regular, entonces

$$\|\mathbf{P}\| = \frac{b-a}{n}$$

y el extremo derecho de cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ está dado por $x_k = a + k\left(\dfrac{b-a}{n}\right)$ para todo $k = 1, 2, ..., n$.

Esta proposición nos indica que los x_k son equidistantes y que la longitud del k-ésimo subintervalo es $\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n}$. Por tal motivo, como nuestro objetivo es trabajar con las particiones regulares, denotaremos dicha medida por Δx, ya que todos los subintervalos tienen la misma longitud.

2.1.3. Aproximación del área de una región plana

El cálculo del área de figuras geométricas es un tema central en matemáticas y tiene aplicaciones en diversas áreas, desde la física hasta la ingeniería. Iniciamos esta sección con el análisis del área de un triángulo rectángulo para luego presentar el caso general.

Área de un triángulo rectángulo.

Uno de los polígonos más simples es el triángulo rectángulo, y comprender cómo calcular su área nos proporciona una base fundamental para abordar conceptos más avanzados en cálculo. Consideremos un triángulo rectángulo con una base b y una altura h, como se muestra en la Figura 2.2.

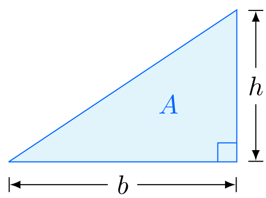


Figura 2.2: Triángulo rectángulo.

Aunque este enfoque proporciona una introducción comprensible al concepto de cálculo de áreas, cabe señalar que no es el método más preciso ni eficiente. Sin embargo, resulta necesario para establecer los fundamentos de la técnica que exploraremos más adelante.

Para iniciar con la aproximación del área del triángulo, superpondremos un sistema de coordenadas rectangulares en el plano. Elegiremos uno de los vértices del triángulo como el origen de este sistema de coordenadas, es decir, $(0,0)$. De esta manera, simplificamos la descripción del triángulo y podemos trabajar con coordenadas más simples. Luego, utilizaremos las coordenadas de los otros dos vértices del triángulo para definir su forma y tamaño en relación con el sistema de coordenadas.

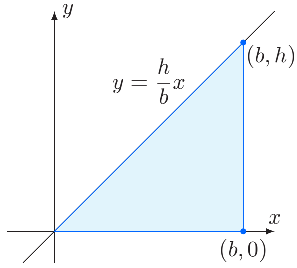


Figura 2.3: Triángulo rectángulo en un sistema de coordenadas.

En la Figura 2.3, se observa que el problema de hallar el área del triángulo, es el mismo que encontrar el área de la región en el primer cuadrante, acotada por las rectas $y = \dfrac{h}{b}x$, $y = 0$ y $x = b$. Dicho de otra manera, queremos encontrar el área bajo la gráfica de $y = f(x)$ sobre el intervalo $[0,b]$.

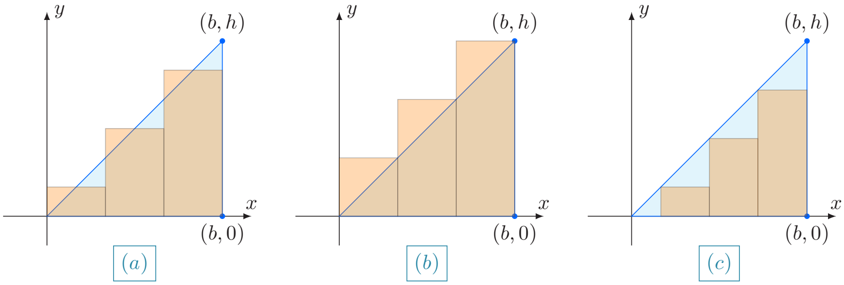


Figura 2.4: Aproximación del área utilizando tres rectángulos.

La Figura 2.4 nos muestra tres formas diferentes de aproximar el área del triángulo, utilizando tres rectángulos cuyas longitudes de las bases que se encuentran sobre el eje x son iguales. Por comodidad, seguiremos el procedimiento que se muestra en la Figura 2.4(b). Iniciamos tomando una partición regular del intervalo cerrado $[0,b]$, obteniendo n subintervalos de longitud $\Delta x = \dfrac{b}{n}$ y extremos derechos dados por

$$\begin{aligned}
x_1 &= \Delta x = \frac{b}{n} \\
x_2 &= 2\Delta x = 2\left(\frac{b}{n}\right) \\
x_3 &= 3\Delta x = 3\left(\frac{b}{n}\right) \\
\vdots &\qquad \vdots \\
x_n &= n\Delta x = n\left(\frac{b}{n}\right) = b.
\end{aligned}$$

Luego, si elegimos un k-ésimo rectángulo de altura $f(x_k)$ y base Δx, como se muestra en la Figura 2.5, y como que el área de un rectángulo es *base* $\times$ *altura*, se tiene que el área de este rectángulo pequeño es dado por

$$R_k = \Delta x f(x_k) = f(x_k)\Delta x.$$

Ahora, si se construyen n rectángulos de altura $f(x_k)$, $k = 1, 2, ..., n$ y base Δx, tal como se muestra en la Figura 2.6, notamos que la suma de las áreas de los n rectángulos es una aproximación al área del triángulo.

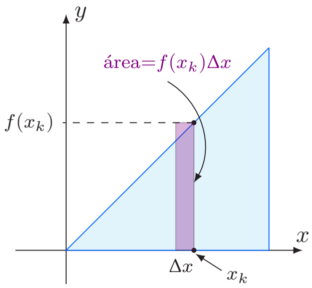


Figura 2.5: k-ésimo rectángulo.

Dicha aproximación se escribe como

$$A \approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

o en notación sigma,

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} R_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x. \tag{2.4}$$

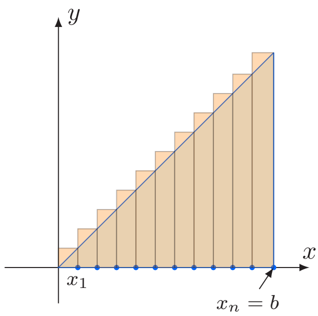


Figura 2.6: n rectángulos.

A medida que aumentamos el número de rectángulos, esta aproximación se acerca más al área real del triángulo. Por lo que, es necesario que se reduzca el error dado por esta aproximación (al dividir el intervalo cerrado $[0, b]$ en subdivisiones más finas). En otras palabras, deseamos encontrar una mejor aproximación al número A, que pueda ser obtenida al usar más y más rectángulos ($n \to +\infty$) de base decreciente ($\Delta x \to 0$).

Entonces, reemplazando los siguientes datos

$$f(x) = \frac{h}{b}x, \quad x_k = k\left(\frac{b}{n}\right), \quad f(x_k) = \frac{h}{n}\cdot k \quad \text{y} \quad \Delta x = \frac{b}{n},$$

en la aproximación (2.4), se obtiene

$$A \approx \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{h}{n}\cdot k\right)\frac{b}{n} = \frac{bh}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{bh}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{bh}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Finalmente, al hacer $n \to +\infty$, se consigue la fórmula conocida para el área de un triángulo:

$$A = \frac{1}{2}b\,h \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}b\,h.$$

Caso general: el problema de encontrar el área bajo la gráfica de una función.

Ahora nos vamos al problema general de encontrar el área A debajo de la gráfica de una función $y = f(x)$ que es continua en un intervalo $[a, b]$. Como se ilustra en la Figura 2.7, también asumimos que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Como se puede observar en la Figura 2.8, podemos aproximar el área A sumando las áreas de n rectángulos construidos sobre el intervalo $[a, b]$. A continuación, se presenta un procedimiento posible para determinar A:

- Tomamos una partición regular del intervalo $[a, b]$.
- Elegimos un número t_k en cada uno de los n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ generados por la partición regular, y calculamos los n productos $f(t_k)\,\Delta x$, donde Δx es la base (el ancho del subintervalo) y $f(t_k)$ es la altura (el valor de la función en t_k) de cada rectángulo. Los n números $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ son denominados **puntos muestra**.
- La suma de las áreas de los n rectángulos,

  $$R_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x = f(t_1)\,\Delta x + f(t_2)\,\Delta x + f(t_3)\,\Delta x + \cdots + f(t_n)\,\Delta x,$$

  representa una aproximación del valor del área A debajo de la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$.

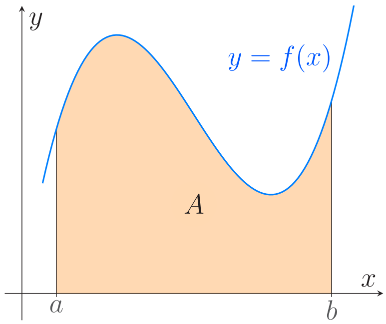


Figura 2.7: Área bajo la gráfica.

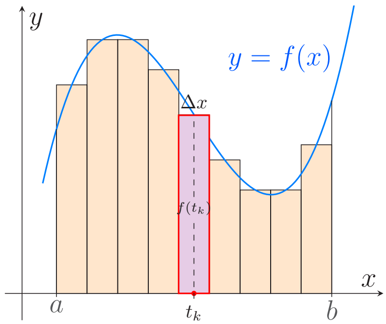


Figura 2.8: n rectángulos.

Con estas consideraciones preliminares, podemos definir el concepto de área bajo la gráfica de una función.

Definición 2.5: Área bajo una gráfica.

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y no negativa (es decir $f(x) \geq 0$) en $[a, b]$. Sea la región plana R limitada por las gráficas de $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje X, entonces el área A de la región R, es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n \to +\infty} R_n = \lim_{n \to +\infty} \left[f(t_1)\,\Delta x + f(t_2)\,\Delta x + f(t_3)\,\Delta x + \ldots + f(t_n)\,\Delta x \right]. \tag{2.5}$$

Se puede demostrar que cuando la función f es continua, el límite dado en (2.5) siempre existe, independientemente del método utilizado para dividir el intervalo $[a, b]$ en subintervalos. Esto significa que los subintervalos pueden ser seleccionados de manera uniforme o no uniforme en cuanto a su anchura, y los puntos t_k pueden ser elegidos arbitrariamente dentro de dichos subintervalos. Sin embargo, si los subintervalos no tienen la misma anchura, entonces se requiere un tipo diferente de límite en el punto (2.5). En este caso, necesitamos sustituimos $n \to +\infty$ por el requerimento de que la longitud del subintervalo más ancho tienda a cero ($\|\mathbf{P}\| \to 0$).

Importante. Una forma práctica para usar el límite dado en (2.5) es escoger t_k como se hizo en el análisis para determinar el área del triángulo dado en la Figura 2.5, es decir, elegir a $t_k = x_k$ como el extremo derecho de cada subintervalo. Puesto que el ancho de cada uno de los n subintervalos es $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, tenemos

$$t_k = x_k = a + k\Delta x = a + k\frac{b-a}{n}, \quad \text{para } k = 1, 2, 3, ..., n.$$

Luego, al sustituir este último resultado en (2.5), se concluye que el área A también está determinada por

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}. \tag{2.6}$$

Es claro observar que $\Delta x \to 0$, cuando $n \to +\infty$ puesto que $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Ejemplo 2.10. Usando (2.6), encuentre el área bajo la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 4$ sobre el intervalo $[-2, 4]$.

Solución. Identificando $a = -2$ y $b = 4$, encontramos

$$\Delta x = \frac{4-(-2)}{n} = \frac{6}{n}.$$

Luego, utilizando el límite dado en (2.6), se tiene

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(-2 + k\frac{6}{n}\right)\frac{6}{n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(-2+\frac{6k}{n}\right)^2 + 4\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[8 - \frac{24k}{n} + \frac{36k^2}{n^2}\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} 8 - \frac{24}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{36}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right]. \end{aligned}$$

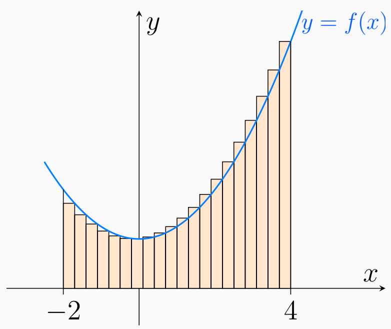


Figura 2.9

Luego, utilizando las propiedades de suma 2.1 y 2.2, tenemos

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{n}\left[8n - \frac{24}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{36}{n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\right]\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left[48\frac{n}{n} - 72\left(\frac{n(n+1)}{n^2}\right) + 36\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}\right)\right]\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left[48 - 72\left(1+\frac{1}{n}\right) + 36\left(2+\frac{1}{n}\right)\right] = 48 \text{ unidades cuadradas.}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.11. Mediante (2.6), halle el área bajo la gráfica de la función $f(x) = -x+3$ sobre el intervalo $[-1,3]$.

Solución. Reconociendo $a=-1$ y $b=3$, tenemos

$$\Delta x = \frac{3-(-1)}{n} = \frac{4}{n}.$$

Luego, utilizando la fórmula (2.6),

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(-1 + k\frac{4}{n}\right)\frac{4}{n}\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[-\left(-1+\frac{4k}{n}\right)+3\right]\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[4 - \frac{4k}{n}\right]\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}4 - \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}k\right]\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n}\left[4n - \frac{4}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

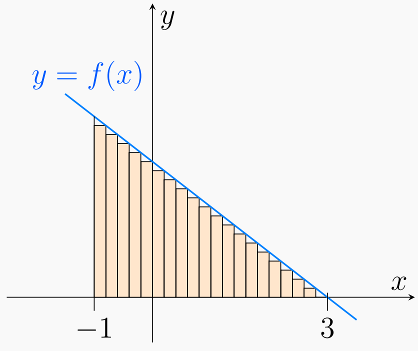


Figura 2.10: Área bajo la gráfica de la función $f(x) = -x+3$, sobre el intervalo $[-1,3]$.

Finalmente, utilizando las propiedades de sumas, obtenemos

$$A = \lim_{n\to+\infty}\left[16 - 8\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = 8 \text{ unidades cuadradas.}$$

Ejemplo 2.12. Utilizando la fórmula (2.6), determine el área bajo la gráfica de la función $f(x) = 2^x$ sobre el intervalo $[0,4]$.

Solución. Puesto que $a=0$ y $b=4$, tenemos

$$\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n} \quad \text{y} \quad x_k = \frac{4k}{n}.$$

Así, utilizando el límite (2.6), se tiene

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{4k}{n}\right)\frac{4}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{4k}{n}}.$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{4}{n}}\right)^k \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n}\left(\frac{2^{\frac{4}{n}}\left((2^{\frac{4}{n}})^n-1\right)}{2^{\frac{4}{n}}-1}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n}\left(\frac{2^{\frac{4}{n}}\left(2^4-1\right)}{2^{\frac{4}{n}}-1}\right) \\
&= 15 \lim_{n\to+\infty} \left(2^{\frac{4}{n}}\right)\left(\frac{\frac{4}{n}}{2^{\frac{4}{n}}-1}\right) \\
&= \frac{15}{\ln(2)} \text{ unidades cuadradas.}
\end{aligned}
$$

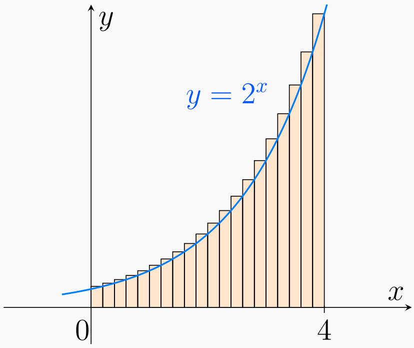


Figura 2.11: Área bajo la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, sobre el intervalo $[0, 4]$.

Ejemplo 2.13. Mediante (2.6), encuentre el área bajo la gráfica de la función

$$f(x) = -4(x-4)(x-1)^2$$

sobre el intervalo $[0, 3]$.

Solución.

Identificando $a = 0$ y $b = 4$, tenemos

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n} \quad \text{y} \quad x_k = \frac{3k}{n}.$$

Luego, utilizando el límite dado en (2.6),

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{3k}{n}\right)\frac{3}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} -4\left(\frac{3k}{n}-4\right)\left(\frac{3k}{n}-1\right)^2 \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{-12}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{27k^3}{n^3}-\frac{54k^2}{n^2}+\frac{27k}{n}-4\right).
\end{aligned}
$$

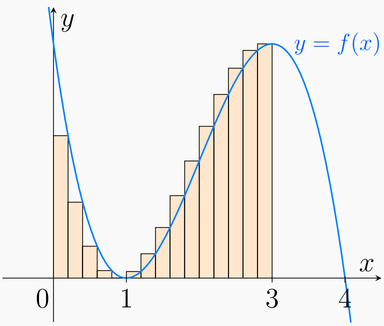


Figura 2.12

Por lo tanto, usando las propiedades de suma, se tiene

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to+\infty} \frac{-12}{n}\left(\frac{27}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^3 - \frac{54}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2 + \frac{27}{n}\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}4\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{-12}{n}\left(\frac{27}{n^3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{54}{n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{27}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - 4n\right) \\
&= -12 \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{27}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{54}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{27}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - 4\right) \\
&= -12 \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{27}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 9\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) + \frac{27}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - 4\right) = 21\ u^2.
\end{aligned}
$$

Importante. Como los puntos muestra t_k pueden tomarse como cualquier número conveniente en el k-ésimo intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, podemos elegir el extremo izquierdo de cada subintervalo, entonces

$$t_k = a + (k-1)\Delta x = a + (k-1)\frac{b-a}{n}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

y la fórmula dada en (2.6) se convierte en

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}. \tag{2.7}$$

Ejemplo 2.14. Usando (2.7), encuentre el área bajo la gráfica de la función $f(x) = -x^2+8$ sobre el intervalo $[0, 2]$.

Solución. Rápidamente notamos que $a = 0$ y $b = 2$, por lo que

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n} \quad \text{y} \quad t_k = 0 + \frac{2}{n}(k-1) = \frac{2(k-1)}{n}.$$

Luego, utilizando (2.7), se tiene

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(0 + \frac{2}{n}(k-1)\right)\frac{2}{n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[-\left(\frac{2(k-1)}{n}\right)^2 + 8\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{4k^2}{n^2} + \frac{8k}{n^2} - \frac{4}{n^2} + 8\right]. \end{aligned}$$

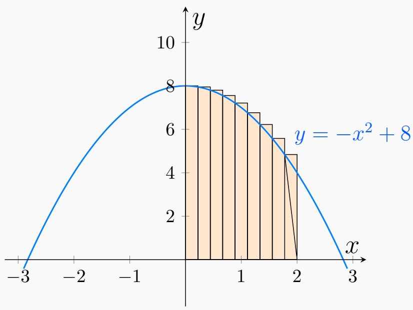


Figura 2.13: Rectángulos usando los extremos izquierdos de los subintervalos.

Luego, utilizando las propiedades de sumas, tenemos

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}\left[\frac{-4}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{8}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=1}^{n} 8\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}\left[-\frac{4}{n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{8}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{4}{n} + 8n\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) + \frac{8}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{8}{n^2} + 16\right] \\ &= -\frac{8}{3} + 16 = \frac{40}{3} \text{ unidades cuadradas.} \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos 2.1.

1. Desarrolle la suma indicada en cada ítem:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} 2k$
   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{3^k}{k}$
   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^k}{2k+1}$
   d) $\displaystyle\sum_{i=2}^{6} \left(i^2-2i\right)$
   e) $\displaystyle\sum_{j=1}^{4} \left(\frac{3}{10}\right)^j$
   f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$
   g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} (k+1)^2$
   h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \cos k\pi$
   i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} \frac{\operatorname{sen}(k\pi/2)}{k}$

2. Utilice la notación sigma para escribir la suma dada.

   a) $1+3+5+7+9$
   b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$
   c) $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-1$
   d) $1+3+5+7+9+11+13+15$
   e) $(1)+(-2)+(3)+(-4)+(5)+(-6)+(7)+(-8)$
   f) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5}+\cdots+3$
   g) $\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)-\frac{1}{4}\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)+\frac{1}{9}\cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right)-\frac{1}{16}\cos\left(\frac{4\pi}{L}x\right)$
   h) $f'(2)(x-2)-\frac{f''(2)}{3}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{5}(x-2)^3-\frac{f^{(4)}(2)}{7}(x-2)^4+\frac{f^{(5)}(2)}{9}(x-2)^5$
   i) $2+4+8+16+32+64$
   j) $1+4+7+10+\cdots+37$
   k) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$
   l) $3+3+3+3+3+3+3+3+3+3$

3. Encuentre el valor numérico de las siguientes sumas:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{1000} (2k-1)$
   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \left(6k^2-k\right)$
   c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} \left(2i^3-5i+3\right)$

4. Luego de aplicar las propiedades de sumas, calcule los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$
   b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3$
   c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{3}{n}i-\frac{3}{n}-1\right]$
   d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{3}{n}i-\frac{2}{n^2}i^2-\frac{1}{n^3}i^3\right]$

5. Usando la fórmula 2.6 determine el área bajo la gráfica de la función dada sobre el intervalo que se indica:

   a) $f(x)=x$, $[0,6]$.
   b) $f(x)=2x$, $[1,3]$.
   c) $f(x)=2x+1$, $[1,5]$.
   d) $f(x)=3x-6$, $[2,4]$.
   e) $f(x)=1-x^2$, $[-1,1]$.
   f) $f(x)=2x^2+3$, $[-3,-1]$.
   g) $f(x)=x^3-3x^2+4$, $[0,2]$.
   h) $f(x)=\begin{cases}2, & 0\le x<1\\ x+1, & 1\le x\le 4\end{cases}$.

2.2. Integral Definida

Después de haber explorado el concepto de área bajo la gráfica de una función mediante una partición regular, estamos listos para dar el siguiente paso y sumergirnos a la integral definida.

2.2.1. Sumas de Riemann

Antes de profundizar en la integral definida, es crucial comprender el concepto de sumas de Riemann. Estas sumas son la base conceptual sobre la cual se construye el cálculo integral.

Considere una función f definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. En este intervalo, la función puede tomar valores tanto positivos como negativos y no necesariamente debe ser continua. La gráfica de esta función podría ser incluso de la forma como en la Figura 2.14.

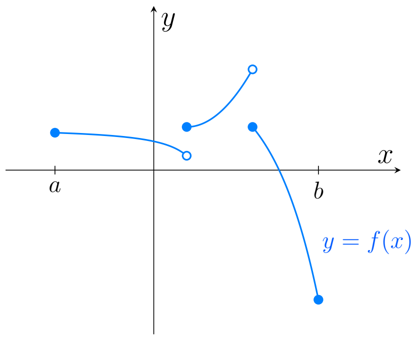


Figura 2.14: Gráfica de la función f en el intervalo $[a, b]$.

Luego, para dar una definición de Sumas de Riemann, tomamos una partición **P** no necesariamente regular del intervalo $[a, b]$, que lo divide en n subintervalos por medio de los puntos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \tag{2.8}$$

y sea $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. En cada uno de estos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, se elige un punto t_k, el cual como ya hemos visto antes, puede ser un punto frontera. Ahora procedemos a definir las sumas de Riemann, un concepto central en el análisis matemático.

Definición 2.6: Suma de Riemann

Sea f una función definida en $[a, b]$ y **P** una partición de $[a, b]$ como en (2.8). Si t_k es cualquier punto del k-ésimo intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, entonces la suma

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k,$$

se llama una **suma de Riemann** de f para la partición **P**.

Las sumas de Riemann nos permiten aproximar el área bajo la gráfica de una función en un intervalo específico mediante la división de ese intervalo en subintervalos más pequeños y la evaluación de la función en puntos dentro de cada subintervalo. La interpretación geométrica se muestra en la Figura 2.15, donde $\sum_{k=1}^{5} f(t_k)\Delta x_k = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$.

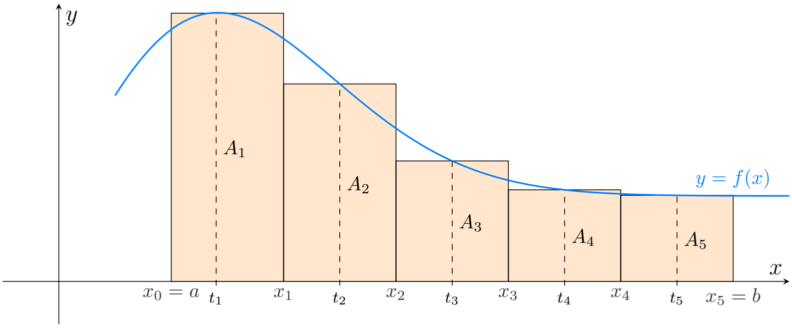


Figura 2.15: Interpretación geométrica de una suma de Riemann como una suma de áreas.

Importante. En la sección 2.1, los ejemplos de las funciones que elegimos fueron positivas sobre el intervalo donde se pedía calcular el área. A consecuencia de esto, podemos observar que la suma de Riemann es simplemente la suma de las áreas de los rectángulos. Pero **¿qué sucede si f es negativa en dicho intervalo?** En este caso, un punto muestra, t_k con $f(t_k) < 0$, llevará a un rectángulo que está completamente por debajo del eje x, y el producto $f(t_k)\Delta x_k$ será **negativo**. Sin embargo, esto no implica que estemos calculando un área negativa. En realidad, este término negativo simplemente indica una contribución negativa a la suma total, lo que refleja que el área correspondiente se encuentra debajo del eje x. La Figura 2.16 ilustra esto, donde

$$\sum_{k=1}^{6} f(t_k)\Delta x_k = A_1 + A_2 + A_3 - A_4 - A_5 + A_6.$$

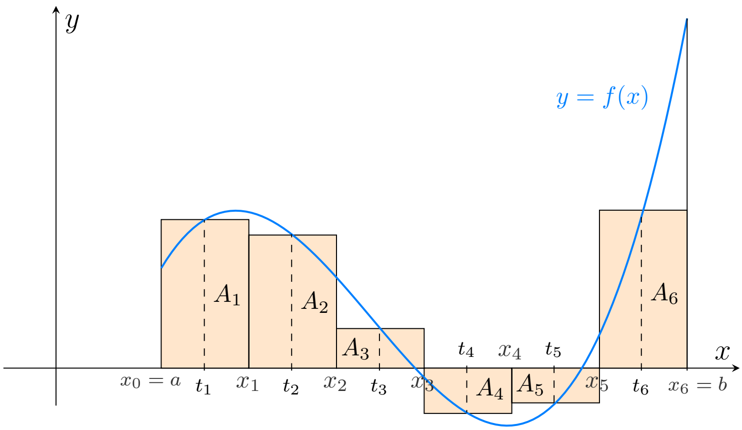


Figura 2.16: Interpretación geométrica de una suma de Riemann como una suma de áreas.

Ejemplo 2.15. Evalúe la suma de Riemann para

$$f(x) = 4xe^{-\frac{x^2}{4}}$$

en el intervalo $[-3, 3]$. Utilice una partición regular $\mathbf{P}$ del intervalo, donde t_k es el punto medio de cada subintervalo.

Solución. Escogemos una partición regular con longitud $\Delta x = 1$. Entonces los puntos muestras son:

$$t_1 = -2.5, \quad t_2 = -1.5, \quad t_3 = -0.5, \quad t_4 = 0.5, \quad t_5 = 1.5, \quad \text{y} \quad t_6 = 2.5.$$

Luego, la suma de Riemann para la función es

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{6} f(t_k)\Delta x &= -f(t_1)\Delta x - f(t_2)\Delta x - f(t_3)\Delta x + f(t_4)\Delta x + f(t_5)\Delta x + f(t_6)\Delta x \\
&= -f(-2.5) - f(-1.5) - f(-0.5) + f(0.5) + f(1.5) + f(2.5) \\
&= -2.1 - 3.42 - 1.88 + 1.88 + 3.42 + 2.1 = 0.
\end{aligned}$$

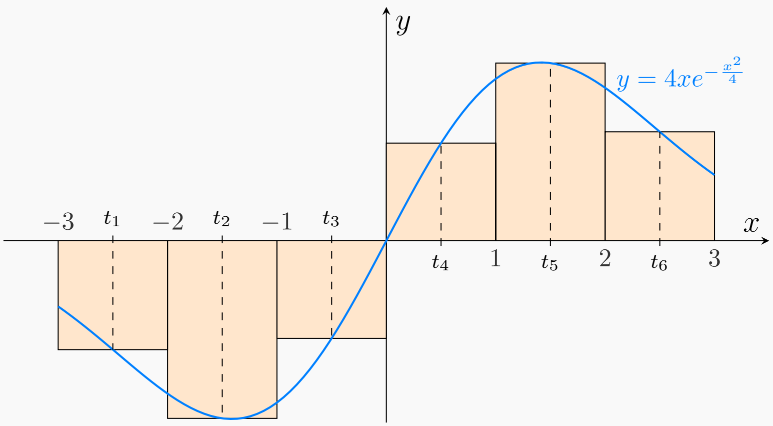


Figura 2.17: Gráfica de la función $f(x) = 4xe^{-\frac{x}{4}}$.

Importante. Cabe resaltar que los puntos t_k se eligen típicamente en los extremos de los subintervalos, en el punto medio o de manera uniforme distribuida a lo largo del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. No obstante, como hicimos en la sección anterior, para facilitar los cálculos, elegiremos los t_k como el extremo derecho de cada subintervalo.

Ahora que tenemos una comprensión básica de las sumas de Riemann, estamos preparados para adentrarnos al estudio más detallado de la integral definida. Si las sumas de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$ para una función f, se aproximan a un número L para toda partición $\mathbf{P}$ del intervalo $[a, b]$ para la cual la norma $\|\mathbf{P}\|$ tiende a cero, entonces escribimos

$$\lim_{\|\mathbf{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = L, \tag{2.9}$$

donde a $L \in \mathbb{R}$ se le denomina la **integral definida** de f sobre el intervalo $[a, b]$. En la siguiente definición se presenta un nuevo símbolo para el número L.

Definición 2.7: La integral definida.

Sea f una función que está definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. La **integral definida de f desde a hasta b**, que se denota por

$$\int_a^b f(x)dx,$$

se define como el límite de la suma de Riemann de f sobre la partición $\mathbf{P}$ de $[a, b]$, es decir,

$$\lim_{\|\mathbf{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx. \tag{2.10}$$

Si este límite existe, se dice que la función f es **integrable** sobre el intervalo $[a, b]$.

El límite de (2.10) también es llamado **integral de Riemann** de f desde a hasta b. Los números a y b se denominan **límite inferior** y **límite superior** de integración, respectivamente, y la función f es denominada **integrando**.

Importante. Observemos que $\|\mathbf{P}\| \to 0$ siempre implica que el número de subintervalos n tiende a $+\infty$. Asimismo, recordemos que el hecho de que $n \to +\infty$ no necesariamente implica que $\|\mathbf{P}\| \to 0$; sin embargo, como nos enfocaremos en particiones regulares, que n tienda a infinito si implicará que $\|\mathbf{P}\|$ converge a 0, ya que en este caso la norma está dada por $\|\mathbf{P}\| = \dfrac{b-a}{n}$.

Los próximos teoremas establecen condiciones suficientes para que una función f pueda ser integrable en un intervalo $[a, b]$. Las demostraciones de los dos teoremas siguientes no estarán incluidas.

Teorema 2.1: Continuidad implica integrabilidad.

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f es integrable sobre el intervalo; es decir, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ existe.

Para cada valor de x en el intervalo $[a, b]$, existen funciones definidas para las cuales el límite en (2.10) no existe. Además, si la función f no está definida para todos los valores de x en el intervalo, la integral definida puede no existir. Por ejemplo, más adelante se explicará por qué una integral como $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx$ no existe. Se observa que $y = \dfrac{1}{x-1}$ es discontinua en $x = 1$ y no está acotada en el intervalo. Sin embargo, no se debe concluir, a partir de este ejemplo, que cuando una función f presenta una discontinuidad en $[a, b]$, la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

necesariamente no existe. La continuidad de una función en $[a,b]$ es una condición suficiente pero no necesaria para garantizar la existencia de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

En el siguiente teorema se adiciona otra condición suficiente para que una función sea integrable.

Teorema 2.2: Condición suficiente.

Si una función f está limitada en el intervalo cerrado $[a,b]$, lo que significa que existe una constante positiva B tal que $-B \leq f(x) \leq B$ para todo x en el intervalo y si f es continua, excepto en un número finito de puntos, entonces f es integrable sobre el intervalo.

Importante. Saber que una función es integrable, nos permite determinar su integral mediante una **partición regular** y la elección de los puntos muestra t_k de cualquier forma conveniente, pero como ya hemos mencionado antes, elegiremos el extremo derecho de cada subintervalo como punto muestra.

Ejemplo 2.16. Usando sumas de Riemann y considerando una partición regular, calcule el valor de $\displaystyle\int_0^1 xdx$.

Solución. Como la partición a elegir es regular, tenemos

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}, \quad t_k = 0 + \frac{k}{n} = \frac{k}{n} \;\Rightarrow\; f(t_k) = \frac{k}{n}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xdx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.17. Usando sumas de Riemann, calcule $\displaystyle\int_0^3 \left(2x - x^2\right) dx$.

Solución. Notemos que $f(x) = 2x - x^2$, para $x \in [0,3]$. Entonces, eligiendo una partición regular, se tiene

$$\Delta x = \frac{3-(0)}{n} = \frac{3}{n}, \quad t_k = 0 + \frac{3k}{n}, \text{ con } t_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

Luego,

$$f(t_k) = 2\left(\frac{3k}{n}\right) - \left(\frac{3k}{n}\right)^2 = \frac{6k}{n} - \frac{9k^2}{n^2}.$$

Por lo que, la integral para esta función está dada por:

2. Integral Definida

$$\int_0^3 \left(2x - x^2\right) dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(t_k\right) \Delta x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{6k}{n} - \frac{9k^2}{n^2}\right) \frac{3}{n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{18}{n} \sum_{k=1}^{n} k - \frac{27}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2\right]$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{18}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{27}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\right]$$
$$= 0.$$

Ejemplo 2.18. Usando sumas de Riemann, halle $\displaystyle\int_{-1}^{2} 4^x dx$.

Solución. Observamos que $f(x) = 4^x$, para $x \in [-1, 2]$. Para una partición regular del intervalo $[-1, 2]$, tenemos

$$\Delta x = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n}, \quad t_k = -1 + \frac{3k}{n}, \text{ para } t_k \in \left[x_{k-1}, x_k\right].$$

Luego, reemplazando en la suma:

$$\int_{-1}^{2} 4^x dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(t_k\right) \Delta x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(4^{\left(-1+\frac{3k}{n}\right)}\right) \frac{3}{n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{3}{4n} \sum_{k=1}^{n} \left(4^{\frac{3}{n}}\right)^k\right]$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{4n} \left(\frac{4^{\frac{3}{n}}\left(4^3-1\right)}{4^{\frac{3}{n}}-1}\right) = \frac{63}{4\ln 4}.$$

Ejemplo 2.19. Usando sumas de Riemann, evalúe:

$$\int_1^2 \left(3^{x-1} + 2x\right) dx$$

Solución. De la integral se observa que

$$\Delta x = \frac{1}{n}, \quad x_i = 1 + \frac{i}{n} \quad \text{y} \quad f\left(x_i\right) = 3^{\frac{i}{n}} + 2\left(1 + \frac{i}{n}\right).$$

Ahora, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(3^{x-1} + 2x\right) dx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(3^{\frac{i}{n}} + 2\cdot\frac{i}{n} + 2\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n}\cdot\frac{3^{1/n}(3-1)}{3^{1/n}-1} + \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + 2\right] \\ &= 3 + 2\cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{3^{1/n}}{3^{1/n}-1} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Luego, trabajando en:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{3^{1/n}}{3^{1/n}-1}$$

Haciendo un cambio de variable: $y = 1/n$,tenemos:

$$L = \lim_{y\to 0} \frac{y\cdot 3^y}{3^y - 1} \Longrightarrow \text{L' Hospital } \lim_{y\to 0} \frac{3^y + y3^y\cdot \ln 3}{3^y\cdot \ln 3} = \frac{1}{\ln 3}$$

Finalmente, reemplazando en (2.11):

$$\int_1^2 \left(3^{x-1} + 2x\right) dx = 3 + \frac{2}{\ln 3}.$$

Ejemplo 2.20. Usando sumas de Riemann, halle el valor de b en $\displaystyle\int_0^b \left(x^2 + 2x\right) dx = 18.$

Solución. Eligiendo una partición regular, tenemos

$$\Delta x = \frac{b}{n} \quad \text{y} \quad x_i = \frac{ib}{n}.$$

Así, se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^b \left(x^2 + 2x\right) dx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{ib}{n}\right)^2 + 2\frac{ib}{n}\right] \frac{b}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\frac{b^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{b^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{b^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= \frac{b^3}{3} + b^2.
\end{aligned}$$

Luego, del dato del ejercicio,

$$\frac{b^3}{3} + b^2 = 18 \Longrightarrow (b-3)\left(b^2 + 6b + 18\right) = 0 \Longrightarrow b = 3.$$

Ejemplo 2.21. Usando sumas de Riemann, evalúe:

$$\int_0^1 \left(3^{x-1} - x^2\right) dx$$

Solución. Como hicimos en los ejemplos anteriores, tenemos que $\Delta x = \dfrac{1}{n}$ y $x_i = \dfrac{i}{n}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(3^{x-1} - x^2\right) dx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\left[\frac{1}{3}\left(3^{\frac{1}{n}}\right)^i - \left(\frac{i}{n}\right)^2\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{3^{\frac{1}{n}}(3-1)}{3^{\frac{1}{n}} - 1} - \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{3^{\frac{1}{n}}(2)}{3^{\frac{1}{n}} - 1} - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{2}{3\ln 3} - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.22. Exprese el siguiente límite como una integral definida en el intervalo $[1,4]$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left[e^{2+\frac{6i}{n}}-\frac{9i^2}{n^2}-\frac{3i}{n}\right].$$

Solución.

$$\Delta x=\frac{3}{n},\quad x_i=1+\frac{3i}{n}\Longrightarrow\frac{i}{n}=\frac{x_i-1}{3}.$$

Luego, reemplazando se obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left[e^{2+\frac{6i}{n}}-\frac{9i^2}{n^2}-\frac{3i}{n}\right]&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left[e^{2\left(1+\frac{3i}{n}\right)}-9\left(\frac{x_i-1}{3}\right)^2-3\left(\frac{x_i-1}{3}\right)\right]\\&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[e^{2x_i}-(x_i-1)^2-(x_i-1)\right]\frac{3}{n}\\&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[e^{2x_i}-x_i^2+x_i\right]\Delta x\\&=\int_1^4\left(e^{2x}-x^2+x\right)dx.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.23. Exprese el siguiente límite

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{in}}{(n+2i)^2}$$

como una integral definida en el intervalo $[4;5]$.

Solución. Puesto que $\Delta x=\frac{1}{n}$ y $x_i=4+\frac{i}{n}$, tenemos

$$I=\int_4^5 f(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f\left(4+\frac{i}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{in}}{(n+2i)^2}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{in}}{(n+2i)^2}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{\sqrt{in}}{n^2}}{\left(\frac{n+2i}{n}\right)^2}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{\sqrt{n}}{n}}{\left(1+\frac{2i}{n}\right)^2}\\I&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt{\frac{i}{n}+4-4}}{\left[2\left(4+\frac{i}{n}\right)-7\right]^2}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt{\left(4+\frac{i}{n}\right)-4}}{\left[2\left(4+\frac{i}{n}\right)-7\right]^2}\\I&=\int_4^5\frac{\sqrt{x-4}}{(2x-7)^2}dx.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.24. Exprese el siguiente limite como una integral definida en el intervalo $[-2;1]$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{3n}3^{\frac{3i}{n}}-8\left(\frac{12}{n}-\frac{36}{n^2}+\frac{27i^2}{n^3}\right)\right].$$

Solución. Rápidamente observamos que $\Delta x = \dfrac{1-(-2)}{n} = \dfrac{3}{n}$ y $x_i = -2 + \dfrac{3}{n}i$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{3}{9n}3^{\frac{3i}{n}} - \frac{3}{n}8\left(4-\frac{12i}{n}+\frac{9i^2}{n^2}\right)\right] &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left[3^{-2+\frac{3i}{n}} - 8\left(-2+\frac{3i}{n}\right)^2\right]\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left[3^{x_i}-8x_i^2\right]\\
&= \int_{-2}^{1}\left(3^x - 8x^2\right)dx.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.25. Usando sumas de Riemann, evalúe

$$\int_{-1}^{2}\left(\frac{x^3-3x^2}{3}\right)dx.$$

Solución. Se puede observar que $\Delta x = \dfrac{1-(-2)}{n} = \dfrac{3}{n}$ y $x_i = -1 + \dfrac{3i}{n}$, por lo que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2}\left(\frac{x^3-3x^2}{3}\right)dx &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta x f\left(x_i\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}f\left(-1+\frac{3i}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left[\frac{\left(-1+\frac{3i}{n}\right)^3 - 3\left(-1+\frac{3i}{n}\right)^2}{3}\right]\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[-1+\frac{9i}{n}-\frac{27i^2}{n^2}+\frac{27i^3}{n^3}-3\left(1-\frac{6i}{n}-\frac{9i^2}{n^2}\right)\right]\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[-1+\frac{9i}{n}-\frac{27i^2}{n^2}+\frac{27i^3}{n^3}-3+\frac{18i}{n}-\frac{27i^2}{n^2}\right]\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{4}{n}+\frac{27i}{n^2}-\frac{54i^2}{n^3}+\frac{27i^3}{n^4}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}-\frac{4}{n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{27i}{n^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{54i^2}{n^3}+\sum_{i=1}^{n}\frac{27i^3}{n^4}\\
&= -4+\frac{27}{n^2}\frac{n\left(n+1\right)}{2}-\frac{54}{n^3}\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}+\frac{27}{n^4}\frac{n^2\left(n+1\right)^2}{4}\\
&= -4+\frac{27}{2}-\frac{54}{3}+\frac{27}{4} = -\frac{7}{4}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.26. Mediante sumas de Riemann, calcule:

$$\int_{-2}^{1}\left(2x - e^{3x-1}\right)dx.$$

Solución. Como $\Delta x = \dfrac{3}{n}$ y $x_i = -2 + \dfrac{3i}{n}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} \left(2x - e^{3x-1}\right) dx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(-2 + \frac{3i}{n}\right) \cdot \frac{3}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(2\left(-2 + \frac{3i}{n}\right) - e^{3\left(-2+\frac{3i}{n}\right)-1}\right) \frac{3}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\left(-2 + \frac{3i}{n}\right) \cdot \frac{3}{n} - \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{3\left(-2+\frac{3i}{n}\right)-1} \cdot \frac{3}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} -\frac{12}{n} + \frac{18i}{n^2} - \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} e^{-7} \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{9i}{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-12}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{18}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\right) - \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} e^{-7} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{9i}{n}}\right)^{i} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(-12 + \frac{18}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right) - \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} e^{-7} e^{\frac{9}{n}} \left(\frac{1-e^{9}}{1-e^{\frac{9}{n}}}\right) \\
&= -3 - \left(-\frac{1-e^{9}}{3e^{7}}\right) = \frac{1-e^{9}}{3e^{7}} - 3.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.27. Evalúe:

$$\int_{1}^{3} \left(3x - e^{4x-1}\right) dx$$

Solución. Inmediatamente identificamos que $\Delta x = \dfrac{2}{n}$ y $x_i = 1 + \dfrac{2i}{n}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{3} \left(3x - e^{4x-1}\right) dx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{2i}{n}\right) \cdot \frac{2}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(3\left(1 + \frac{2i}{n}\right) - e^{4\left(1+\frac{2i}{n}\right)-1}\right) \frac{2}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} 3\left(1 + \frac{2i}{n}\right) \cdot \frac{2}{n} - \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{4\left(1+\frac{2i}{n}\right)-1} \cdot \frac{2}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(6 + \frac{12}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right) - \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} e^{3} e^{\frac{8}{n}} \left(\frac{1-e^{8}}{1-e^{\frac{8}{n}}}\right) \\
&= 12 - \frac{e^{11} - e^{3}}{4}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.28. Exprese el siguiente límite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2\sqrt{n(2n+3i)}}{3\sqrt{2}\,(8n^2 + i^2)}$$

como una integral definida en el intervalo $\left[\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}\right]$.

Solución. Vemos que $\Delta x = \dfrac{1}{6n}$ y $x_i = \dfrac{1}{3} + \dfrac{i}{6n}$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2\sqrt{n(2n+3i)}}{3\sqrt{2}\,(8n^2+i^2)} &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{3}\frac{\frac{\sqrt{\frac{2n^2}{2}+\frac{3in}{2}}}{n^2}}{\frac{8n^2+i^2}{n^2}}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3n}\frac{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{3in}{n^2}}}{8+\left(\frac{i^2}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3i}{2n}}}{2+\frac{i^2}{4n^2}}\cdot\frac{1}{6n}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{9\left[\frac{1}{3}+\frac{i}{6n}\right]-2}}{\left(\left[3\left(\frac{1}{3}+\frac{i}{6n}\right)-1\right]^2+2\right)}\cdot\frac{1}{6n}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{9x_i-2}}{\left([3x_i-1]^2+2\right)}\Delta x\\
&= \int_{1/3}^{1/2}\frac{\sqrt{9x-2}}{[(3x-1)^2+2]}dx.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.29. Exprese el límite

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2n+4i}{(2n^2+4in+4i^2)}$$

como una integral definida en el intervalo $[2;6]$.

Solución. En vista que $\Delta x = \dfrac{4}{n}$ y $x_i = 2 + \dfrac{4i}{n}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2n+4i}{(2n^2+4in+4i^2)} &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2+\frac{4i}{n}}{4\left(2+\frac{4i}{n}+4\frac{i^2}{n^2}\right)}\cdot\frac{4}{n}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2+\frac{4i}{n}}{\left(8+\frac{16i}{n}+16\frac{i^2}{n^2}\right)}\cdot\frac{4}{n}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2+\frac{4i}{n}}{\left(4+\frac{16i}{n}+16\frac{i^2}{n^2}\right)+4}\cdot\frac{4}{n}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2+\frac{4i}{n}}{\left(2+\frac{4i}{n}\right)^2+4}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{(x_i)^2+4}\\
&= \int_{2}^{6}\frac{x}{x^2+4}dx.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.30. Utilizando sumas de Riemann, calcule la siguiente integral

$$\int_{-2}^{2}\left(3^{-x+1}+2(x+2)^2\right)dx.$$

Solución. Tenemos que $\Delta x = \dfrac{2-(-2)}{n} = \dfrac{4}{n}$ y $t_k = -2 + \dfrac{4k}{n}$. Además,

$$\begin{aligned} f(t_k) &= 3^{-(-2+\frac{4}{n}k)+1} + 2\left(-2 + \frac{4k}{n} + 2\right)^2 \\ &= 3^{3-\frac{4}{n}k} + 2\left(\frac{16k^2}{n^2}\right) \\ &= \left(3^{-\frac{4}{n}}\right)^k \cdot 3^3 + 32\frac{k^2}{n^2} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\left(3^{-\frac{4}{n}}\right)^k \cdot 3^3 + 32\frac{k^2}{n^2}\right)\frac{4}{n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{3^3\cdot 4}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(3^{-\frac{4}{n}}\right)^k + \frac{128}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{3^3\cdot 4}{n}\left(\frac{3^{-\frac{4}{n}}(1-3^{-4})}{1-3^{-\frac{4}{n}}}\right) + \frac{128}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\right] \\ &= \left[\frac{80}{3\ln(3)} + \frac{128}{3}\right]. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.31. Utilizando sumas de Riemann, evalúe:

$$\int_1^2 \left[(x-1)^2 + 4^{3x+1}\right] dx.$$

Solución. Tenemos que $\Delta x = \dfrac{2-1}{n} = \dfrac{1}{n} \ \wedge \ t_k = 1 + \dfrac{k}{n}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f(t_k) = \left(1 + \frac{k}{n} - 1\right)^2 + 4^{3\left(1+\frac{k}{n}\right)+1} \\ &\Rightarrow f(t_k) = \frac{k^2}{n^2} + 4^{4+\frac{3k}{n}} = \frac{k^2}{n^2} + 4^4\cdot 4^{\frac{3k}{n}} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left[(x-1)^2 + 4^{3x+1}\right] dx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2} + 4^{4+\frac{3k}{n}}\right)\frac{1}{n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n^3}\right) + \frac{4^4}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(4^{\frac{3}{n}}\right)^k\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{256}{n}\left(\frac{4^{\frac{3}{n}}(1-4^3)}{1-4^{\frac{3}{n}}}\right)\right] \\ &= \frac{1}{3} + 256\cdot 63\cdot \frac{1}{6\ln 2} = \frac{1}{3} + \frac{2688}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.32. Exprese el límite

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n+i}{i^2+2ni+6n^2}\right)$$

como una integral definida en el intervalo $[1,2]$.

Solución. Vemos que $\Delta x=\dfrac{1}{n}$ y $x_i=1+\dfrac{i}{n}$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(n+i)}{i^2+2ni+6n^2}\right)&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\frac{n+i}{n^2}}{\frac{i^2}{n^2}+\frac{2i}{n}+6}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{1+\frac{i}{n}}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+5}\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f\left(1+\frac{i}{n}\right)=\int_1^2\frac{x}{x^2+5}dx.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.33. Exprese el siguiente límite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen}\left(\frac{55\pi}{7}+\frac{8\pi}{n}i\right)$$

como una integral definida en el intervalo $[\pi,2\pi]$.

Solución. Observamos que $\Delta x=\dfrac{\pi}{n}$ y $x_i=\pi+\dfrac{\pi}{n}i$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{5\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen}\left(\frac{55\pi}{7}+\frac{8\pi}{n}i\right)&\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi}{n}\cdot 5\left[\operatorname{sen}\left(8\left(\pi+\frac{\pi}{n}i\right)-\frac{\pi}{7}\right)\right]\\&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi}{n}\cdot f\left(\pi+\frac{\pi}{n}i\right)=\int_\pi^{2\pi}f(x)dx\\&=\int_\pi^{2\pi}5\operatorname{sen}\left(8x-\frac{\pi}{7}\right)dx.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.34. Exprese

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{n(n+i)}}{i^2+2ni+4n^2}\right)$$

como una integral definida en el intervalo $I=[1,2]$.

Solución. Puesto que $\Delta x=\dfrac{1}{n}$ y $x_i=1+\dfrac{i}{n}$, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{n(n+i)}}{i^2+2ni+4n^2}\right)&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\frac{\sqrt{n(n+i)}}{n^2}}{\frac{i^2}{n^2}+\frac{2i}{n}+4}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{i}{n}}}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+3}\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f\left(1+\frac{i}{n}\right)=\int_1^2\frac{\sqrt{x}}{x^2+3}dx.\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos 2.2.1.

1. Usando sumas de Riemann, determine el valor de las siguientes integrales definidas:

   a) $\displaystyle\int_0^2 \left(x^3 - 2x^2\right) \mathrm{d}x$

   b) $\displaystyle\int_1^2 3e^{-x+4}dx$

   c) $\displaystyle\int_{-1}^3 \left(x^3 + 1 + 2^x\right) dx$

   d) $\displaystyle\int_2^4 \left(x^3 - 2x + 1\right) dx$

   e) $\displaystyle\int_0^1 \left(3^{2x} + 1\right) \mathrm{d}x$

   f) $\displaystyle\int_{-3}^1 \left(x^2 + 2x - e^x\right) dx$

   g) $\displaystyle\int_{-1}^2 \left(4^x + 9x^2\right) dx$

   h) $\displaystyle\int_1^2 (x+4)^2 dx$

   i) $\displaystyle\int_0^3 \left(x^2 - x\right) dx$

   j) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(x + 4^{2x}\right) dx$

2. Exprese los siguientes límites como una integral definida, en el intervalo que se indica.

   a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(5 + \frac{2i}{n}\right)$, $I = [0, 1]$.

   b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[3\ln\left(\sqrt[n]{2n^2 + 9i^2}\right) - 6\ln\left(\sqrt[2n]{6in + 5n^2}\right)\right]$, $I = [-1; 2]$.

   c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{5\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} \tan\left(\frac{55\pi}{7} + \frac{8\pi}{n} i\right)$, $I = [\pi; 2\pi]$.

3. Eligiendo un intervalo adecuado, exprese como una integral definida los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2}{3(1+n^2)} + \frac{n+4}{3(4+n^2)} + \frac{n+6}{3(9+n^2)} + \ldots + \frac{3n}{3(n^2+n^2)}\right)$

   b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\ln(8k^2 + 2kn + 3n^2)^{1/n} - \ln(4k^2 + 6kn + n^2)^{1/n}\right]$

   c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{2n^4 - (kn)^2}}$

   d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{3n + k}$

   e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{5in^5}{(n+i)^7}$

   f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[2 - e^{-1-\frac{3}{n}i}\right] \frac{3}{2n}$

2.2.2. Interpretación geométrica de la integral definida

Hasta el momento, podemos concluir que la expresión de $\int_a^b f(x)\,dx$ presentada en la ecuación (2.10) es esencialmente equivalente a las ecuaciones (2.6) y (2.7) de la sección 2.1.3 para el caso general de calcular el área bajo la curva $y = f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$. En cierto sentido, esta afirmación es correcta; sin embargo, la Definición 2.7 (Límite de una suma de Riemann) representa un concepto más amplio ya que, como se ha mencionado anteriormente, no es necesario que f sea continua en $[a, b]$ o que $f(x) \geq 0$ en el intervalo. Por lo tanto, una integral definida no está limitada a representar específicamente un área. Entonces, ¿qué implica exactamente una integral definida? En este momento, debemos aceptar que una integral definida es simplemente un número real. A diferencia con la integral indefinida, que es una función (o una familia de funciones).

Teorema 2.3: El área como integral definida.

Si f es una función continua y no negativa sobre un intervalo $[a, b]$, entonces el área de la región $\mathcal{R}$, acotada por la gráfica de la función, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$\text{Área} = A(\mathcal{R}) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (2.12)$$

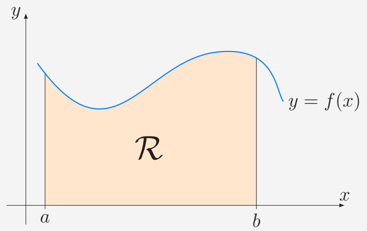


Figura 2.18: Área de la región $\mathcal{R}$.

Ejemplo 2.35. Halle el área de la región acotada por la gráfica de $f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

Solución. Graficando se observa que la región bajo la gráfica puede dividirse en dos. Así, la integral definida se puede calcular utilizando fórmulas básicas de geometría.

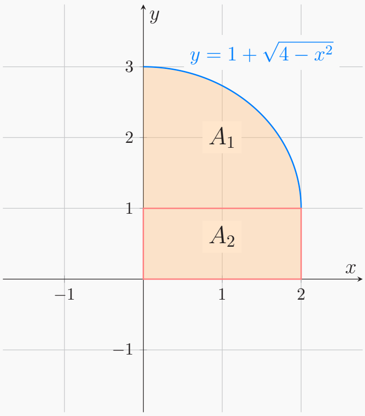


Figura 2.19: Región limitada.

Por la Figura 2.19, tenemos que el área de la región es

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^2 f(x)dx \\ &= \int_0^2 (1 + \sqrt{4 - x^2})dx \\ &= A_1 + A_2 \\ &= \frac{2^2\pi}{4} + 1 \cdot 2 \\ &= \pi + 2 \text{ unidades cuadradas.} \end{aligned}$$

En general, la expresión $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área, con su respectivo signo, de la región delimitada por la curva $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a, b]$. Esto implica que se asigna un signo positivo a las áreas ubicadas por encima del eje x, mientras que se asigna un signo negativo a las áreas situadas por debajo del eje x. Si A_{arriba} y A_{abajo} son como se ilustran en la Figura 2.20, matemáticamente, esto se expresa como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_{\text{arriba}} - A_{\text{abajo}}.$$

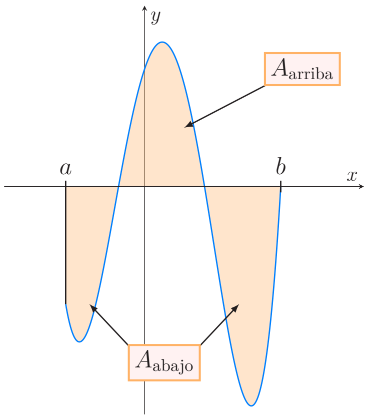


Figura 2.20: Función positiva y negativa sobre el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 2.36. Usando interpretación geométrica de la integral definida, determine

$$\int_{-5}^{5} f(x)dx, \quad \text{donde } f(x) = \begin{cases} |x+2| - 1 & , -5 \leq x < -1 \\ \sqrt{3 - x^2 + 2x} & , -1 \leq x < 3 \\ -\sqrt{4 - (x-5)^2} & , 3 \leq x \leq 5 \end{cases}.$$

Solución. Graficando la función f,

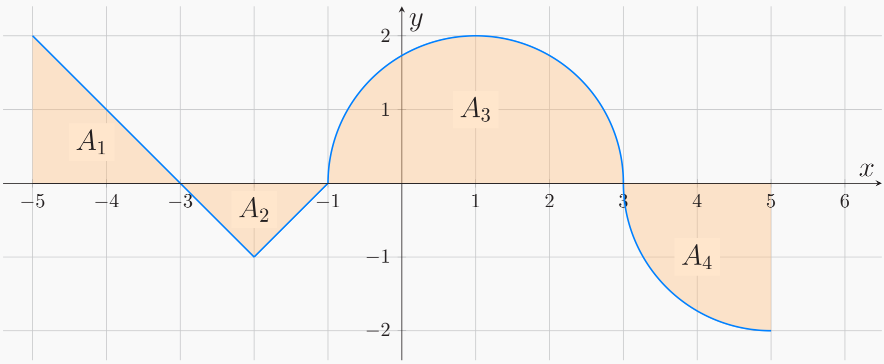


Figura 2.21: Región sombreada.

tenemos que la integral definida está dada por:

$$\begin{aligned} \int_{-5}^{5} f(x)dx &= A_1 - A_2 + A_3 - A_4 \\ &= \frac{2\cdot 2}{2} - \frac{2\cdot 1}{2} + \frac{\pi \cdot 2^2}{2} - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \\ &= 1 + \pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.37. A partir de la gráfica de la función f, calcule:

$$\int_{-8}^{6} f(x)dx.$$

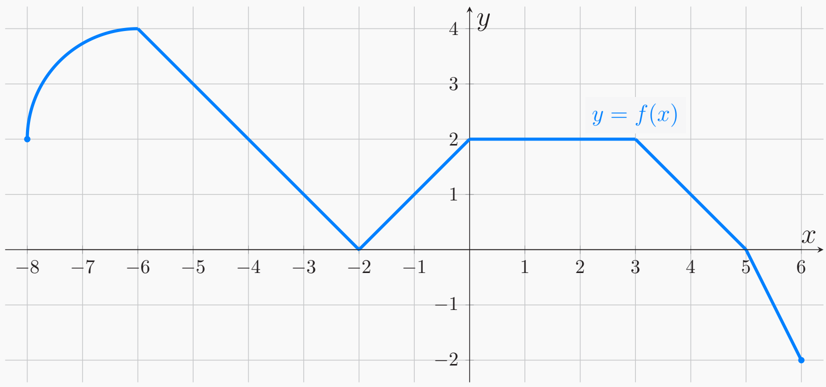


Figura 2.22: Gráfica de la función del ejemplo 2.37.

Solución. Reconociendo la región en el intervalo $[-8, 6]$,

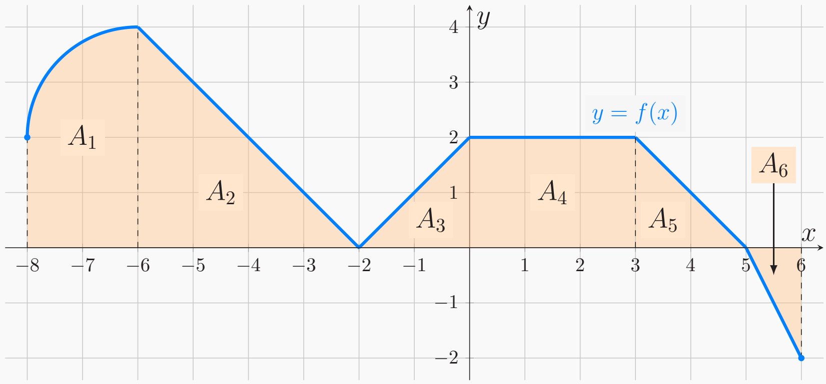


Figura 2.23: Región sombreada.

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{-8}^{6} f(x)dx &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 - A_6\\ &= (\pi + 4) + 8 + 2 + 6 + 2 - 1\\ &= 21 + \pi.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.38. Se muestra la gráfica de f, a partir de ella, calcule:

$$\int_{-7}^{5} f(x)dx.$$

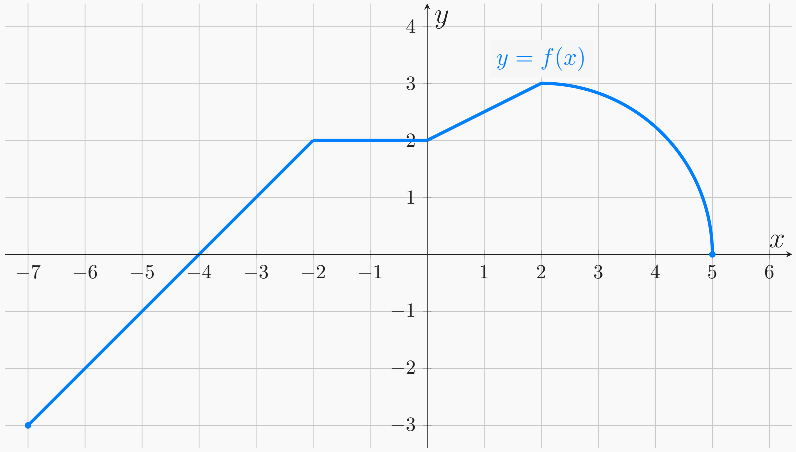


Figura 2.24: Gráfica de la función del ejemplo 2.38.

Solución. Identificando las regiones,

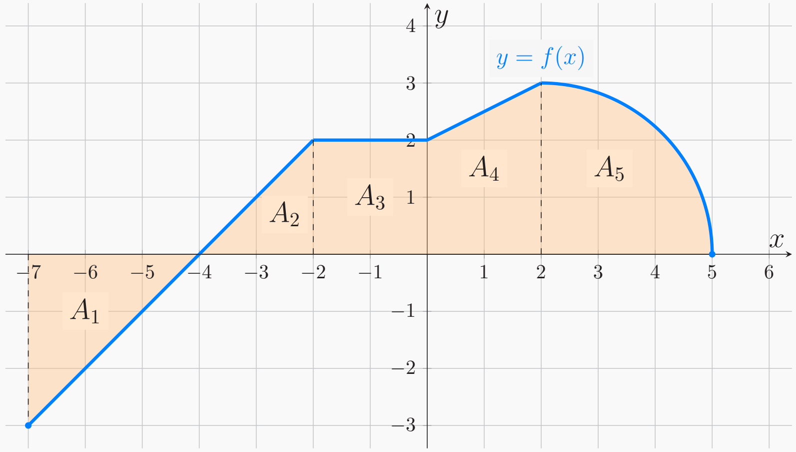


Figura 2.25: Región sombreada.

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{-7}^{5} f(x)dx &= -A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 \\ &= -\frac{9}{2} + 2 + 4 + 5 + \frac{9\pi}{4} \\ &= \frac{13}{2} + \frac{9\pi}{4}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.39. A partir de la gráfica de f, calcule:

$$\int_{-8}^{7} f(x)dx.$$

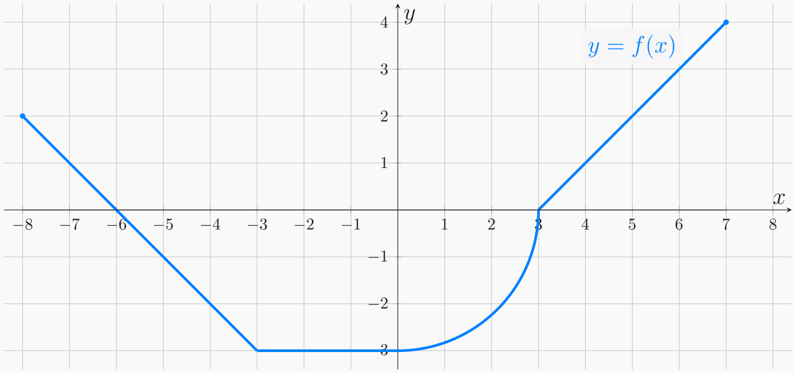


Figura 2.26: Gráfica de la función del ejemplo 2.39.

Solución. Identificando las regiones,

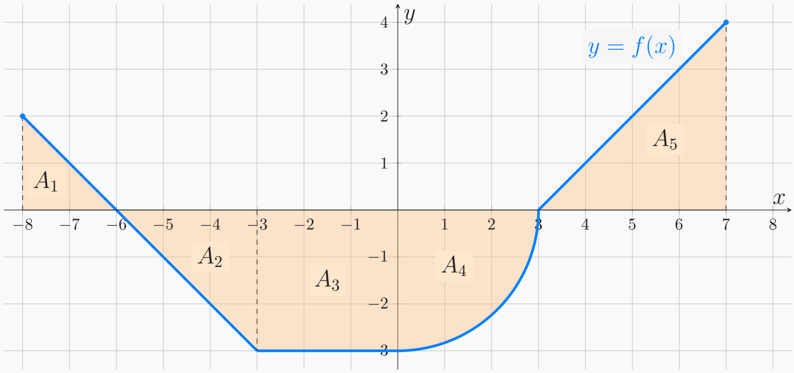


Figura 2.27: Región sombreada.

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{-8}^{7} f(x)dx &= A_1 - A_2 - A_3 - A_4 + A_5 \\ &= 2 - \frac{9}{2} - 9 - \frac{9\pi}{4} + 8 \\ &= -\left(\frac{7}{2} + \frac{9\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos 2.2.2.

1. Usando interpretación geométrica, calcule la siguiente integral: $\displaystyle\int_{-5}^{4} f(x)dx$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , \quad -5 \leq x < -3 \\ \sqrt{9-x^2}+2 & , \quad -3 \leq x < 3 \\ 8-2x & , \quad 3 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

2. A partir de la gráfica de cada función, calcule la integral indicada:

   a) $\displaystyle\int_{-4}^{8} f(x)dx$

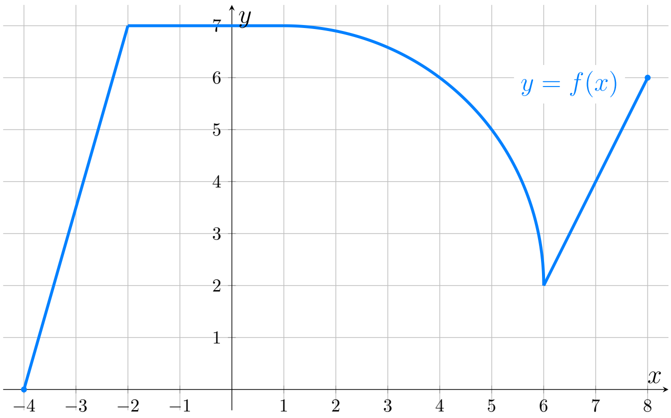


Figura 2.28

   b) $\displaystyle\int_{-5}^{12} f(x)dx$

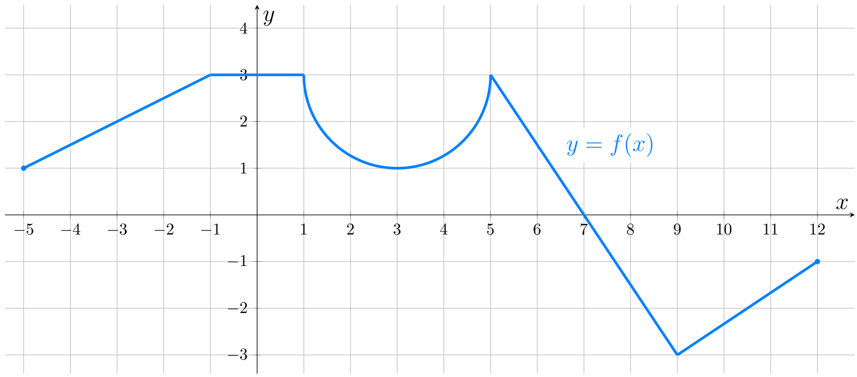


Figura 2.29

2.2.3. Propiedades de la integral definida

A continuación, examinaremos algunas propiedades importantes de la integral definida.

Propiedad 2.3. Propiedad de lo límites de integración.

(i) Si f está definida en $x = a$, entonces $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$.

(ii) Si f es integrable en $[a, b]$, entonces $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Ejemplo 2.40. Evalúe las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_2^2 (x^4 + 2x^2)dx$

(b) $\displaystyle\int_2^0 \left(1 + \sqrt{4 - x^2}\right) dx$

Solución.

(a) Por la parte (i) de la propiedad 2.3, se tiene que $\displaystyle\int_2^2 (x^4 + 2x^2)dx = 0$.

(b) Del inciso (ii) de la propiedad 2.3, se tiene

$$\int_2^0 \left(1 + \sqrt{4 - x^2}\right) dx = -\int_0^2 \left(1 + \sqrt{4 - x^2}\right) dx$$

y por el ejemplo 2.30, se concluye $\displaystyle\int_2^0 \left(1 + \sqrt{4 - x^2}\right) dx = -(\pi + 2)$.

Propiedad 2.4. Propiedad de linealidad.
Si f y g son funciones integrables en $[a, b]$, entonces

(i) $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, donde k es cualquier constante real.

(ii) $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

Esta propiedad se generaliza para cualquier suma finita de funciones integrables sobre el intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \int_a^b f_3(x)dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)dx.$$

Propiedad 2.5. Propiedad aditiva para intervalos.
Si $c \in [a, b]$ y f es integrable sobre $[a, b]$ entonces f es integrable sobre $[a, c]$ y sobre $[c, b]$, y se verifica la siguiente igualdad

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

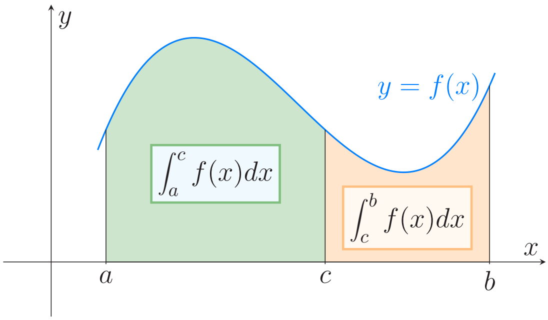


Figura 2.30: Propiedad aditiva.

Esta propiedad se extiende para cualquier número finito de números $a, b, c_1, c_2, ..., c_n$ en el intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx + \cdots + \int_{c_n}^{b} f(x)dx.$$

Propiedad 2.6. Integral definida de una constante.
Para una función constante $f(x) = k$, se cumple

$$\int_a^b kdx = k\int_a^b dx = k(b-a).$$

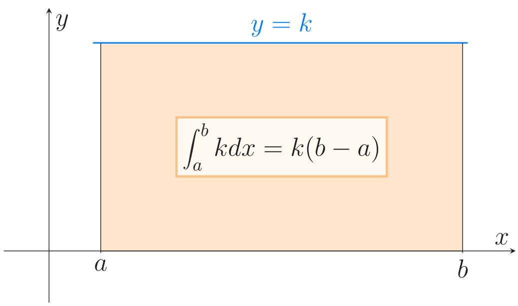


Figura 2.31: Si $k > 0$, el área bajo la gráfica es $k(b-a)$.

Propiedad 2.7. Propiedad de Comparación.

(i) Si f es una función integrable y no negativa en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx.$$

(ii) Si f y g son funciones integrables en $[a, b]$, si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces se cumple la siguiente desigualdad

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

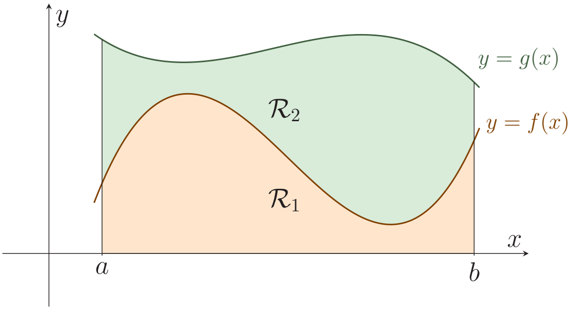


Figura 2.32: área $\mathcal{R}_1 \leq$ área $\mathcal{R}_2$.

Propiedad 2.8. Propiedad de Acotamiento.
Sea f una función integrable en $[a,b]$, si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Ejemplo 2.41. Verifique que se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{4}{\sqrt{41}} \leq \int_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx \leq \frac{4}{5}.$$

Solución. Vemos que: $x^2+2x+26 = (x+1)^2+25$. Entonces $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^2+25}}$.
Como $x \in [-1,3]$, tenemos

$$\begin{aligned} -1 \leq x \leq 3 &\Longrightarrow 25 \leq (x+1)^2+25 \leq 41 \\ &\Longrightarrow 5 \leq \sqrt{(x+1)^2+25} \leq \sqrt{41} \\ &\Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt{41}}}_{m} \leq \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+25}} \leq \underbrace{\frac{1}{5}}_{M} \end{aligned}$$

Finalmente, por la propiedad de acotamiento, tenemos

$$\frac{4}{\sqrt{41}} \leq \int_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+25}}dx \leq \frac{4}{5}.$$

Ejemplo 2.42. Verifique que se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{2\sqrt{7}}{7} \leq \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+4}}dx \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Solución. Tenemos que $x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3$, entonces

$$\begin{aligned} x \in [-1,1] \Rightarrow & -1 \leq x \leq 1 \\ & -2 \leq x - 1 \leq 0 \\ & 0 \leq (x-1)^2 \leq 4 \\ & 3 \leq (x-1)^2 + 3 \leq 7 \\ & \sqrt{3} \leq \sqrt{(x-1)^2+3} \leq \sqrt{7} \\ & \frac{1}{\sqrt{7}} \leq \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+3}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Luego, por la propiedad 2.8, se verifica

$$\frac{2\sqrt{7}}{7} \leq \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+3}} dx \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ejemplo 2.43. Verifique que se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{2}{\sqrt{3}+2\ln 2} \leq \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\ln(x+2)} dx \leq \frac{2}{1+\ln(2)}.$$

Solución. Analizando, tenemos

- $x \in [0,2] \Longrightarrow 0 \leq x \leq 2 \Longrightarrow 2 \leq x+2 \leq 4 \Rightarrow \ln(2) \leq \ln(x+2) \leq \ln(4)$
- $x \in [0;2] \Longrightarrow 0 \leq x \leq 2 \Longrightarrow 1 \leq x+1 \leq 3 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x+1} \leq \sqrt{3}.$

Luego,

$$\begin{aligned} & 1 + \ln 2 \leq \ln(x+2) + \sqrt{x+1} \leq \sqrt{3} + 2\ln 2 \\ & \frac{1}{\sqrt{3}+2\ln(2)} \leq \frac{1}{\ln(x+2)+\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{1+\ln(2)} \\ & \frac{1}{\sqrt{3}+2\ln(2)}(2-0) \leq \int_0^2 \frac{1}{\ln(x+2)+\sqrt{x+1}} dx \leq \frac{1}{1+\ln(2)}(2-0) \\ & \frac{2}{\sqrt{3}+2\ln(2)} \leq \int_0^2 \frac{1}{\ln(x+2)+\sqrt{x+1}} dx \leq \frac{2}{1+\ln(2)}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.44. Verifique que se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+e} \leq \int_0^1 \frac{1}{e^x + \sqrt{x^2+1}} dx \leq \frac{1}{2}.$$

Solución. Según el dominio, acotemos la función e^x:

$$\begin{aligned} x \in [0,1] & \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \\ & \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e. \end{aligned}$$

Luego, hacemos lo mismo par la función $\sqrt{x^2+1}$

$$\begin{aligned} x \in [0,1] &\Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow 1 \leq x^2+1 \leq 2 \\ &\Rightarrow 1 \leq \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} &2 \leq e^x + \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{2} + e \\ \Rightarrow &\frac{1}{\sqrt{2}+e} \leq \frac{1}{e^x+\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{2}+e} \leq \int_0^1 \frac{1}{e^x+\sqrt{x^2+1}} dx \leq \frac{1}{2}.$$

Propiedad 2.9. Propiedad de simetría.
Sea f una función continua en $\mathbb{R}$. Tenemos que

(i) si f es una función par, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

(ii) si f es una función impar, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

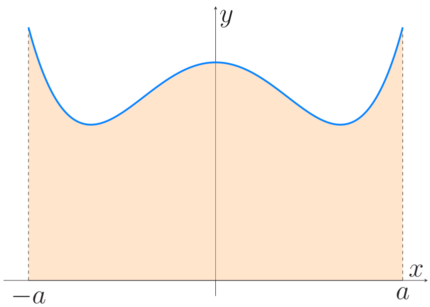


Figura 2.33: Función par.

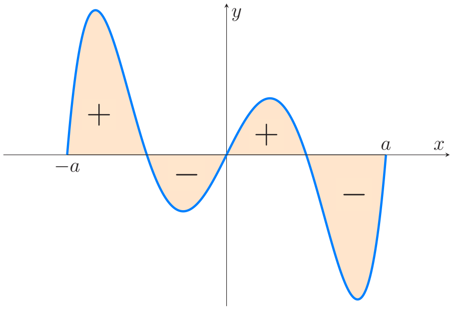


Figura 2.34: Función impar.

Ejemplo 2.45. Usando las propiedades e interpretación geométrica de la integral definida, evalúe la siguiente integral:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(x^7 \cos x + \sqrt[9]{\tan x} + e^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{sen} x + \sqrt{\frac{\pi^2}{16} - x^2} \right) dx.$$

Solución. Sea $h(x) = x^7 \cos x + \sqrt[9]{\tan x} + e^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{sen} x$ una función impar. En efecto,

$$\begin{aligned} h(-x) &= (-x)^7 \cos(-x) + \sqrt[9]{\tan(-x)} + e^{\operatorname{sen}^2(-x)} \operatorname{sen}(-x) \\ &= -x^7 \cos x - \sqrt[9]{\tan x} - e^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{sen} x = -h(x) \end{aligned}$$

Entonces $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} h(x)dx = 0$. Así,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(h(x) + \sqrt{\frac{\pi^2}{16} - x^2} \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} h(x)dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi^2}{16} - x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi^2}{16} - x^2} dx.$$

Por otro lado, vemos que $y = \sqrt{\frac{\pi^2}{16} - x^2}$ es la parte superior de una circunferencia de radio $\frac{\pi}{4}$ y centro en el origen, cuya ecuación es

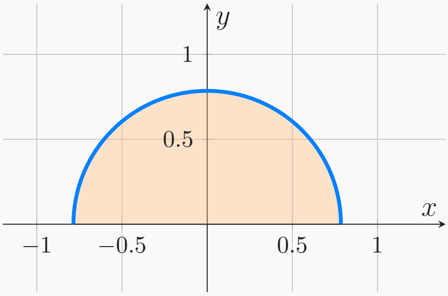


Figura 2.35

Finalmente,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(x^7 \cos x + \sqrt[9]{\tan x} + e^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{sen} x + \sqrt{\frac{\pi^2}{16} - x^2} \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi^2}{16} - x^2} dx = \frac{\pi^3}{32}.$$

Teorema de Valor Medio para Integrales

En muchas ocasiones, resulta útil conocer el valor medio de una función continua en un intervalo por motivos de comparación. Por ejemplo, podemos querer calcular la temperatura promedio durante un día determinado, la intensidad promedio de la luz solar en un mes, entre otros casos similares. El valor medio de una función es una extensión del concepto de promedio aplicado a un conjunto finito de números. Por ejemplo, si deseamos calcular el promedio de las alturas de cinco estudiantes, cuyas alturas son $150, 160, 170, 180$ y 190 centímetros respectivamente, podemos calcularlo como:

$$\frac{150 + 160 + 170 + 180 + 190}{5} = 170 \text{ centímetros.}$$

Ahora consideremos una función continua f definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Si tomamos n valores de esta función, digamos $f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n)$, el promedio de estos valores puede expresarse como:

$$\frac{f(c_1) + f(c_2) + \ldots + f(c_n)}{n}.$$

Para relacionar este promedio con la integral definida, dividimos el intervalo $[a, b]$ en subintervalos regulares $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Luego, consideramos cada punto c_i en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Esto nos lleva a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\frac{f(c_1)+f(c_2)+\ldots+f(c_n)}{n} &= \frac{1}{b-a}\left[f(c_1)\frac{b-a}{n}+f(c_2)\frac{b-a}{n}+\ldots+f(c_n)\frac{b-a}{n}\right]\\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x.\end{aligned}$$

Notemos que la suma $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ es una suma de Riemann de f en el intervalo $[a, b]$. Cuando n tiende a infinito, esta suma converge a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Este resultado nos lleva a la siguiente definición.

Definición 2.8: Valor promedio.

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. El valor medio (V. M.) o valor promedio de f en el intervalo $[a, b]$ se define como:

$$\text{V. M.} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Supongamos que f es una función continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces, podemos afirmar que f alcanza un valor mínimo m y un valor máximo M en dicho intervalo, por ejemplo en los puntos $x = l$ y $x = u$, respectivamente,

$$m = f(l) \leq f(x) \leq f(u) = M \quad \text{para cualquier } x \text{ en } [a, b].$$

Luego, por la propiedad 2.8, tenemos que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Por tanto,

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Como f es una función continua, sabemos que según el Teorema de Valor Intermedio; existe un punto $c \in]a, b[$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Es decir, $\int_a^b f(x)dx$ es igual al área $(b-a)f(c)$ de un rectángulo cuyo ancho de la base es $b-a$ y su altura es $f(c)$ para algún valor c entre a y b. Después de este análisis, enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 2.4: El Teorema de Valor Medio para integrales.

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces existe un número c de $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Geométricamente, esto significa que hay al menos un punto c en el intervalo $[a, b]$ donde la altura de la función $f(x)$ es igual a la altura del rectángulo cuya área es igual al área bajo la curva de $f(x)$ en ese intervalo. En otras palabras, el rectángulo con base $[a, b]$ y altura igual al valor promedio de $f(x)$ en ese intervalo tiene una intersección con la gráfica de $f(x)$ en al menos un punto c.

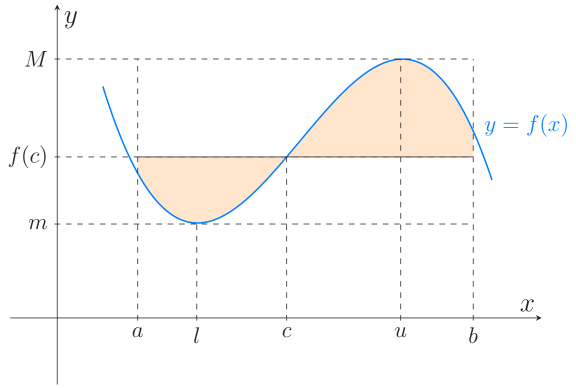


Figura 2.36: Rectángulo de valor medio: $f(c)(b-c) = \int_a^b f(x)dx$.

Ejemplo 2.46. Un automóvil recorre una carretera durante 3 horas, a una velocidad de $v(t) = t^3 + 2t^2 + t$ km/h. ¿Cuál es la velocidad media durante las 2 primeras horas?

Solución. Para hallar la velocidad media durante las 2 primeras horas, debemos encontrar el valor promedio de $v(t)$ en el intervalo $[0, 2]$,

$$\begin{aligned}
\text{V.M.} &= \frac{1}{2-0}\int_0^2 (t^3 + 2t^2 + t)dt \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{2i}{n}\right)^3 + 2\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + \frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8i^3}{n^3} + \frac{8i^2}{n^2} + \frac{2i}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right) \\
&= \frac{17}{3} \approx 5.67\text{Km/h}.
\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos 2.2.3.

1. Verifique que se cumplen las siguientes desigualdades:

   a) $\frac{2}{\sqrt{2}} \leq \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} \leq 2$

   b) $\frac{3}{4} \leq \int_{1}^{2}\frac{xdx}{1+\text{sen}^2(\pi x)} \leq \frac{3}{2}$

c) $\dfrac{2}{3} \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Sabiendo que $\displaystyle\int_0^1 3^x dx = \frac{2}{\ln(3)}$. Verifique que se cumple:

$$\frac{1}{\ln(3)} \leq \int_0^1 \frac{3^x}{\sqrt{x}+1} dx \leq \frac{2}{\ln(3)}$$

3. Sea $h(x)$ una función continua en $[1,2]$ y $1 \leq h(x) \leq 2$ para todo $x \in [1,2]$. Verifique que se cumple:

$$\frac{1}{3} \leq \int_1^2 \frac{h(x)}{\operatorname{sen}^2(3x+1)+2} dx \leq 1.$$

4. La temperatura en determinada ciudad entre las 6 a.m. y 3 p.m. está dada por

$$T(t) = 0.06t^2 + t + 20\ ^\circ C,$$

donde t es el número de horas transcurridos desde las 6 a.m.

a) ¿Cuál es la temperatura promedio entre las 6 a.m. y 3 p.m.?

b) ¿A qué hora aproximadamente se tenía la temperatura promedio?

2.2.4. Teoremas Fundamentales del Cálculo

En esta sección exploraremos los Teoremas Fundamentales del Cálculo. Estos teoremas establecen una conexión entre los procesos de diferenciación e integración, donde la integración puede deshacer el efecto de la diferenciación y viceversa, proporcionando una perspectiva más completa sobre cómo estas operaciones se complementan entre sí en el análisis de funciones.

Supongamos que f es una función continua y no negativa definida en el intervalo $[a,b]$. Si x es cualquier número en $[a,b]$, pongamos

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

(Usamos la variable ficticia t porque estamos utilizando x para denotar el límite superior de integración). Dado que f es no negativa, podemos interpretar $A(x)$ como el área de la región bajo la gráfica de f en $[a,x]$, como se muestra en la Figura 2.37. Dado que el número $A(x)$ es único para cada x en $[a,b]$, vemos que A es una función de x con dominio $[a,b]$.

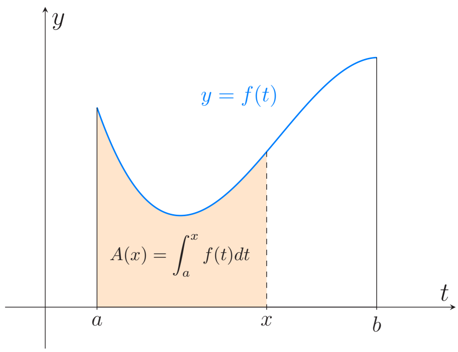


Figura 2.37: $A(x)$ como área.

Veamos un ejemplo específico. Supongamos que $f(x) = x$ en el intervalo $[0,1]$. Si usamos la Figura 2.38, con $a = 0$ y $b = x$, obtenemos

$$A(x) = \int_0^x t dt = \frac{1}{2}x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Este resultado es evidente si se interpreta la integral como el área del triángulo sombreado. Además, si derivamos la función A, observamos que

$$A'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x t dt = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x = f(x)$$

entonces $A(x)$ es una antiderivada de $f(x)$. Este ejemplo nos proporciona un vínculo entre los procesos de diferenciación e integración.

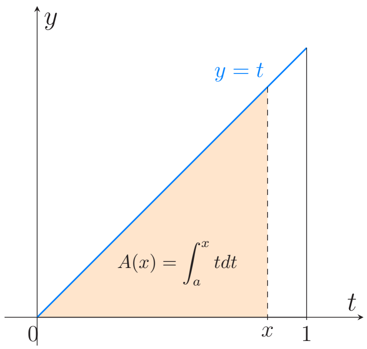


Figura 2.38: Área del triángulo $A(x) = \frac{x^2}{2}$.

Teorema 2.5: Primer Teorema Fundamental.

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la función F definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \le x \le b$$

es diferenciable en $]a, b[$ y

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Demostración.

Fijando x en $]a, b[$ y supongamos que $x + h$ también está en $]a, b[$, donde $h \neq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt \end{aligned}$$

Por el Teorema del Valor Medio para Integrales, existe un número c entre x y $x + h$ tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c) \cdot h$$

Por lo tanto,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \frac{f(c) \cdot h}{h} = f(c).$$

Observemos que a medida que h se aproxima a 0, el número c, que se encuentra entre x y $x + h$, se aproxima a x, y por continuidad, $f(c)$ tiende a $f(x)$. Finalmente,

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{h \to 0} f(c) = f(x).$$

Ejemplo 2.47. Encuentre la derivada de la función:

$$F(x) = \int_2^x (t^2 + 4t - 1)dt.$$

Solución. Como el integrando es una función polinomial $f(t) = t^2 + 4t - 1$ es continua en todo $\mathbb{R}$. Luego, usando el teorema anterior, se tiene

$$F'(x) = \frac{d}{dt}\int_2^x (t^2 + 4t - 1)dt = x^2 + 4x - 1.$$

Ejemplo 2.48. Sea F una función definida por

$$F(x) = \int_0^x x^2 \cos(t^2)dt.$$

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto $(0, 0)$.

Solución. Como ya se tiene el punto de paso, solo falta encontrar la pendiente de la recta tangente. Primero observamos que

$$F(x) = x^2 \int_0^x \cos(t^2)dt.$$

Luego, derivando con respecto de x, se obtiene

$$F'(x) = 2x\int_0^x \cos(t^2)dt + x^2\frac{d}{dt}\int_0^x \cos(t^2)dt = 2x\int_0^x \cos(t^2)dt + x^2\cos(x^2).$$

Entonces $F'(0) = 0$. Finalmente, la ecuación de la recta tangente es

$$\mathcal{L}_T : y = 0.$$

Ejemplo 2.49. Sea f una función diferenciable en $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = -2 + \int_0^x e^{t-x} f(t)dt.$$

Verifique si la derivada $f'(x)$ es una función constante para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución. Tenemos que

$$f(x) = -2 + e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$$

Derivando

$$f'(x) = -e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt + e^{-x}e^x f(x) = -\int_0^x e^{t-x} f(t)dt + f(x)$$

Luego,

$$f'(x) = -\int_0^x e^{t-x} f(t)dt - 2 + \int_0^x e^{t-x} f(t)dt = -2.$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = -2 \ \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Corolario 2.1

Si f es una función continua en $[a,b]$, g es una función diferenciable en $[a,b]$ y

$$G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt,$$

entonces

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt = f(g(x))\frac{d}{dx}(g(x)).$$

Ejemplo 2.50. Si g es una función derivable tal que $g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y

$$\int_3^{2x+3} f\left(t^2-3\right) dt = g\left(\cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right)\right) + 2\ln\left(4x+5\right).$$

Halle $f\left(1\right)$.

Solución. Derivando respecto de x,

$$f\left((2x+3)^2-3\right)(2) = g'\left(\cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right)\right)\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{3}\right)\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{8}{4x+5}$$

Haciendo $(2x+3)^2-3=1$ para encontrar el valor de x adecuado. Luego, resolviendo

$$4x^2+12x+5=0$$

obtenemos $x=-\frac{1}{2}$ y $x=-\frac{5}{2}$. Finalmente, quedándonos con el valor de $x=-\frac{1}{2}$, se tiene

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{2}\left[-g'\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\frac{2\pi}{3}+\frac{8}{3}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[-g'\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\frac{2\pi}{3}+\frac{8}{3}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{2\pi}{3}+\frac{8}{3}\right] \\ &= \frac{\pi}{6}+\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.51. Sea F una función definida por $F(x) = \int_1^{\arctan x} \ln(\tan t)\,dt$.

a) Halle el dominio de F.

b) Halle la ecuación de la recta tangente a F en $(\tan 1, 0)$.

c) Si $G(x) = \int_{x^2}^{1} F(u)\,du$, determine $G''\left(\sqrt{\tan(1)}\right)$.

Solución.

a) Es sabido que $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$. Luego, analizamos la función $f(t) = \ln(\tan t)$ en el intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Para que f esté bien definida, tenemos que

$$\tan t > 0$$

esto sucede cuando $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Por lo que, la función f está definida en $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ y es continua en este intervalo. Finalmente, $0 < \arctan x < \frac{\pi}{2}$, esto es,

$$\operatorname{Dom}(F) =]0, +\infty[.$$

b) Por el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene

$$F'(x) = \ln(\tan(\arctan x)) \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{\ln x}{1+x^2} = 0.$$

Luego, la pendiente de la recta tangente a F en $(\tan(1), 0)$ es

$$m = F'(\tan(1)) = \frac{\ln(\tan(1))}{1+\tan^2(1)} = \frac{\ln(\tan(1))}{\sec^2(1)}$$

Así, la ecuación de la recta tangente está dada por:

$$\mathcal{L}_T : y = \frac{\ln(\tan(1))}{\sec^2(1)} (x - \tan(1)).$$

c) Derivando la función G, se tiene:

$$G'(x) = -F(x^2)(2x) \Longrightarrow G''(x) = -F'(x^2)(4x^2) - F(x^2)(2).$$

Es decir,

$$G''(x) = -\frac{4x^2 \ln(x^2)}{1+x^4} - 2\int_1^{\arctan x^2} \ln(\tan t)\, dt$$

Luego, evaluando en $x = \sqrt{\tan(1)}$, tenemos que la primera derivada es

$$G'\left(\sqrt{\tan(1)}\right) = -\underbrace{F(\tan(1))}_{0} \cdot \left(2\sqrt{\tan(1)}\right) = 0.$$

Consecuentemente,

$$G''\left(\sqrt{\tan(1)}\right) = -\frac{4\tan(1)\ln(\tan(1))}{1+\tan^2(1)}.$$

Teorema 2.6: Segundo Teorema Fundamental.

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

donde F es cualquier antiderivada de f, esto es, $F' = f$.

El Teorema 2.6, es una consecuencia del Primer Teorema Fundamental del Cálculo. Este teorema nos indica cómo evaluar una integral definida al encontrar una función antiderivada del integrando, evitando la necesidad de evaluar el límite de una suma de Riemann. Esto simplifica considerablemente el proceso.

Importante.

(i) Al calcular la integral definida de una función f en el intervalo $[a,b]$, se emplea la siguiente notación:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

donde F representa cualquier antiderivada de f en el intervalo $[a,b]$.

(ii) Cuando se determina la integral definida de una función f en el intervalo $[a,b]$, no es necesario considerar la constante de integración C, ya que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= [F(x)+C]_a^b = (F(b)+C) - (F(a)+C)\\ &= F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.52. Evalúe las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{3}(3x^2+5x-1)dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$ (c) $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$

Solución. Por el segundo teorema fundamental del cálculo, se tiene:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{3}(3x^2+5x-1)dx = \left(x^3+\frac{5}{2}x^2-x\right)\Big|_{-1}^{3} = 44.$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{0}{2}\right) = 2.$

(c) $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx = \ln(\ln x)\Big|_e^{e^2} = \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e) = \ln 2.$

Teorema 2.7: Regla de sustitución para integrales definidas.

Supongamos que $u = g(x)$ es diferenciable con derivada continua en el intervalo $[a,b]$, y sea f una función continua en el rango de g. Si $F'(u) = f(u)$ y $c = g(a)$ y $d = g(b)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(d) - F(c).$$

Demostración.

Como $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)dx$. Por lo tanto,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(u)|_c^d = F(d) - F(c).$$

Teorema 2.8: Integración por partes para integrales definidas.

Si f y g son funciones reales con derivadas continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Demostración.
Utilizando la derivada del producto de funciones, para todo $x \in [a,b]$, se tiene

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

de donde,

$$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g'(x)dx &= \int_a^b [f(x)g(x)]'dx - \int_a^b f'(x)g(x)dx\\ &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.53. Evalúe:

$$\int_1^e \frac{(x+1)^2 \ln x}{x} dx.$$

Solución. Se observa que

$$\int_1^e \frac{(x+1)^2 \ln x}{x}\, dx = \int_1^e \ln x \frac{(x^2+2x+1)}{x} dx$$

Luego, integrando por partes:

$$\begin{aligned} u &= \ln x & dv &= \int x + \frac{1}{x} + 2\, dx\\ du &= \frac{dx}{x} & v &= \frac{x^2}{2} + \ln x + 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{(x+1)^2 \ln x}{x} dx &= \left(\frac{x^2}{2} + \ln x + 2x\right) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{\frac{x^2}{2} + \ln x + 2x}{x}\, dx\\ &= \frac{e^2}{2} + 1 + 2e - \frac{e^2}{4} - 2e + \frac{9}{4} - \underbrace{\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx}_{I}\end{aligned}$$

Resolviendo I por cambio de variable:

$$u = \ln x \quad \text{entonces} \quad du = \frac{1}{x} dx$$

Modificando los límites de integración:

$$\begin{cases} x = 1 & \rightarrow u = \ln 1 = 0\\ x = e & \rightarrow u = \ln e = 1 \end{cases}$$

Entonces,

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u du = \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\int_1^e \frac{(x+1)^2 \ln x}{x} dx = \frac{e^2}{4} + \frac{11}{4}.$$

Ejemplo 2.54. Calcule:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \arctan(x) dx.$$

Solución. Integrando por partes:

$$\begin{aligned} u &= \arctan x, & dv &= x\,dx \\ du &= \frac{1}{1+x^2}\,dx, & v &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \arctan(x) dx &= \frac{x^2}{2} \arctan x \Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{\pi^2}{32} \arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/4} 1 - \frac{1}{1+x^2}\,dx\right] \\ &= \frac{\pi^2}{32} \arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left[x - \arctan x\right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\pi^2}{32} \arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.55.

$$\int_{-1}^1 [(e^x + e^{-x}) \operatorname{sen}(x) + x \arctan(x)] dx.$$

Solución.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [(e^x + e^{-x}) \operatorname{sen}(x) + x \arctan(x)] dx &= \int_{-1}^1 \underbrace{(e^x + e^{-x}) \operatorname{sen}(x)}_{impar}\,dx + \int_{-1}^1 \underbrace{x \arctan(x)}_{par}\,dx \\ &= 0 + 2\int_0^1 x \arctan(x) dx \\ &= 2\left(\frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}[x - \arctan(x)]\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.56. Halle el valor de $\displaystyle\int_{-3}^3 \left(\frac{x}{|x-1|+1} + xe^{x^2}\right) dx.$

Solución.

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{3}\left(\frac{x}{|x-1|+1}+xe^{x^2}\right)dx &= \int_{-3}^{3}\frac{x}{|x-1|+1}dx+\cancel{\int_{-3}^{3}\underbrace{xe^{x^2}}_{impar}dx}\\
&= \int_{-3}^{1}\frac{x}{-(x-1)+1}dx+\int_{1}^{3}\frac{x}{(x-\cancel{1})+\cancel{1}}dx\\
&= \int_{-3}^{1}\frac{x}{2-x}dx+\int_{1}^{3}dx\\
&= -\int_{-3}^{1}\left(1+\frac{2}{x-2}\right)dx+x\Big|_{1}^{3}\\
&= -\left(x+2\ln|x-2|\right)\Big|_{-3}^{1}+2\\
&= 2\ln(5)-2.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.57. Sea f una función impar continua en $\mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_{2}^{1/2} f(2x)dx=-5$. Evalúe $\displaystyle\int_{16}^{-4} f(\frac{u}{4})du$.

Solución. Como $\displaystyle\int_{2}^{1/2} f(2x)dx=-5$ entonces $\displaystyle\int_{1/2}^{2} f(2x)dx=5$. Así, haciendo un cambio de variable $t=2x$, tenemos $\displaystyle\int_{1}^{4} f(t)\frac{dt}{2}=5\Longrightarrow\int_{1}^{4} f(t)dt=10$.
Por otro lado,

$$\int_{16}^{-4} f(\frac{u}{4})du=\underbrace{-\int_{-4}^{16} f(\frac{u}{4})du=-4\int_{-1}^{4} f(\theta)d\theta}_{\text{Haciendo }\theta=\frac{u}{4}}=-4\left(\int_{-1}^{1} f(\theta)d\theta+\int_{1}^{4} f(\theta)d\theta\right)$$

Luego, como f es impar, tenemos que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(\theta)d\theta=0$.

$$\therefore\int_{16}^{-4} f(\frac{u}{4})du=-4\int_{1}^{4} f(\theta)d\theta=-4(10)=-40.$$

Ejemplo 2.58. Evalúe

$$\int_{2}^{3}\frac{x^3+1}{x^3-3x+2}dx.$$

Solución.

$$\int_{2}^{3}\frac{x^3+1}{x^3-3x+2}dx=\int_{2}^{3}\left(1+\frac{3x-1}{x^3-3x+2}\right)dx=\int_{2}^{3}1dx+\int_{2}^{3}\frac{3x-1}{x^3-3x+2}dx$$

Por fracciones parciales

$$\frac{3x-1}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}.$$

Luego, determinando los valores de las constantes $A = \frac{7}{9}$, $B = \frac{2}{3}$ y $C = -\frac{7}{9}$. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{x^3+1}{x^3-3x+2}dx &= \int_2^3 1dx + \int_2^3 \frac{\frac{7}{9}}{x-1}dx + \int_2^3 \frac{\frac{2}{3}}{(x-1)^2}dx + \int_2^3 \frac{-\frac{7}{9}}{x+2}dx \\
&= \int_2^3 1dx + \frac{7}{9}\int_2^3 \frac{1}{x-1}dx + \frac{2}{3}\int_2^3 \frac{1}{(x-1)^2}dx - \frac{7}{9}\int_2^3 \frac{1}{x+2}dx \\
&= 1 + \frac{7}{9}\left[\ln|x-1|\right]_2^3 + \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{x-1}\right]_2^3 - \frac{7}{9}\left[\ln|x+2|\right]_2^3 \\
&= \frac{4}{3} + \frac{7}{9}\ln\left(\frac{8}{5}\right).
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.59. Calcule el valor de la siguiente integral:

$$I = \int_0^{\ln 2} e^{2x}\cos^2\left(\pi e^x - \frac{\pi}{2}\right)dx.$$

Solución. Cambio de variable: $z = e^x$, $\quad dz = e^x dx$

$$I = \int_1^2 z\cos^2\left(\pi z - \frac{\pi}{2}\right)dz = \int_1^2 z\,\mathrm{sen}^2(\pi z)dz = \frac{1}{2}\int_1^2 z[1-\cos(2\pi z)]dz$$

$$I = \frac{1}{2}\int_1^2 zdz - \frac{1}{2}\int_1^2 z\cos(2\pi z)dz = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{z\,\mathrm{sen}(2\pi z)^2}{2\pi} - \int_1^2 \frac{\mathrm{sen}(2\pi z)}{2\pi}dz\right]$$

$$u = z, \quad v = \cos(2\pi z)$$

$$du = dz, \quad v = \frac{\mathrm{sen}(2\pi z)}{2\pi}$$

$$I = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{z\,\mathrm{sen}(2\pi z)}{2\pi} + \frac{\cos(2\pi z)}{(2\pi)^2}\right]_1^2 = \frac{3}{4}.$$

Ejemplo 2.60. Calcule el valor de la siguiente integral:

$$I = \int_0^{\log_a(2)} a^{2x}\,\mathrm{sen}^2\left(\pi a^x + \frac{\pi}{2}\right)dx, \quad a > 1.$$

Solución. Cambio de variable: $z = a^x$, $\quad dz = a^x \ln a dx$:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\ln a}\int_1^2 z\,\mathrm{sen}^2\left(\pi z + \frac{\pi}{2}\right)dz = \frac{1}{\ln a}\int_1^2 z\cos^2(\pi z)dz = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{2}\int_1^2 z[1+\cos(2\pi z)]dz \\
&= \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{2}\int_1^2 zdz + \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{2}\int_1^2 z\cos(2\pi z)dz \\
&= \frac{3}{4\ln a} + \frac{1}{2}\left[\frac{z\,\mathrm{sen}(2\pi z)^2}{2\pi} - \int_1^2 \frac{\mathrm{sen}(2\pi z)}{2\pi}dz\right]
\end{aligned}$$

$$u = z, \quad dv = \cos(2\pi z)$$

$$du = dz, \quad v = \frac{\mathrm{sen}(2\pi z)}{2\pi}$$

$$I = \frac{3}{4\ln a} + \frac{1}{2}\left[\frac{z\,\mathrm{sen}(2\pi z)}{2\pi} + \frac{\cos(2\pi z)}{(2\pi)^2}\right]_1^2 = \frac{3}{4\ln a}.$$

Ejemplo 2.61. Evalúe la siguiente integral:

$$\int_0^1 \frac{2|x-1|}{x^2+x+1}dx$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{2|x-1|}{x^2+x+1}dx &= \int_0^1 \frac{2(1-x)}{x^2+x+1}dx \\
&= -\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + 3\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx \\
&= -\ln\left|x^2+x+1\right|\Big]_0^1 + 3\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx \\
&= -\ln 3 + \frac{6}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= -\ln 3 + \frac{6}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) - \frac{6}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= -\ln 3 + \frac{6}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3} - \frac{6}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} \\
\int_0^1 \frac{2|x-1|}{x^2+x+1}dx &= -\ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Teorema 2.9: Generalización del Primer Teorema Fundamental.

Sea f es una función continua en el intervalo I, y F una función dada por

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt.$$

Si las funciones g y h son diferenciable en el intervalo J con valores en el intervalo I, entonces

$$F'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x), \quad x \in J.$$

Ejemplo 2.62. Si $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{e^x} \operatorname{sen}(t^2)dt$, halle $F'(0)$.

Solución. Derivando con respecto de x, obtenemos:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\int_{x^2}^{e^x} \operatorname{sen}(t^2)dt\right) = \operatorname{sen}(e^{2x})(e^x) - \operatorname{sen}(x^4)(2x) \\
&\Longrightarrow F'(0) = \operatorname{sen}(1).
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.63. Si f es una función derivable en R tal que $f'(19) = \dfrac{1}{3}$ y

$$\int_{x^2+4}^{3} g(t-8)\,dt = f\left(2x^3+3\right) + \ln(x+1).$$

Halle $g(0)$.

Solución. Tenemos que

$$-\int_{3}^{x^2+4} g(t-8)\,dt = f\left(2x^3+3\right) + \ln(x+1)$$

Luego, derivando

$$\begin{aligned} -g\left(x^2+4-8\right)2x &= f'\left(2x^3+3\right)\left(6x^2\right) + \frac{1}{x+1} \\ -g\left(x^2-4\right)2x &= f'\left(2x^3+3\right)\left(6x^2\right) + \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

Haciendo $x^2-4=0$ obtenemos $x=2$ o $x=-2$, pero como $x+1>0$ elegimos $x=2$. Entonces

$$\begin{aligned} -g(0)(4) &= f'(19)(24) + \frac{1}{3} \\ -g(0)(4) &= \left(\frac{1}{3}\right)(24) + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$g(0) = -\frac{25}{12}.$$

Ejemplo 2.64. Sea f una función derivable y g una función continua en $\mathbb{R}$ tal que

$$f\left(e^{1+\operatorname{sen} x}\right) - \ln^2\left(x^2+1\right) = \int_{6x+2}^{x^2} g(3z-4)dz$$

Calcule el valor de $\dfrac{f'(e)}{g(2)}$.

Solución.

$$f\left(e^{1+\operatorname{sen} x}\right) - \ln^2\left(x^2+1\right) = \int_{6x+2}^{x^2} g(3z-4)dz$$

Derivando

$$f'\left(e^{1+\operatorname{sen} x}\right)\cdot\left(e^{1+\operatorname{sen} x}\right)(\cos x) - \frac{4x}{x^2+1}\ln\left(x^2+1\right) = 2xg\left(3x^2-4\right) - 6g(18x+2)$$

Luego, evaluando en $x=0$

$$\begin{aligned} (e)f'(e) &= -6g(2) \\ \frac{f'(e)}{g(2)} &= -\frac{6}{e}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.65. Si f es una función continua y positiva en $\mathbb{R}$ tal que

$$x^5 + \frac{\cos(\pi x)}{x^2+1} = \int_{3x^2}^{3} e^{x^3+2} f^2(5-t)dt$$

Calcule el valor de $f(2)$.

Solución.

$$x^5 + \frac{\cos(\pi x)}{x^2+1} = \left(e^{x^3+2}\right)\int_{3x^2}^{3} f^2(5-t)dt$$

Derivando

$$5x^4 - \frac{\pi \operatorname{sen}(\pi x)\left(x^2+1\right)+2x\cdot\cos(\pi x)}{(x^2+1)^2} = \left(3x^2 e^{x^3+2}\right)\int_{3x^2}^{3} f^2(5-t)dt - 6xe^{x^3+2}f^2\left(5-3x^2\right)$$

Evaluando convenientemente en $x=-1$,

$$5+\frac{1}{2} = 6ef^2(2)$$
$$f(2) = \sqrt{\frac{11}{12e}}.$$

Ejemplo 2.66. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ tal que:

$$\sqrt{x^2+1}+\ln x = \int_3^{3x^2} 2^{-x} f(2t-1)dt$$

Calcule el valor de $f(5)$.

Solución. Derivando respecto de x, con $x>0$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x} = -2^{-x}\ln 2\int_3^{3z^2} f(2t-1)dt + 2^{-z} f\left(6x^2-1\right)(6x).$$

Luego, haciendo $6x^2-1=5$ se tiene que $x=\pm 1$, nos obstante debido a $x>0$ elegimos $x=1$. Finalmente, reemplazando

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+1 = 0+2^{-1}f(5)(6)$$
$$f(5) = \frac{1+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}.$$

Definición 2.9: Funciones continuas por tramos.

Una función real f es continua por tramos en $[a,b]$ si hay puntos de discontinuidad $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ que dividen el intervalo $[a,b]$ en subintervalos de la forma $]c_{i-1}, c_i[$, para $i=1,2,\ldots,n$, de modo que:

(i) $a=c_0<c_1<c_2<\ldots<c_{n-1}<c_n=b$

(ii) f es continua en cada subintervalo abierto $]c_{i-1}, c_i[$.

(iii) En cada punto de discontinuidad existen los límites laterales

$$\lim_{x\to c_i^-} f(x) \text{ y } \lim_{x\to c_i^+} f(x), \text{ para } i=1,2,\ldots,n-1.$$

En $c_0=a$, solo hay $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y en el extremo derecho $c_n=b$, solo existe $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.
La Figura 2.39 representa la gráfica de una función continua por tramos.

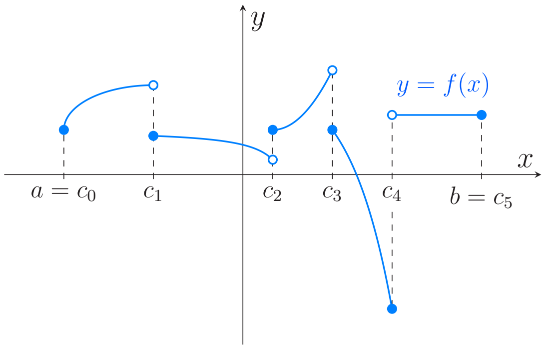


Figura 2.39: Gráfica de una función continua por tramos.

Importante. Si una función f es continua por tramos en el intervalo $[a, b]$ y está acotada en dicho intervalo, según el teorema 2.2, f resulta integrable en $[a, b]$. Para calcular la integral definida de una función continua por partes en $[a, b]$, podemos recurrir a la propiedad aditiva:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_v}^b f(x)\,dx$$

y considerar que los integrandos de las integrales definidas en el lado derecho de la ecuación como funciones continuas en los intervalos cerrados $[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$, ..., $[c_n, b]$.

Ejemplo 2.67. Evalúe $\int_{-2}^{6} f(x)dx$, donde $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & -2 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < 4 \\ 2, & 4 \le x \le 6 \end{cases}$.

Solución.

La gráfica de la función f continua por tramos se muestra en la Figura 2.40. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{6} f(x)dx &= \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx \\
&\quad + \int_{4}^{6} f(x)dx \\
&= \int_{-2}^{0} (x^2+1)dx + \int_{0}^{4} xdx \\
&\quad + \int_{4}^{6} 2dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-2}^{0} + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4 + 2x|_4^6 \\
&= -\frac{8}{3} - 2 + 8 + 4 \\
&= \frac{22}{3}.
\end{aligned}$$

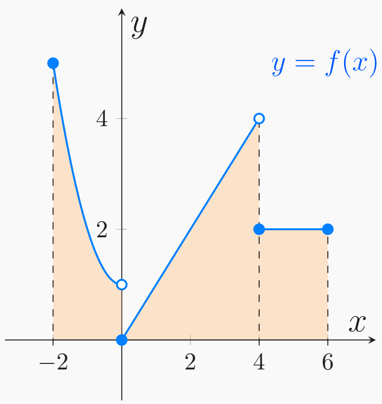


Figura 2.40

Ejercicios propuestos 2.2.4.

1. Si $F(x) = \int_{\sqrt{3x^2+1}}^{2+\ln x} (x+2)\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) dt$, calcule $F'(1)$.

2. Sean f y g funciones continuas en $\mathbb{R}$, tales que

$$\int_5^{-\sqrt{\pi}} [f(x)+g(x)]\,dx = -7, \quad \int_{\sqrt{\pi}}^5 6g(x)dx = 8 \quad \text{y} \quad \int_5^{\sqrt{\pi}} 2f(x)dx = -4.$$

Además, $f(x)+f(-x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Evalúe: $\int_{-2\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} g(t/2)dt$.

3. Dadas las funciones f y g, continuas en $\mathbb{R}$ tales que

$$\int_{-5}^0 f(x)dx = -9, \quad \int_5^{-5} [f(x)+g(x)]dx = -16, \quad \int_{-5}^0 [f(x)+3g(x)]\,dx = 11,$$

y $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Evalúe: $\int_0^{\sqrt{5}} tg(t^2)dt$.

4. Si f y g son funciones integrales tales que

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{6}t\right)}{2+\cos(2\pi t)}dt = \int_0^{x^2} tf\left(\sqrt{t}\right)dt$$

y

$$\int_0^{x^2} e^t \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^x t^2 g(t)\cos(2\pi t)\,dt$$

Halle: $24f(1)+g(1)$.

5. Si f y g son funciones integrables tales que

$$\frac{1}{2}\int_0^{x^2-1} \ln\sqrt{t+1}dt = \int_0^x \frac{f(x)}{e^2+t^2}dt$$

y

$$\sqrt{3}\int_0^{\sqrt{3}} g\left(t^2\right)\arctan\left(t^2\right)dt = \frac{\pi}{4}\int_0^x \frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)}{\sqrt{t+1}}dt$$

Determine: $\frac{1}{4}f(e)+\sqrt{2}g(1)$.

6. Si f y g son funciones continuas tales que

$$\int_0^x t^2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)dt = -\int_{x^2}^0 f\left(\sqrt{x}\right)dt \quad \text{y} \quad \int_0^x g(t)\,2^t dt = \int_0^{x^2} \frac{\ln t}{1+t}dt + 2^x.$$

Calcule: $4f(1)+2f(-1)$.

7. Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$, tal que

$$f\left(\sqrt{x^2+1}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) = \int_1^{3x+4} 2^x g(t-4)\,dt.$$

Si $\int_{-3}^0 g(u)\,du = \frac{2}{\ln 2}$, halle $g(0)$.

8. Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que

$$f\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)+\sqrt{x^2+3}=\int_0^{2x-4}\ln(2x)\,g(t+4)\,dt.$$

y $\displaystyle\int_2^4 g(z)\,dz=\frac{1}{2}$, determine $g(2)$.

9. Si f es una función derivable en $\mathbb{R}$, tal que

$$f'\left(3\sqrt{2}\right)=0 \quad \text{y} \quad H(x)=\int_{x^2}^{2}\tan\left(\sqrt{2}\pi x\right)f(4t)\,dt-\int_1^{2x}f\ (3x)\,\text{sen}\left(\sqrt{2}\pi t\right)dt.$$

Halle: $H'\left(\sqrt{2}\right)$.

2.3. Integral impropia

Hasta ahora, al abordar el concepto de la integral definida $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, teníamos en cuenta dos condiciones fundamentales:

- Los límites de integración eran valores finitos.
- La función f era continua en el intervalo $[a,b]$ o, en el caso de ser discontinua, estaba acotada dentro de dicho intervalo.

Cuando alguna de estas condiciones no se cumple, se denomina a la integral resultante como una **integral impropia**. En el siguiente análisis, comenzamos por examinar integrales de funciones definidas y continuas sobre intervalos no acotados, lo que implica que al menos uno de los límites de integración es infinito ($+\infty$ o $-\infty$).

2.3.1. Integral impropia de primera especie

Si la función que se integra, f, está definida en un intervalo no acotado, existen tres tipos posibles de integrales impropias con límites de integración infinitos. Sus definiciones se pueden resumir de la siguiente manera:

Definición 2.10:

i) Si f es una función continua en el intervalo $[a,+\infty[$, entonces la integral impropia se define como:

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{2.13}$$

ii) Si f es continua en el intervalo $]-\infty,b]$, entonces la integral impropia se define como:

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \tag{2.14}$$

iii) Si f es continua en todo el intervalo $]-\infty,+\infty[$, entonces la integral impropia se puede expresar como la suma de dos integrales:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx \tag{2.15}$$

Cuando los límites (2.13) y (2.14) existen, se considera que las integrales **convergen**. Si el límite no existe, se considera que las integrales **divergen**. En el caso (2.15), la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge si tanto $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ como $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$ convergen. Si alguna de estas dos integrales diverge, entonces la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ también diverge.

Ejemplo 2.68. Determine la convergencia de la siguiente integral impropia:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx.$$

Solución. Se observa que la integral es de la primera especie, por lo que, usando la definición se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{x}{x^2+1} dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^b \right) = \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \left(\ln\left(b^2+1\right) - \ln(1)\right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \ln\left(b^2+1\right) = +\infty
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral diverge.

Ejemplo 2.69. Determine la convergencia de: $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx.$

Solución. Para determinar la integral impropia $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}}\, dx$, notemos que la función $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$ es continua sobre el intervalo $[0, +\infty[$. Entonces, podemos utilizar la definición de integral impropia de la primera especie:

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b x^2 e^{-\frac{x}{2}}\, dx$$

Ahora, para resolver la integral definida $\displaystyle\int_0^b x^2 e^{-\frac{x}{2}}\, dx$, realizamos una integración por partes. Sea $u = x^2$ y $dv = e^{-\frac{x}{2}}\, dx$, entonces $du = 2x\, dx$ y $v = -2e^{-\frac{x}{2}}$. Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{-\frac{x}{2}}\, dx &= -x^2 \cdot 2e^{-\frac{x}{2}} - \int -2x \cdot -2e^{-\frac{x}{2}}\, dx \\
&= -2x^2 e^{-\frac{x}{2}} + 4 \int x e^{-\frac{x}{2}}\, dx
\end{aligned}$$

Integramos la segunda integral por partes nuevamente. Sea $u = x$ y $dv = e^{-\frac{x}{2}}\, dx$, entonces $du = dx$ y $v = -2e^{-\frac{x}{2}}$. Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\begin{aligned}\int xe^{-\frac{x}{2}}\,dx &= -x\cdot 2e^{-\frac{x}{2}} - \int -2e^{-\frac{x}{2}}\,dx\\ &= -2xe^{-\frac{x}{2}} + 2\int e^{-\frac{x}{2}}\,dx\\ &= -2xe^{-\frac{x}{2}} - 4e^{-\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

Sustituimos esta última expresión en la anterior:

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-\frac{x}{2}}\,dx &= -2x^2e^{-\frac{x}{2}} + 4\left(-2xe^{-\frac{x}{2}} - 4e^{-\frac{x}{2}}\right)\\ &= -2x^2e^{-\frac{x}{2}} - 8xe^{-\frac{x}{2}} - 16e^{-\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

Ahora, evaluamos la integral definida en el límite superior:

$$\begin{aligned}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x^2e^{-\frac{x}{2}}\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\left[-2x^2e^{-\frac{x}{2}} - 8xe^{-\frac{x}{2}} - 16e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^b\\ &= \lim_{b\to+\infty}\left[-2b^2e^{-\frac{b}{2}} - 8be^{-\frac{b}{2}} - 16e^{-\frac{b}{2}} - (-16)\right]\\ &= \lim_{b\to+\infty}\left[-2b^2e^{-\frac{b}{2}} - 8be^{-\frac{b}{2}} - 16e^{-\frac{b}{2}} + 16\right]\\ &= 16 \quad \text{(usando regla de L'Hôpital)}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral impropia $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-\frac{x}{2}}\,dx$ converge y su valor es 16.

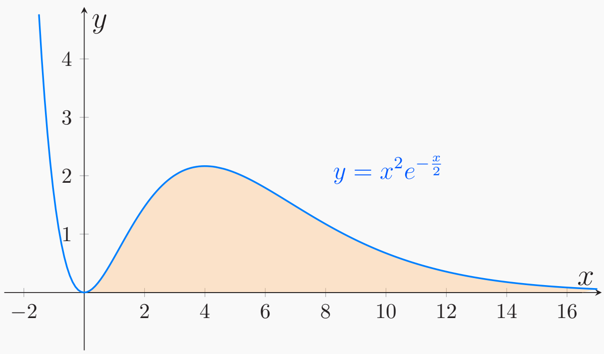


Figura 2.41

Ejemplo 2.70. Analice la convergencia o divergencia de la siguiente integral. De ser convergente, calcule su valor

$$\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{3}{x^2-3x+2}\right)dx.$$

Solución. Usando la definición

$$I = \int_{-\infty}^{0}\frac{3}{(x-1)(x-2)}dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{3}{(x-1)(x-2)}dx \tag{2.16}$$

Además,

$$M = \int \frac{3}{(x-1)(x-2)}dx = \int \frac{-3}{x-1}dx + \int \frac{3}{x-2}dx = 3\{\ln|x-2| - \ln|x-1|\} + C$$

Reemplazando en (2.16), se tiene

$$I = 3 \lim_{t\to -\infty} \{\ln|x-2| - \ln|x-1|\}_t^0 = 3 \lim_{t\to -\infty} \ln 2 - 3 \cdot \lim_{t\to -\infty} \ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right|$$

$$I = 3\ln 2 - 3\ln\left\{\lim_{t\to -\infty}\left|\frac{t-2}{t-1}\right|\right\} = 3\ln 2.$$

Por lo tanto, dicha integral converge a $3\ln 2$..

Ejemplo 2.71. Analice la convergencia o divergencia de la siguiente integral. De ser convergente, calcule su valor

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(2x+1)^2}dx.$$

Solución. Tenemos que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(2x+1)^2}dx = \lim_{t\to +\infty} \int_0^t \frac{x}{(2x+1)^2}dx \qquad (2.17)$$

Trabajando en:

$$\int \frac{x}{(2x+1)^2}dx$$

Integración por partes: $u = x, \quad dv = (2x+1)^{-2}dx$

$$du = dx \quad v = -\frac{1}{2(2x+1)}$$

$$\int \frac{x}{(2x+1)^2}dx = -\frac{x}{2(2x+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x+1} = -\frac{x}{2(2x+1)} + \frac{1}{4}\ln|2x+1| + C$$

Luego reemplazando en (2.17)

$$I = \lim_{t\to +\infty} \left\{ -\frac{x}{2(2x+1)} + \frac{1}{4}\ln\Big| 2x+1 \right\}_0^t = \lim_{t\to +\infty} \left\{ -\frac{t}{2(2t+1)} + \frac{1}{4}\ln\Big| 2t+1 \right\} = +\infty$$

En consecuencia, la integral diverge.

Ejemplo 2.72. Analice la convergencia o divergencia de la siguiente integral. De ser convergente, calcule su valor

$$\int_0^{+\infty} \frac{4\arctan x}{(1+x^2)^2}dx.$$

Solución. Tenemos que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{4\arctan x}{(1+x^2)^2}dx = \lim_{t\to +\infty} \int_0^t \frac{4\arctan x}{(1+x^2)^2}dx$$

Resolviendo :

$$N = 4\int \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2}dx$$

mediante el cambio de variable $\quad z = \arctan x, \quad dz = \dfrac{1}{1+x^2}dx, \quad \tan z = x.$

Entonces

$$\begin{aligned} N &= 4\int \frac{zdz}{1+\tan^2 z} = 4\int z\cos^2 z dz \\ &= 2\left[\int z(1+\cos(2z))dz\right] = z^2 + 2\int z\cos(2z)dz \\ &= z^2 + z\,\mathrm{sen}(2z) + \frac{1}{2}\cos(2z) \\ &= \arctan^2 x + \arctan x\cdot \mathrm{sen}(2\arctan x) + \frac{1}{2}\cos(2\arctan x) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t\to+\infty}\left\{\arctan^2 x + \arctan x\cdot\mathrm{sen}(2\arctan x) + \frac{1}{2}\cos(2\arctan x)\right\}_0^t \\ &= \lim_{t\to+\infty}\left\{\arctan^2(t) + \arctan(t)\cdot\mathrm{sen}(2\arctan(t)) + \frac{1}{2}\cos(2\arctan(t)) - \frac{1}{2}\right\} \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral converge a $\dfrac{\pi^2}{4} - 1$.

Ejemplo 2.73. Analice la convergencia o divergencia de la siguiente integral. De ser convergente, calcule su valor

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{4}{x^2-5x+6}dx.$$

Solución. Utilizando la definición

$$I = \int_{-\infty}^{1} \frac{4}{(x-2)(x-3)}dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^1 \frac{4}{(x-2)(x-3)}dx \tag{2.18}$$

Mediante fracciones parciales, resolvemos la integral:

$$M = \int \frac{4}{(x-2)(x-3)}dx = \int \frac{-4}{x-2}dx + \int \frac{4}{x-3}dx = \{-4\ln|x-2| + 4\ln|x-3|\} + C$$

Reemplazando en (2.18)

$$I = 4\lim_{t\to-\infty}\{-\ln|x-2| + \ln|x-3|\}_t^1 = 4\cdot\lim_{t\to-\infty}\ln 2 - 4.\lim_{t\to-\infty}\ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|$$

$$I = 4\ln 2 - 4\ln\left(\lim_{t\to-\infty}\left|\frac{t-2}{t-1}\right|\right) = 4\ln 2$$

Así, se concluye que integral converge a $4\ln 2$.

Ejemplo 2.74. Determine la convergencia de la siguiente integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3\arctan(x^2)}{(1+x^4)^2}dx.$$

Solución. Tenemos que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \arctan(x^2)}{(1+x^4)^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{x^3 \arctan(x^2)}{(1+x^4)^2} dx.$$

Haciendo: $u = \arctan(x^2) \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{2x}{1+x^4}dx \quad$ y $\quad \tan u = x^2.$

Así,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3 \arctan(x^2)}{(1+x^4)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 \arctan(x^2)}{(1+x^4)} \frac{2x dx}{(1+x^4)} = \int \frac{u \tan u}{1+\tan^2 u} du \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{u \tan u}{\sec^2 u} du \\
&= \frac{1}{4} \int u \operatorname{sen}(2u) du \\
&= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2} u \cos(2u) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2u) \right] + C \\
&= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2} \arctan(x^2) \cos(2\arctan(x^2)) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2\arctan(x^2)) \right] + C \\
&= -\frac{1}{8} \arctan(x^2) \cos(2\arctan(x^2)) + \frac{1}{16} \operatorname{sen}(2\arctan(x^2)) + C.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \arctan(x^2)}{(1+x^4)^2} dx &= \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{8} \arctan(x^2) \cos(2\arctan(x^2)) + \frac{1}{16} \operatorname{sen}(2\arctan(x^2)) \right] \Bigg|_0^b \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{8} \arctan(b^2) \cos(2\arctan(b^2)) + \frac{1}{16} \operatorname{sen}(2\arctan(b^2)) \right] \\
&= \frac{\pi}{16}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.75. Determine la convergencia de la siguiente integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} dx.$$

Solución.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{x \ln\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} dx$$

Primero resolvemos la integral del lado derecho, para ello hacemos el cambio de variable:

$$t = \ln\left(x^2+1\right), \quad dt = \frac{2x}{x^2+1} dx \;\; \text{y} \;\; e^{-t} = \left(x^2+1\right)^{-1}.$$

$$\int \frac{x \ln\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\left(x^2+1\right)^{-1} (2x) \ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int t e^{-t} dt$$

Luego, integramos por partes: $u = t \to du = dt$ y $dv = e^{-t} dt \to v = -e^{-t}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int t e^{-t} dt &= \frac{1}{2} \left(-t e^{-t} - e^{-t} + K \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\left(x^2+1\right)^{-1} \ln\left(x^2+1\right) - \left(x^2+1\right)^{-1} \right) + K
\end{aligned}$$

Entonces

$$\int_0^b \frac{x\ln\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \frac{1}{2}\left[-\left(b^2+1\right)^{-1}\ln\left(b^2+1\right)-\left(b^2+1\right)^{-1}+1\right]$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x\ln\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{x\ln\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}dx\\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[-\left(b^2+1\right)^{-1}\ln\left(b^2+1\right)-\left(b^2+1\right)^{-1}+1\right]\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

En el cálculo del límite se aplicó la regla de L'Hospital:

$$\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{\ln\left(b^2+1\right)}{\left(b^2+1\right)}\right] = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{\frac{2b}{b^2+1}}{2b}\right] = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{b^2+1}\right] = 0.$$

Ejemplo 2.76. Determine la convergencia de la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}dx.$$

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}dx\\ &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}dx\\ &= \lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]_a^0 + \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]_0^b\\ &= \lim_{a\to-\infty}\left[-1+\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right] + \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+1\right]\\ &= -1+1=0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral converge a 0.

Ejemplo 2.77. Determine la convergencia de la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx.$$

Solución. Usando la definición, tenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx\\
&= \lim_{a\to-\infty}\left[\arctan\left(e^x\right)\right]_a^0 + \lim_{b\to+\infty}\left[\arctan\left(e^x\right)\right]_0^b\\
&= \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{\pi}{4} - \arctan(e^a)\right] + \lim_{b\to+\infty}\left[\arctan(e^b) - \frac{\pi}{4}\right]\\
&= \frac{\pi}{4} - (0) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Ejercicios propuestos 2.3.1.

1. En cada uno de los siguientes integrales analice si la integral es convergente. En caso afirmativo, determine su valor:

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$
   b) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$
   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4+15}dx$
   d) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x}dx$
   e) $\displaystyle\int_{e}^{\infty} \frac{1}{x}dx$
   f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$
   g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{4} \frac{2^x}{x^2-4}dx$
   h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2}dx$
   i) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\,(x+4)}dx$
   j) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\,\sqrt{\ln\,(x+1)}}dx$
   k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(9+x^2)^2}$

2.3.2. Integral impropia de segunda especie

En este segundo tipo de integral impropia, el integrando f presenta una discontinuidad infinita en algún punto del intervalo de integración. En ese sentido, recordemos que si f es continua sobre $[a,b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ existe. Además, si $F'(x) = f(x)$, entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Sin embargo, no es posible evaluar una integral como

$$\int_0^4 \frac{1}{(x-2)^2}dx$$

mediante el mismo procedimiento, ya que $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ tiene una discontinuidad infinita en $[0,4]$. Ver la Figura 2.42. En otras palabras, intentar evaluar la integral

$$\int_0^4 \frac{1}{(x-2)^2}dx = -\frac{1}{x-2}\bigg|_0^4 = -1$$

carece de sentido. Por lo tanto, se tiene otro tipo de **integral que demanda un tratamiento especial**.

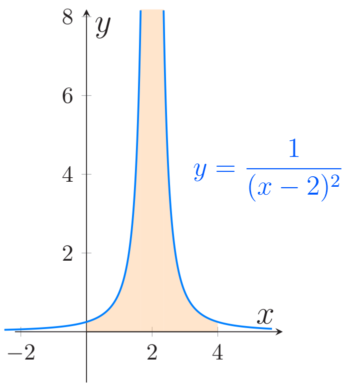


Figura 2.42

Una integral $\int_a^b f(x)dx$ también se dice que es impropia si f no está acotada sobre $[a,b]$, es decir, si f tiene una discontinuidad infinita en algún número en el intervalo de integración.

Definición 2.11: Discontinuidades infinitas.

(i) Si f es continua sobre $[a,b[$ y $|f(x)|$ se aproxima a infinito cuando x se acerca a b^-, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx. \tag{2.19}$$

(ii) Si f es continua sobre $]a,b]$ y $|f(x)|$ se aproxima a infinito cuando x se acerca a a^+, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{s\to a^+}\int_s^b f(x)dx. \tag{2.20}$$

(iii) Si $|f(x)|$ se aproxima a infinito cuando x se acerca a c en $]a,b[$ y f es continua en todos **los demás puntos** en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{2.21}$$

Cuando los límites en las expresiones (2.19) y (2.20) existen, se dice que las integrales **convergen**. Si el límite no existe, entonces se dice que la integral **diverge**. En la expresión (2.21), la integral $\int_a^b f(x)dx$ converge siempre que tanto $\int_a^c f(x)dx$ como $\int_c^b f(x)dx$ converjan. Si alguna de estas integrales diverge, entonces $\int_a^b f(x)dx$ también diverge.

Ejemplo 2.78. Determine la convergencia o divergencia de:

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{1/2}}dx.$$

Solución. Se observa que el integrando $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^{1/2}}$ no es acotado en $x=1$, ya que $\lim_{x\to 1^+}|f(x)|=\infty$. Luego, por definición de integral impropia de la segunda especie, se tiene:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{1/2}}dx &= \lim_{t\to 1^+}\int_t^2 \frac{1}{(x-1)^{1/2}}dx\\ &= \lim_{t\to 1^+}\left[2(x-1)^{1/2}\right]_t^2\\ &= 2\lim_{t\to 1^+}\left[1-(t-1)^{1/2}\right]\\ &= 2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral converge al valor de 2.

Ejemplo 2.79. Analice la convergencia o divergencia de la siguiente integral. De ser convergente, calcule su valor

$$\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}dx.$$

Solución.

$$I = \int_2^c \frac{1}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}dx + \int_c^4 \frac{1}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}dx$$
$$I = \lim_{t\to 2^+}\int_t^c \frac{1}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}dx + \lim_{t\to 4^-}\int_c^t \frac{1}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}dx$$

Calculando

$$M = \int \frac{1}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-3)^2}}dx$$

mediante un cambio de variable: $z = x-3 \Rightarrow dz = dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-(x-3)^2}}dx = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

luego, por sustitución trigonométrica: $z = \operatorname{sen}\theta$, se tiene

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int d\theta = \operatorname{arcsen}(x-3)+K$$

Reemplazando en I:

$$I = \lim_{t\to 2^+} \operatorname{arcsen}(x-3)\Big|_t^c + \lim_{t\to 4^-} \operatorname{arcsen}(x-3)\Big|_c^t$$
$$= -\lim_{t\to 2^+} \operatorname{arcsen}(t-3) + \lim_{t\to 4^-} \operatorname{arcsen}(t-3) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

Por lo tanto, dicha integral converge.

Ejemplo 2.80. Analice la convergencia o divergencia de la siguiente integral. De ser convergente, calcule su valor

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}dx$$

Solución. El integrando no es acotado en $x=2$ pues:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} = +\infty$$

y como ninguno de los límites de integración es infinito, la integral es impropia de segunda especie. Luego, la integral se define:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}} = \lim_{t\to 2^-}\int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}} = \lim_{t\to 2^-}\int_1^t \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$
$$= \lim_{t\to 2^-}\int_1^t \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \lim_{t\to 2^-} [\operatorname{arcsen}(x-1)]_1^t$$
$$= \lim_{t\to 2^-} [\operatorname{arcsen}(t-1) - \operatorname{arcsen}(0)] = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Dado que el valor del límite es finito, la integral es convergente.

Ejemplo 2.81. Determine la convergencia de la siguiente integral:

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Solución. Tenemos que:

$$I=\int_0^1 \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{b\to 1^-}\int_0^b \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Resolviendo

$$M=\int \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Sean $u=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$ y $dv=\dfrac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$, entonces

$$du=\frac{2}{1-x^2}dx \quad \text{y} \quad v=\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{1-x^2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
M&=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{1-x^2}\right)-\int\left(\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{1-x^2}\right)\frac{2dx}{1-x^2}\\
&=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{1-x^2}\right)-2\int\left(\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx\\
&=-\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)\sqrt{1-x^2}\left(\frac{x^2+2}{3}\right)-2\left(\frac{1}{3}\operatorname{arc\,sen}x+\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen}x)-2\operatorname{arc\,sen}x\right)+C\\
&=-\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)\sqrt{1-x^2}\left(\frac{x^2+2}{3}\right)+\frac{10}{3}\operatorname{arc\,sen}x-2\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen}x)+C
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
I&=\lim_{b\to 1^-}\left[-\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)\sqrt{1-x^2}\left(\frac{x^2+2}{3}\right)+\frac{10}{3}\operatorname{arc\,sen}x-2\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen}x)\right]_0^b\\
&=\lim_{b\to 1^-}\left[-\ln\left(\frac{b+1}{1-b}\right)\sqrt{1-b^2}\left(\frac{b^2+2}{3}\right)+\frac{10}{3}\operatorname{arc\,sen}b-2\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen}b)\right]\\
&=\underbrace{\lim_{b\to 1^-}\left[-\ln\left(\frac{b+1}{1-b}\right)\sqrt{1-b^2}\left(\frac{b^2+2}{3}\right)\right]}_{\infty\cdot 0}+\frac{5\pi}{3}\\
&=0+\frac{5\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos 2.3.2.

1. Analice la convergencia o divergencia de las siguientes integrales. De ser convergente, calcule su valor de cada una.

a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{x-4}dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2-9}dx$

c) $\displaystyle\int_0^2 x^2 \ln x dx$

d) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt[6]{1-x}}dx$

g) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

h) $\displaystyle\int_a^{2a} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$

i) $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

j) $\displaystyle\int_0^1 x\ln x dx$

k) $\displaystyle\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt[3]{27-x^3}}$

l) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

m) $\displaystyle\int_0^{1/4} \frac{1}{x\ln x^2}dx$

n) $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x}}$

2.3.3. Integral impropia de tercera especie

Existe un tipo especial de integral impropia conocida como integral impropia de tercera especie o mixta. Estas integrales representan la fusión de las integrales impropias de primera y segunda especie. Mientras que las integrales de primera especie involucran límites infinitos en uno de los extremos de integración, y las integrales de segunda especie se ocupan de funciones no acotadas en el intervalo de integración, las integrales de tercera especie combinan ambas características. Nos enfocaremos en el análisis de estas integrales, explorando sus propiedades, condiciones de convergencia y divergencia, así como algunos métodos para su evaluación.

Ejemplo 2.82. Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}.$$

Solución. Para estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$, debemos de descomponer esta integral en un punto conveniente, por ejemplo, para $x=1$ se tiene

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} &= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}\\
&= \lim_{a\to 0^+}\left[2\arctan\sqrt{x}\right]_a^1 + \lim_{b\to\infty}\left[2\arctan\sqrt{x}\right]_1^b\\
&= \lim_{a\to 0^+}(2\arctan 1 - 2\arctan\sqrt{a}) + \lim_{b\to\infty}(2\arctan\sqrt{b} - 2\arctan 1)\\
&= 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0 + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \pi.
\end{aligned}$$

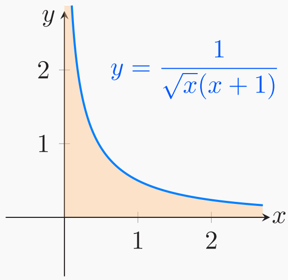


Figura 2.43

Ejemplo 2.83. Determine la convergencia de la siguiente integral:

$$\int_3^{+\infty} \frac{\ln(x^2-9)}{x^2} dx.$$

Solución. Tenemos que

$$\int_3^{+\infty} \frac{\ln(x^2-9)}{x^2} dx = \int_3^{4} \frac{\ln\left(x^2-9\right)}{x^2} dx + \int_4^{+\infty} \frac{\ln\left(x^2-9\right)}{x^2} dx.$$

Además, por integración por partes, tenemos

$$\int \frac{\ln\left(x^2-9\right)}{x^2} dx = -\frac{\ln\left(x^2-9\right)}{x} - \int -\frac{2}{x^2-9} dx = -\frac{\ln\left(x^2-9\right)}{x} - \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right) + C.$$

Luego, usando la definición de integral impropia:

- $$\begin{aligned} \int_4^{\infty} \frac{\ln\left(x^2-9\right)}{x^2} &= \lim_{b\to+\infty} \int_4^{b} \frac{\ln\left(x^2-9\right)}{x^2} dx \\ &= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{\ln\left(b^2-9\right)}{b} - \frac{1}{3}\ln\left(\frac{b+3}{b-3}\right) + \frac{7}{12}\ln(7) \right) \\ &= \frac{7}{12}\ln(7). \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \int_3^{4} \frac{\ln\left(x^2-9\right)}{x^2} &= \lim_{a\to3^+} \int_a^{4} \frac{\ln\left(x^2-9\right)}{x^2} dx \\ &= \lim_{a\to3^+} \left(-\frac{7}{12}\ln(7) + \frac{\ln(a^2-9)}{a} + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{a+3}{a-3}\right) \right) \\ &= -\frac{7}{12}\ln(7) + \lim_{a\to3^+} \left(\frac{\ln\left(a^2-9\right)}{a} + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{a+3}{a-3}\right) \right) \\ &= -\frac{7}{12}\ln(7) + \lim_{a\to3^+} \ln\left(\left(a^2-9\right)^{1/a} \left(\frac{a+3}{a-3}\right)^{1/3} \right) \\ &= -\frac{7}{12}\ln(7) + \lim_{a\to3^+} \ln\left((a-3)^{\frac{1}{a}-\frac{1}{3}} (a+3)^{\frac{1}{a}+\frac{1}{3}} \right) \\ &= -\frac{7}{12}\ln(7) + \lim_{a\to3^+} \left(\frac{3-a}{3a}\ln(a-3) + \ln(a+3)^{\frac{3+a}{3a}} \right) \\ &= -\frac{7}{12}\ln(7) + \frac{2}{3}\ln(6). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_3^{+\infty} \frac{\ln\left(x^2-9\right)}{x^2}dx = \frac{2}{3}\ln(6).$$

Ejemplo 2.84. Analice la convergencia o divergencia de la siguiente integral. De ser convergente, calcule su valor

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx.$$

Solución. Eligiendo un c conveniente en $[0,+\infty[$, se tiene

$$I = \int_0^c \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx + \int_c^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$$
$$I = \lim_{t\to 0^+}\int_t^c \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx + \lim_{t\to+\infty}\int_c^t \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$$

Mediante sustitución trigonométrica, determinamos

$$M = \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$$

Haciendo: $\tan\theta = \dfrac{x}{2}$, se tiene

$$M = \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^{-2}\theta\cdot\cos\theta d\theta = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + K$$

Reemplazando en I:

$$I = \lim_{t\to 0^+}\left\{-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}\right\}_t^c + \lim_{t\to+\infty}\left\{-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}\right\}_c^t = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{t^2+4}}{4t}\right) + \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{\sqrt{t^2+4}}{4t}\right)$$
$$I = +\infty - \frac{1}{4} = +\infty$$

Por lo tanto, dicha integral diverge.

Ejemplo 2.85. Analice la convergencia o divergencia de la siguiente integral. De ser convergente, calcule su valor

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{(x-2)}}dx.$$

Solución. Tomando un c conveniente en $[2,+\infty[$, tenemos

$$\begin{aligned} I &= \int_2^c \frac{1}{x\sqrt{x-2}}dx + \int_c^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-2}}dx \\ &= \lim_{t\to 2^+}\int_t^c \frac{1}{x\sqrt{x-2}}dx + \lim_{t\to+\infty}\int_c^t \frac{1}{x\sqrt{x-2}}dx \qquad (2.22)\end{aligned}$$

Luego, trabajando en: $M = \int \frac{1}{x\sqrt{x-2}}dx$, mediante un cambio de variable: $u = \sqrt{x-2} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x-2}}$

$$M = \int \frac{1}{x\sqrt{x-2}}dx = 2\int \frac{1}{u^2+2}du = \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{\frac{x-2}{2}}\right)$$

Reemplazando en (2.22)

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t\to 2^+}\left\{\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{\frac{x-2}{2}}\right)\right\}_t^c + \lim_{t\to+\infty}\left\{\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{\frac{x-2}{2}}\right)\right\}_c^t \\ &= -\sqrt{2}\lim_{t\to 2^+}\arctan\left(\sqrt{\frac{t-2}{2}}\right) + \sqrt{2}\lim_{t\to+\infty}\arctan\left(\sqrt{\frac{t-2}{2}}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dicha integral es convergente.

Ejercicios propuestos 2.3.3.

1. Analice la convergencia o divergencia de las siguientes integrales. De ser convergente, calcule su valor de cada una.

   a) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{4dx}{x^2-5x+6}$

   b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}$

   c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$

   d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+4}$

   e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

   f) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$

2.4. Funciones especiales

En esta sección del libro nos adentraremos en el estudio de las funciones especiales, centrándonos específicamente en las funciones Gamma y Beta, conocidas como funciones Eulerianas. Estas funciones desempeñan un papel crucial en el cálculo integral, ofreciendo herramientas para resolver una variedad de problemas. Aquí exploraremos sus definiciones, propiedades y aplicaciones en el contexto de la resolución de integrales.

2.4.1. Función Gamma (Γ)

La función Gamma, denotada como Γ, es una extensión del concepto de factorial a los números reales. Mientras que el factorial $n!$ está definido solo para los números enteros positivos, la función Gamma permite calcular valores intermedios y proporciona una continuación al concepto de factorial.

Definición 2.12: Función Gamma.

Para los números reales $x > 0$, la función Gamma se define mediante la siguiente integral impropia:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}du.$$

Esta integral converge para todo $x > 0$.

La función Gamma es fundamental en muchas áreas de las matemáticas, estadística y la física. Por ejemplo, la función Gamma permite interpolar el factorial entre los números enteros. Esto es útil en el análisis combinatorio y en la teoría de números. En estadística, la distribución Gamma y la distribución chi-cuadrado utilizan la función Gamma en sus definiciones y, en el cálculo de integrales, esta función aparece frecuentemente en la solución de integrales muy complejas que no pueden resolverse mediante métodos elementales.

Teorema 2.10: Propiedades fundamentales de la función Gamma.

(i) $\Gamma(1) = 1$.

(ii) Para todo $x > 0$: $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$

(iii) La función Gamma Γ restringida a $\mathbb{Z}^+$ es la función factorial usual:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}^+.$$

Demostración

(i) Usando la definición de función Gamma para $x = 1$, se tiene

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} u^{1-1}e^{-u}du = \int_0^{\infty} e^{-u}du = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-u}du = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+1) = 1.$$

(ii) Para todo $x > 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^{\infty} u^{x-1}e^{-u}du = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} u^{x-1}e^{-u}du \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{x}u^x e^{-u}\Big|_0^b + \frac{1}{x}\int_0^b u^x e^{-u}du \right] \qquad \text{(por integración por partes)} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{x}b^x e^{-b} + \frac{1}{x}\int_0^b u^{(x+1)-1}e^{-u}du \right] \\
&= 0 + \frac{1}{x}\lim_{b\to\infty} \int_0^b u^{(x+1)+1}e^{-u}du \\
&= \frac{1}{x}\int_0^{\infty} u^{(x+1)-1}e^{-u}du \\
&= \frac{\Gamma(x+1)}{x}
\end{aligned}$$

(iii) Escribiendo la propiedad previa en la forma:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \text{para todo } x > 0.$$

Ahora, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, aplicamos la propiedad anterior n veces, obteniendo:

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) \\
&= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(n-3) \\
&\ \ \vdots \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3\times 2\times 1\times \underbrace{\Gamma(1)}_{1} \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3\times 2\times 1 \\
&= n!
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.86. Ejemplos de aplicación.

Solución.

- $\Gamma(5) = \Gamma(4+1) = 4!$
- $\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{9}{2}+1\right) = \frac{9}{2}\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right) = \frac{9}{2}\times\frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right).$
  Siguiendo con el proceso, tenemos que
  $$\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{9}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$
- $\Gamma\left(\frac{17}{2}\right) = \frac{15}{2}\times\frac{13}{2}\times\frac{11}{2}\times\frac{9}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$
- $\Gamma\left(\frac{11}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{7}{4}+1\right) = \frac{7}{4}\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}+1\right) = \frac{7}{4}\times\frac{3}{4}\times\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).$
- $\Gamma\left(\frac{21}{4}\right) = \frac{17}{4}\times\frac{13}{4}\times\frac{9}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).$

Se observa que en estos ejemplos, las respuestas obtenidas quedan determinadas en términos de la función Gamma. Más adelante brindaremos una fórmula explícita para el caso de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Extensión de la función Gamma

La propiedad (ii) del Teorema 2.10, nos permite extender la definición de función Gamma para $x < 0$, con $x \neq -1, -2, -3, \ldots$ De modo que, si $-1 < x < 0$, entonces $0 < x+1 < 1$ mostrando al extensión de la función Gamma para el intervalo $-1 < x < 0$. Sucesivamente podemos continuar con este proceso para los x menores que cero exceptuando los enteros negativos.

Ejemplo 2.87. Teniendo en cuenta que

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x},$$

determine en términos de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$:

(a) $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ (b) $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$

Solución.

(a) $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$

(b) $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \dfrac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right)}{-\frac{5}{2}} = -\frac{2}{5}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{5}\dfrac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{15}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{8}{15}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$

Como nuestro objetivo es utilizar la función Gamma para resolver integrales complejas que, de otro modo, serían difíciles de abordar mediante métodos elementales, presentaremos algunas de las propiedades fundamentales. No vamos a demostrar estas propiedades, para enfocarnos en su aplicación práctica. A continuación, se enumeran algunas de las propiedades más importantes de la función Gamma que emplearemos en esta sección.

Propiedad 2.10.

1. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\int_0^{\infty} e^{-u^2} du\right) = \sqrt{\pi}$
2. $\Gamma(x) = a^x \int_0^{\infty} u^{x-1}e^{-au}du$, con $x > 0$ y $a > 0$.
3. $\Gamma(x) = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{u}\right)\right]^{x-1} du$, para todo $x > 0$.
4. $\Gamma(p) = a^p \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{u}\right)\right]^{p-1} u^{a-1}du$, con $p > 0$ y $a > 0$.
5. $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}$, $0 < x < 1$.

Ejemplo 2.88. Evalúe:

$$\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^5} dx.$$

Solución. Si realizamos el cambio

$$u = x^5, \quad \text{con} \quad du = 5x^4 dx$$

tenemos que los límites de integración también cambian:

si $x = 0$	$\Longrightarrow$	$u = 0$
si $x \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$u \to +\infty$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^5} dx &= \frac{1}{5}\int_0^{+\infty} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{5}\int_0^{+\infty} u^{1-1} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{5}\Gamma(1) \\ &= \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.89. Evalúe:

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx.$$

Solución. Haciendo un cambio de variable

$$u = x^2, \quad \text{con } du = 2xdx \quad \text{y} \quad x = u^{1/2}$$

con límites de integración

si $x = 0$	$\Longrightarrow$	$u = 0$
si $x \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$u \to +\infty$

tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx &= \int_0^{+\infty} u e^{-u} \frac{du}{2u^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{2}} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^{\frac{3}{2}-1} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.90. Evalúe:

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{2x} e^{-4x} dx.$$

Solución. Utilizando el cambio:

$$u = 4x, \quad du = 4dx$$

con

$x = 0$	$\Longrightarrow$	$u = 0$
$x \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$u \to +\infty$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \sqrt{2x}e^{-4x}dx &= \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{u}{2}} \cdot e^{-u}\right) \frac{du}{4} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{2}} e^{-u} du \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} u^{\frac{3}{2}-1} e^{-u} du \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.91. Calcule:

$$\int_0^{\pi/2} \tan^5 x \sec^2 x e^{-\tan^2 x} dx.$$

Solución. Realizando un cambio de variable:

$$u = \tan^2 x, \quad \text{con} \quad du = 2\tan x \sec^2 x dx$$

$x = 0$	$\Longrightarrow$	$u = 0$
$x \to \frac{\pi}{2}^-$	$\Longrightarrow$	$u \to +\infty$

Reemplazando

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \tan^5 x \sec^2 x e^{-\tan^2 x} dx &= \int_0^{\pi/2} \tan^4 x e^{-\tan^2 x} (\tan x \sec^2 x dx) \\
&= \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} \frac{du}{2} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^{3-1} e^{-u} du \\
&= \frac{\Gamma(3)}{2} = \frac{2!}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.92. Determine:

$$\int_0^{+\infty} x^6 e^{-4x^2} dx.$$

Solución. Haciendo: $u = 4x^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}u^{1/2}$ y $dx = \frac{1}{4}u^{-1/2}du.$
Luego,

si $x = 0$	$\Longrightarrow$	$u = 0$
si $x \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$u \to +\infty$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^6 e^{-4x^2} dx &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} u^{-1/2} \cdot e^{-u} du \\ &= \frac{1}{4^4} \int_0^{+\infty} u^{\frac{5}{2}} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{4^4} \int_0^{+\infty} u^{\frac{7}{2}-1} e^{-u} du = \frac{1}{256} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \\ &= \frac{1}{256} \left[\frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{256} \left(\frac{15}{8}\right) \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.93. Calcule:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-3\ln x}} dx.$$

Solución. Si hacemos $u = -\ln x$, entonces $x = e^{-u}$ y $dx = -e^{-u} du$. Además,

si $x \to 0^+$	$\Longrightarrow$	$u \to +\infty$
si $x \to 1^-$	$\Longrightarrow$	$u \to 0$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-3\ln x}} dx &= \int_{+\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{3u}} \left(-e^{-u} du\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{3\pi}}{3}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.94. Calcule: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x}} dx.$

Solución. Sea $u = 2x$, entonces $dx = \dfrac{du}{2}$ y

si $x \to 0^+$	$\Longrightarrow$	$u \to 0^+$
si $x \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$u \to +\infty$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x}} dx &= \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot u^{\frac{1}{2}-1} du \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\end{aligned}$$

Ejemplo 2.95. Calcule: $\displaystyle\int_0^{+\infty} 3^{-4\sqrt[3]{x}}dx.$

Solución. Recordemos que $3^{-4\sqrt[3]{x}} = e^{\ln\left(3^{-4\sqrt[3]{x}}\right)} = e^{-4\sqrt[3]{x}\cdot\ln(3)}$. Además, haciendo el cambio $u = 4\sqrt[3]{x}\ln(3)$, se tiene

$$x = \left(\frac{u}{4\ln(3)}\right)^3 \quad \text{y} \quad dx = 3\left(\frac{u}{4\ln(3)}\right)^2 \frac{1}{4\ln(3)}du$$

si $x = 0$	$\Longrightarrow$	$u = 0$
si $x \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$u \to +\infty$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} 3^{-4\sqrt[3]{x}}dx &= \int_0^{+\infty} e^{-u}\cdot\frac{3u^2}{4^3\ln^3(5)}du\\ &= \frac{3}{64\ln^3(3)}\int_0^{+\infty} u^{3-1}e^{-u}du = \frac{3(2!)}{64\ln^3(3)} = \frac{6}{64\ln^3(3)}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.96. Encuentre el valor de

$$\int_0^1 \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)^{1/2} dx.$$

Solución. Tenemos que

$$\int_0^1 \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)^{1/2} dx = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{1/2} x^{-1/2}dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1}\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{\frac{3}{2}-1} dx$$

Si utilizamos la parte 4 de la propiedad 2.10, con $a = \dfrac{1}{2}$ y $p = \dfrac{3}{2}$ se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)^{1/2} dx &= \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}\int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1}\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{\frac{3}{2}-1} dx\right]\\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.97. Verifique que:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-ax^s}dx = \frac{1}{sa^{r/s}}\Gamma\left(\frac{r}{s}\right),\ a > 0.$

(b) $\displaystyle\int_0^1 x^r(\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(r+1)^{n+1}},\ r > -1,\ n \in \mathbb{Z}^+.$

Solución.

(a) Haciendo el cambio $u = ax^s$, tenemos

$$x = \left(\frac{u}{a}\right)^{1/s} \quad \text{y} \quad dx = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{s}} u^{\frac{1}{s}-1}du$$

si $x = 0$	$\Longrightarrow$	$u = 0$
si $x \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$u \to +\infty$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-ax^s}dx &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{r-1}{s}} e^{-u}\left(\frac{1}{s}\left(\frac{1}{a}\right)^{1/s} u^{\frac{1}{s}-1}du\right)\\ &= \frac{1}{sa^{r/s}}\int_0^{+\infty} u^{\frac{r}{s}-1}e^{-u}du\\ &= \frac{1}{sa^{r/s}}\Gamma\left(\frac{r}{s}\right).\end{aligned}$$

(b) Se observa que

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^r \ln^n x dx = \int_0^1 ((-1)(-1)\ln x)^n x^r dx &= (-1)^n \int_0^1 (-\ln x)^n x^r dx\\ &= (-1)^n \int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n+1)-1} x^{(r+1)-1}dx\end{aligned}$$

Luego, aplicamos la fórmula 4 de la propiedad 2.10, con $a = r+1 > 0$ y $p = n+1$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^r(\ln x)^n dx &= \frac{(-1)^n}{(r+1)^{n+1}}\left[(r+1)^{n+1}\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{(n+1)-1} x^{(r+1)-1}dx\right]\\ &= \frac{(-1)^n}{(r+1)^{n+1}}\Gamma(n+1) = \frac{(-1)^n n!}{(r+1)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.98. Evalúe las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{5/2}e^{-3x^{1/2}}dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 [\ln x]^5\, dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 x^3\,[\ln x]^7\, dx$

Solución. Para resolver estas integrales, utilizaremos el ejemplo anterior:

(a) Se observa que

$$\int_0^{+\infty} x^{5/2}e^{-3x^{1/2}}dx = \int_0^{+\infty} x^{\frac{7}{2}-1}e^{-3x^{1/2}}dx$$

Reconociendo como $r = \frac{7}{2}$, $a = 3$ y $s = \frac{1}{2}$, se tiene

$$\int_0^{+\infty} x^{5/2}e^{-3x^{1/2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{2}(3)^{\frac{7/2}{1/2}}}\Gamma\left(\frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{3^7}\Gamma(7) = \frac{1440}{2187}.$$

(b) Usando la parte (b) del ejemplo anterior, con $r = 0$ y $n = 5$, se tiene

$$\int_0^1 [\ln x]^5\, dx = \int_0^1 x^0 \ln^5 x dx = \frac{(-1)^5 5!}{(0+1)^{5+1}} = -(5!) = -120.$$

2. Integral Definida

(c) Nuevamente, usando la parte (b) del ejemplo anterior, con $r = 3$ y $n = 7$,

$$\int_0^1 x^3 [\ln x]^7 \, dx = \frac{(-1)^7 7!}{(3+1)^{7+1}} = -\frac{7!}{4^8}.$$

Ejemplo 2.99. Evalúe la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx.$$

Solución. Como el integrando $f(x) = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$ es una función par, tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = 2\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = 2\int_0^{+\infty} x^{3-1} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

De la parte (a) del ejemplo 2.97, concluimos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = 2\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{2\pi}.$$

Ejercicios propuestos 2.4.1.

1. Evalúe las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-4\ln x}} dx$

   b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} 6^{-4x^2} dx$

   c) $\displaystyle\int_0^1 (x\ln x)^3 dx$

   d) $\displaystyle\int_0^1 (\ln x)^4 dx$

   e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-8x^3} dx$

   f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-x^3} dx$

   g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-9x} dx$

   h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} 5^{-4\sqrt[3]{x}} dx$

   i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^6 e^{-2x} dx$

   j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x^3} dx$

   k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-\ln x)^{3/2}}{\sqrt{x}} dx$

   l) $\displaystyle\int_0^e \frac{x}{\sqrt{1-\ln x}} dx$

   m) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt[4]{x} e^{-\sqrt{x}} dx$

   n) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (x+2)^2 e^{-x^2} dx$

2. Demuestre que:

   a) $\displaystyle\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi},\ n\in\mathbb{Z}^+.$

   b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x}{\ln x}\right)^{1/3} dx = -\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$

2.4.2. Función Beta (β)

La función Beta, denotada como β, es una función especial que surge en diversos contextos en matemáticas, especialmente en el cálculo integral y la teoría de probabilidades. Al igual que la función Gamma, la función Beta generaliza los conceptos de factorial y combinatoria a números reales positivos.

Definición 2.13: Función Beta.

La función Beta se define mediante la siguiente integral:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du,$$

donde esta integral depende de los parámetros p y q, y resulta convergente para todo $p > 0$ y $q > 0$.

Al igual que con la función Gamma, presentamos una lista de propiedades fundamentales que nos serán útiles en la resolución de integrales.

Propiedad 2.11. Para todo $p > 0$ y $q > 0$ se cumplen:

1. $\beta(p,q) = \beta(q,p)$
2. $\beta(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ **(Relación entre la función Gamma y Beta)**
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x)^{2p-1} (\cos x)^{2q-1} \, dx = \frac{1}{2}\beta(p,q)$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx = \beta(p,q)$
5. $\displaystyle\int_a^b (x-a)^p(b-x)^q dx = (b-a)^{p+q+1}\beta(p+1,q+1)$

Ejemplo 2.100. Halle los valores de:

(a) $\beta\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ (b) $\displaystyle\int_0^1 x^{-\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{4}}dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$

Solución.

(a) De la relación entre la función Gamma y Beta, tenemos que

$$\beta\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(2)} = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Sean $p-1 = -\dfrac{3}{4}$ y $q-1 = -\dfrac{1}{4}$, entonces $p = \dfrac{1}{4}$ y $q = \dfrac{3}{4}$. Luego,

$$\int_0^1 x^{-\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{4}}dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{4}-1}(1-x)^{\frac{3}{4}-1}dx = \beta\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$$

Recordando la propiedad de función Gamma: $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}$, $0 < x < 1$,

$$\int_0^1 x^{-\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{4}}dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{1} = \sqrt{2}\pi.$$

(c) Como $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 x\left(1-x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx$, hacemos el cambio $u = x^4$, entonces

$$x = u^{1/4} \quad \text{y} \quad dx = \frac{1}{4}u^{-3/4}dx.$$

si $x \to 0^+$	$\Longrightarrow$	$u \to 0^+$
si $x \to 1^-$	$\Longrightarrow$	$u \to 1^-$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} &= \int_0^1 x\left(1-x^4\right)^{-1/2}dx = \int_0^1 u^{1/4}(1-u)^{1/2}\cdot\frac{1}{4}u^{-\frac{3}{4}}du \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 u^{-1/2}(1-u)^{-1/2}du = \frac{1}{4}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}-1}(1-u)^{\frac{1}{2}-1}du \\
&= \frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4\Gamma(1)} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.101. Evalúe:

$$\int_3^7 \sqrt[5]{(x-3)^{10}(7-x)^3}dx.$$

Solución. Notamos que

$$\int_3^7 \sqrt[5]{(x-3)^{10}(7-x)^3}dx = \int_3^7 (x-3)^2(7-x)^{3/5}dx.$$

Haciendo un cambio de variable: $u = \dfrac{x-3}{4}$ tenemos que

$$x = 4u+3, \quad dx = 4du \quad \text{y} \quad 7-x = 4(1-u)$$

si $x = 3$	$\Longrightarrow$	$u = 0$
si $x = 7$	$\Longrightarrow$	$u = 1$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_3^7 \sqrt[5]{(x-3)^{10}(7-x)^3}dx &= \int_0^1 (4u)^2\left[4(1-u)\right]^{3/5}4du \\
&= 4^{\frac{18}{5}}\int_0^1 u^{3-1}(1-u)^{\frac{8}{5}-1}du \\
&= 4^{\frac{18}{5}}\beta\left(3,\frac{8}{5}\right) = 4^{\frac{18}{5}}\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{8}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{23}{5}\right)} \\
&= 4^{\frac{18}{5}}\frac{2!\Gamma\left(\frac{8}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{18}{5}+1\right)} \\
&= 4^{\frac{18}{5}}\frac{2\times\Gamma\left(\frac{8}{5}\right)}{\frac{18}{5}\times\frac{13}{5}\times\frac{8}{5}\times\Gamma\left(\frac{8}{5}\right)} = \frac{125\times 4^{\frac{18}{5}}}{936}.
\end{aligned}$$

Este ejemplo también se puede resolver utilizando (5) de la propiedad 2.11.

Ejemplo 2.102. Calcule:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2/3}(x)\operatorname{sen}^5(x)dx.$$

Solución. Usamos la parte 3 de la propiedad 2.11, donde

$$2p-1=\frac{2}{3} \Rightarrow p=\frac{5}{6}$$
$$2q-1=5 \Rightarrow q=3$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2/3}(x)\operatorname{sen}^5(x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\left(\frac{5}{6}\right)-1}(x)\operatorname{sen}^{2(3)-1}(x)dx\\ &= \frac{1}{2}\beta\left(\frac{5}{6},3\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}+3\right)}\\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{23}{6}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\frac{17}{6}\times\frac{11}{6}\times\frac{5}{6}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}=\frac{216}{935}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.103. Evalúe:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^7(x)dx.$$

Solución. Podemos notar que

$$\int_0^{\pi/2}\cos^7 x dx=\int_0^{\pi/2}\cos^7(x)\operatorname{sen}^0(x)dx=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2\left(\frac{1}{2}\right)-1}(x)\cos^{2\left(\frac{8}{2}\right)-1}(x)dx$$

Luego, por ítem 3 de la propiedad 2.11, se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\cos^7 x dx &= \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{8}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(4)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+4\right)}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)3!}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}=\frac{3\times 2}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{24}{105}=\frac{8}{35}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.104. Evalúe:

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan(x)}dx.$$

Solución.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\tan^{1/2}(x)dx &= \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{1/2}(x)\cos^{-1/2}(x)dx\\ &= \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2\left(\frac{3}{4}\right)-1}(x)\cos^{2\left(\frac{1}{4}\right)-1}(x)dx\\ &= \frac{1}{2}\beta\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(1)}, \quad 0<\frac{1}{4}<1\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}\pi\right)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.105. Evalúe:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}/2} t\cos^5\left(2t^2\right)\sqrt{\operatorname{sen}\left(2t^2\right)}dt.$$

Solución. Tenemos que

$$\int_0^{\sqrt{\pi}/2} t\cos^5\left(2t^2\right)\sqrt{\operatorname{sen}\left(2t^2\right)}dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \cos^5\left(2t^2\right)\operatorname{sen}^{1/2}\left(2t^2\right)(4tdt)$$

Haciendo un cambio de variable: $u = 2t^2$, donde $du = 4tdt$ y

si $t = 0$	$\Longrightarrow$	$u = 0$
si $t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$\Longrightarrow$	$u = \frac{\pi}{2}$

Luego,

$$\int_0^{\sqrt{\pi}/2} t\cos^5\left(2t^2\right)\sqrt{\operatorname{sen}\left(2t^2\right)}dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(u)\operatorname{sen}^{1/2}(u)du$$

Además,

$$5 = 2p - 1 \Rightarrow p = 3$$
$$\frac{1}{2} = 2q - 1 \Rightarrow q = \frac{3}{4}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}/2} t\cos^5\left(2t^2\right)\sqrt{\operatorname{sen}\left(2t^2\right)}dt &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(3)-1}(u)\operatorname{sen}^{2\left(\frac{3}{4}\right)-1}(u)du \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\beta\left(3, \frac{3}{4}\right)\right) = \frac{1}{8}\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{15}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{8}\frac{(2!)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{11}{4}\times\frac{7}{4}\times\frac{3}{4}\times\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \\ &= \frac{16}{231}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.106. Evalúe:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[4]{x}}}.$$

Solución. Sea $u = \sqrt[4]{x}$, entonces $x = u^4$ y $dx = 4u^3du$.

si $x = 0$	$\Longrightarrow$	$u = 0$
si $x \to 1^-$	$\Longrightarrow$	$u \to 1^-$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[4]{x}}} &= \int_0^1 \frac{4u^3}{(1-u)^{1/2}} = 4\int_0^1 u^3(1-u)^{-1/2}du \\ &= 4\int_0^1 u^{4-1}(1-u)^{\frac{1}{2}-1}du = 4\beta\left(4, \frac{1}{2}\right) \\ &= 4\frac{\Gamma(4)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = 4\frac{(3!)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{128}{35}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.107. Evalúe:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^3 u + \tan^5 u}{(1+\tan u)^5} du.$$

Solución. Si hacemos $x = \tan u$, tenemos

$$u = \arctan x \quad \text{y} \quad du = \frac{dx}{1+x^2}$$

si $u = 0$	$\Longrightarrow$	$x = 0$
si $u \to \frac{\pi}{2}^-$	$\Longrightarrow$	$u \to +\infty$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^3 u + \tan^5 u}{(1+\tan u)^5} du &= \int_0^{+\infty} \frac{x^3+x^5}{(1+x)^5} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x^3\left(1+x^2\right)}{(1+x)^5} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x)^5} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{4-1}}{(1+x)^{4+1}} dx \qquad \text{por (4) de la propiedad 2.11} \\ &= \beta(4,1) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(1)}{\Gamma(5)} = \frac{3!}{4!} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos 2.4.2.

1. Evalúe las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_0^8 x^{-\frac{1}{2}} \left(2 - x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} dx$

   b) $\displaystyle\int_0^{32} \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt[5]{x}}} dx$

   c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{1/2} x \cos^6 x dx$

   d) $\displaystyle\int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{4-x}} dx$

   e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{\sqrt[4]{1-x^4}} dx$

   f) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x\right) \sqrt{8\operatorname{sen}(3x)} dx$

   g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-\ln u)^{3/2}}{\sqrt{u}} du$

   h) $\displaystyle\int_0^1 x^3 \ln^5 x dx$

   i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{1/2} x \cos^6 x dx$

   j) $\displaystyle\int_0^2 x^4 \left(4-x^2\right)^{-1/2} dx$

   k) $\displaystyle\int_0^1 x \sqrt[3]{27-x^3} dx$

2. Demuestre que, para todo $p > 0$ y $q > 0$ se cumple:

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^p dx}{(1+e^x)^{p+q}} = \beta(p,q).$

   b) $\beta(p,1) = \dfrac{1}{p}$

   c) $\beta(p+1,1) = \dfrac{p}{p+q}\beta(p,q)$

   d) $\beta(p, 1-p) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{1/p}},$ con $0 < p < 1$.

3

Capítulo

Aplicaciones de la integral definida

En este capítulo, exploraremos cómo la integral definida puede utilizarse para resolver problemas prácticos, como el cálculo de áreas entre curvas, volúmenes de sólidos de revolución, longitudes de arco y otras aplicaciones físicas y geométricas. A través de ejemplos claros y detallados, veremos cómo estas aplicaciones de la integral definida permiten entender mejor el uso de esta herramienta en diversas situaciones.

3.1. Área de regiones planas: área entre dos curvas

Supongamos que f y g son funciones continuas con $f(x) \geq g(x)$ para todo x en el intervalo $[a, b]$, lo que implica que la gráfica de f se encuentra por encima o en la misma posición que la de g en $[a, b]$. Consideremos la región $\mathcal{R}$ delimitada por las gráficas de f y g entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, como se muestra en la Figura 3.1.

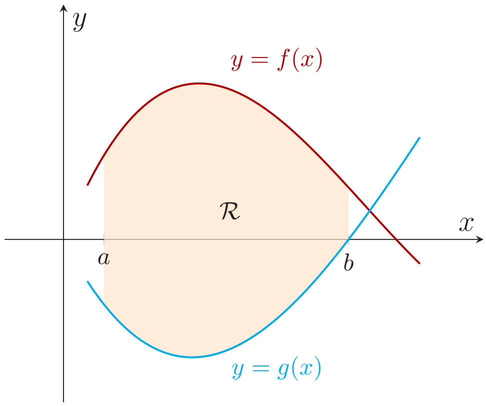


Figura 3.1: Gráfica de la región entre las gráficas de f y g en $[a, b]$.

Para determinar el área de $\mathcal{R}$, tomamos una partición regular del intervalo $[a, b]$,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$$

y construimos la suma de Riemann de la función $(f-g)$ sobre $[a,b]$ con respecto a esta partición:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(t_k\right)-g\left(t_k\right)\right]\Delta x$$

donde t_k es un punto de evaluación en el subintervalo $[x_{k-1},x_k]$ y $\Delta x=(b-a)/n$. El término k-ésimo de esta suma representa el área de un rectángulo con altura $[f(t_k)-g(t_k)]$ y anchura Δx. Como se puede ver en la Figura 3.2, esta área es una aproximación del área de la subregión de $\mathcal{R}$ que se encuentra entre las gráficas de f y g en $[x_{k-1},x_k]$.

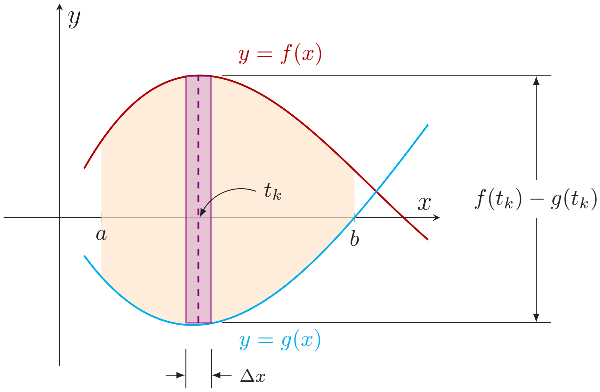


Figura 3.2: El k-ésimo término de la suma de Riemann de $f-g$, brinda el área del k-ésimo rectángulo de base Δx.

Por consiguiente, la suma de Riemann nos ofrece una aproximación de lo que podríamos considerar de manera intuitiva como el área de $\mathcal{R}$ (ver Figura 3.3). A medida que aumenta el valor de n, es razonable esperar que la aproximación mejore gradualmente. De este modo, proponemos definir el área A de $\mathcal{R}$ como

$$A(\mathcal{R})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(t_k\right)-g\left(t_k\right)\right]\Delta x \tag{3.1}$$

Debido a que la función $f-g$ es continua en el intervalo $[a,b]$, el límite en la ecuación (3.1) existe y es igual a la integral definida de $f-g$ desde a hasta b.

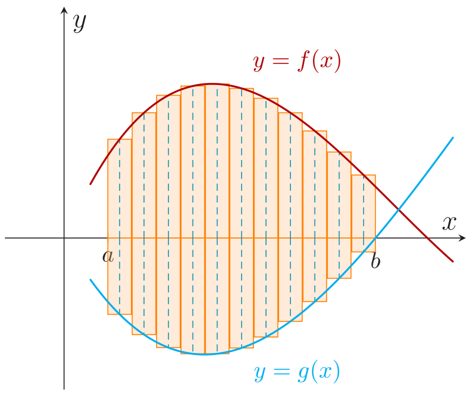


Figura 3.3: La suma de Riemann de $f-g$ se aproxima el área de $\mathcal{R}$.

Definición 3.1: Área de una región entre dos curvas.

Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$ con $f(x)\geq g(x)$ para todo $x\in[a,b]$. El área de la región $\mathcal{R}$ limitada por las curvas $y=f(x), y=g(x)$ y por las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ es

$$\boxed{A(\mathcal{R})=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx.} \tag{3.2}$$

Importante.

1. Si $g(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces la región $\mathcal{R}$ está comprendida por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ (ver Figura 3.4). Entonces el área de $\mathcal{R}$, es el área bajo la gráfica de f,

$$A(\mathcal{R}) = \int_a^b [f(x) - 0]\, dx = \int_a^b f(x)dx.$$

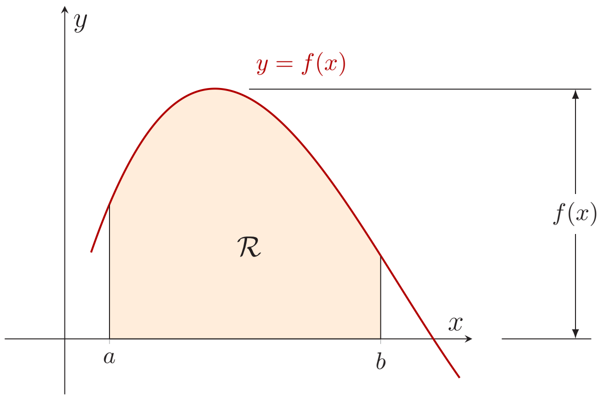


Figura 3.4

2. Si $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces la región $\mathcal{R}$ se encuentra debajo del eje x (ver Figura 3.5), y su área está dada por:

$$A(\mathcal{R}) = \int_a^b [0 - g(x)]\, dx = -\int_a^b g(x)dx.$$

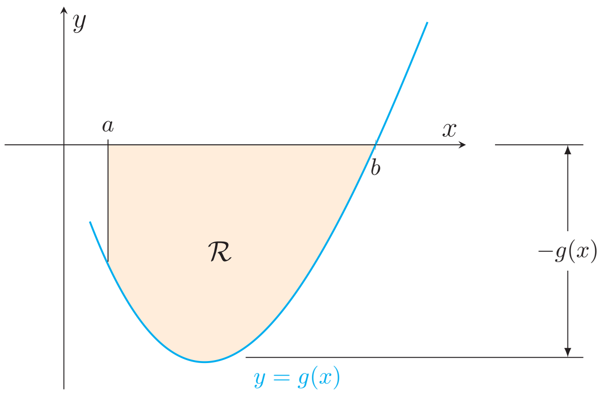


Figura 3.5

A continuación, se presenta una estrategia sistemática para determinar el área entre dos curvas. Siguiendo estos pasos, se podrán identificar las funciones involucradas, determinar los puntos de intersección, y luego aplicar las integrales adecuadas para calcular el área deseada.

Estrategia para calcular el área entre dos curvas:

(i) Grafique la región entre las gráficas de f y g en $[a, b]$.

(ii) Esboce un rectángulo representativo con altura $[f(x) - g(x)]$ y ancho Δx tal que su área es

$$\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x.$$

(iii) Observe que la altura del rectángulo, $[f(x) - g(x)]$, es el integrando en la ecuación (3.2). El ancho Δx nos recuerda integrar con respecto a x. Así,

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Estos detalles se observan en la Figura 3.6.

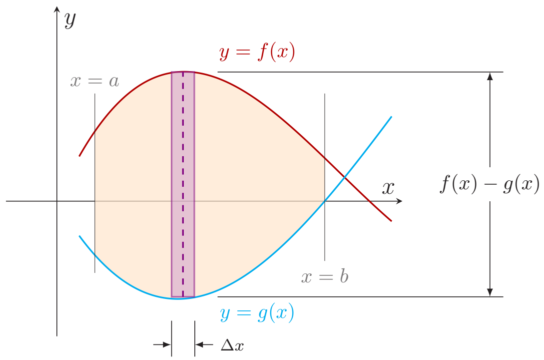


Figura 3.6

Ejemplo 3.1. Encuentre el área de la región $\mathcal{R}$, limitada por las parábolas

$$y = x^2, \quad y = 4x - x^2.$$

Solución.

Graficando ambas curvas, podemos reconocer la región $\mathcal{R}$:

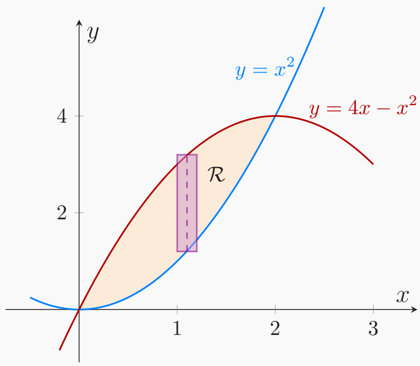


Figura 3.7

Luego, esbozando un rectángulo representativo, con altura

$$(4x - x^2) - (x^2) = 4x - 2x^2.$$

Además, resolviendo la ecuación:

$$4x - x^2 = x^2$$

tenemos que las curvas se interceptan en $(0, 0)$ y $(2, 4)$. Finalmente, planteamos la integral definida que representa el área entre las dos curvas:

$$A = \int_0^2 (4x - 2x^2)dx = \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}\, u^2.$$

Ejemplo 3.2. Encuentre el área de la región limitada por las curvas

$$y = 3^{-x} \quad \text{y} \quad 2(x+2)^2 + y = 9.$$

Solución. Primero encontramos los puntos de intersección de ambas gráficas (esto nos permitirá encontrar los límites de integración), para ello resolvemos

$$3^{-x} = 9 - 2(x+2)^2,$$

de donde claramente los puntos que satisfacen la ecuación son: $x = -2$ y $x = 0$.

Graficando las curvas

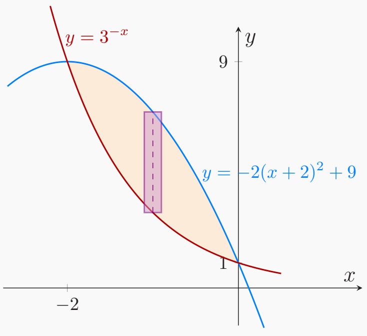


Figura 3.8

Luego, el área de la región sombreada está dada por la siguiente integral:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0} \left[\left(9 - 2(x+2)^2\right) - 3^{-x} \right] dx \\ &= \int_{-2}^{0} 9dx - \int_{-2}^{0} 2\,(x+2)^2\,dx - \int_{-2}^{0} 3^{-x}dx \\ &= \left[9x - 2\left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x \right) + \frac{3^{-x}}{\ln(3)} \right]_{-2}^{0} \\ &= 18 - \frac{16}{3} - \frac{8}{\ln(3)} \\ &= \left(\frac{38}{3} - \frac{8}{\ln(3)} \right) u^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3. Calcule el área de la región limitada por las curvas:

$$y = x^3 - 2, \quad y = x^2 - 4 \quad \text{y la recta} \quad x = 2.$$

Solución.

Para hallar la intersección de la recta con las curvas, solo reemplazamos $x = 2$, obteniendo que $y = 0$, $y = 6$. Además, resolviendo la ecuación:

$$x^3 - 2 = x^2 - 4 \Longrightarrow (x+1)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

tenemos que ambas curvas se cortan en $x = -1$. Luego, de la Figura 3.9, se tiene:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} \left[x^3 - 2 - (x^2 - 4) \right] dx \\ &= \int_{-1}^{2} \left(x^3 - x^2 + 2 \right) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^{2} = \frac{27}{4}\, u^2. \end{aligned}$$

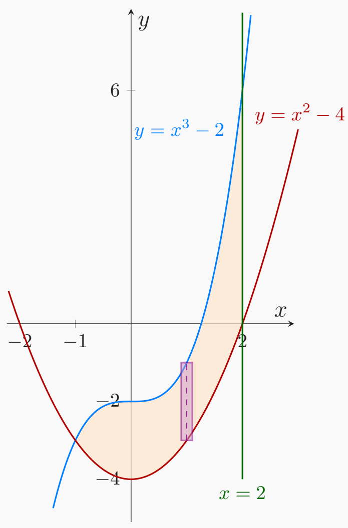


Figura 3.9

Ejemplo 3.4. Determine el área de la región limitada por las curvas:

$$x - y = 1, \quad y = -(x-2)^3 + 1 \quad \text{y} \quad 3x + 2y = 18.$$

Solución. Para encontrar las intersecciones entre las curvas resolvemos los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y = -(x-2)^3 + 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ y = -(x-2)^3 + 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ x - y = 1 \end{cases}.$$

Resolviendo el primer sistema

$$\begin{aligned} x - 1 &= -(x-2)^3 + 1 \\ x - 1 &= -x^3 + 6x^2 - 12x + 9 \\ &\Longrightarrow -x^3 + 6x^2 - 13x + 10 = 0 \\ &\Longrightarrow -(x-2)\left(x^2 - 4x + 5\right) = 0 \end{aligned}$$

tenemos que $x = 2$. Por lo que, la intersección se da en el punto $(2, 1)$. De manera similar para el segundo sistema, reemplazando la segunda ecuación en la primera:

$$\begin{aligned} 3x + 2\left[-(x-2)^3 + 1\right] &= 18 \\ -2x^3 + 12x^2 - 21x &= 0 \\ -x\left(2x^2 - 12x + 21\right) &= 0 \end{aligned}$$

obtenemos que $x = 0$, entonces la intersección ocurre en $(0, 9)$. Luego, resolviendo el tercer sistema, encontramos que la intersección es $(4, 3)$. Representamos estos datos hallados en la Figura 3.10.

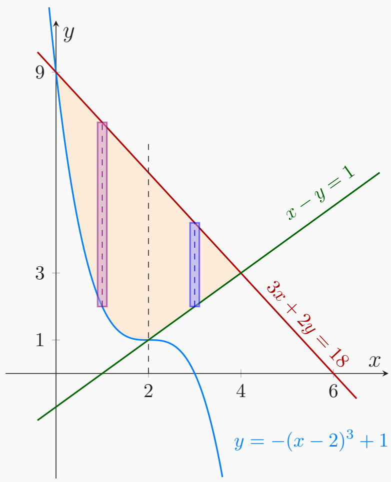


Figura 3.10

Posteriormente, de la Figura 3.10, tenemos que el área está determinado por la siguiente suma de integrales:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \left[9 - \frac{3}{2}x - \left(-(x-2)^3 + 1\right)\right] dx + \int_2^4 \left[\left(9 - \frac{3}{2}x\right) - (x-1)\right] dx \\ &= \int_0^2 \left[8 - \frac{3}{2}x + (x-2)^3\right] dx + \int_2^4 \left[10 - \frac{5}{2}x\right] dx \\ &= \left[8x - \frac{3x^2}{4} + \frac{(x-2)^4}{4}\right]_0^2 + \left[10x - \frac{5x^2}{4}\right]_2^4 \\ &= 9 + 5 = 14 \ u^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5. Halle el área de la región ubicada el primer cuadrante y limitada por las curvas:

$$y = \sqrt{2 - x} + 3, \quad y = \frac{x^2}{4} + 2$$

y el segmento que une los puntos $(0, 2)$ y $(1, 4)$.

Solución. Primero encontramos la recta que contiene a los puntos $(0,2)$ y $(1,4)$:

$$m=\frac{4-2}{1-0}=2\Longrightarrow y-2=2(x-0)\Longrightarrow y=2x+2.$$

Luego, encontramos el punto de intersección en el primer cuadrante entre las curvas:

$$\begin{cases} y=\sqrt{2-x}+3 \\ y=\dfrac{x^2}{4}+2 \end{cases} \Longrightarrow x=2$$

Entonces, el gráfico de la región en el primer cuadrante limitado por las curvas es

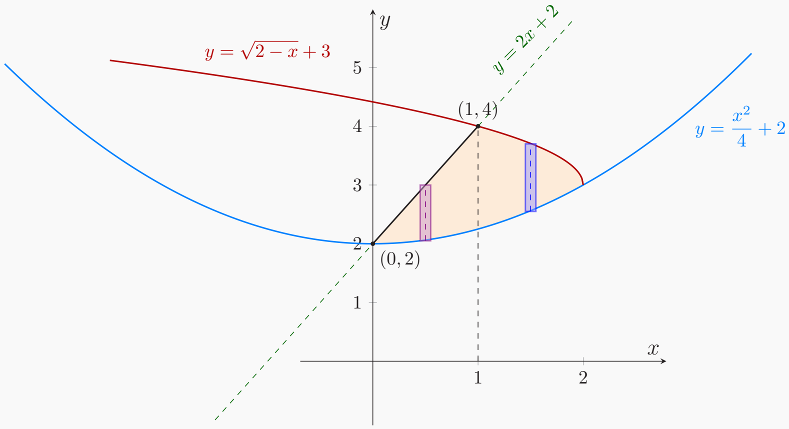


Figura 3.11

Finalmente, del gráfico podemos encontrar los límites de integración; y el área de la región está dado por:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left(2x+2-\left(\frac{x^2}{4}+2\right)\right)dx+\int_1^2\left(\sqrt{2-x}+3-\left(\frac{x^2}{4}+2\right)\right)dx \\ &= \int_0^1\left(2x-\frac{x^2}{4}\right)dx+\int_1^2\left(\sqrt{2-x}-\frac{x^2}{4}+1\right)dx \\ &= \left(x^2-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_0^1+\left(-\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{12}+x\right)\Bigg|_1^2 \\ &= \frac{11}{12}+\frac{13}{12}=2\ u^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.6. Calcule el área de la región limitada por las curvas:

$$y=3-x^2,\quad y=x^3-6x+3.$$

Solución. Siguiendo el proceso de los ejemplos anteriores, encontramos los puntos de intersección:

$$3-x^2=x^3-6x+3\Longrightarrow x^3-6x+x^2=0\Longrightarrow x\,(x-2)\,(x+3)=0.$$

Luego, los puntos de intersección son: $x=0$, $x=2$ y $x=-3$.

La gráfica de la región limitada por las curvas es

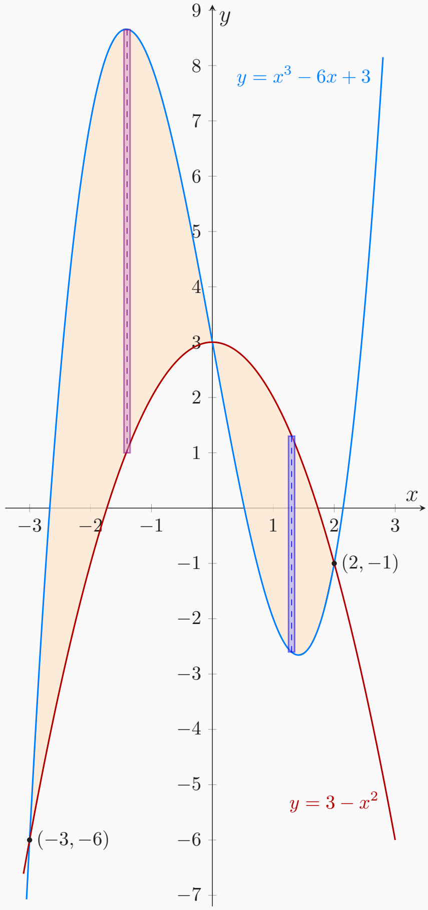


Figura 3.12

Del gráfico observamos que el área está dado por:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^{0} \left[x^3 - 6x + 3 - (3 - x^2)\right] dx \\
&\quad + \int_{0}^{2} \left[3 - x^2 - (x^3 - 6x + 3)\right] dx \\
&= \int_{-3}^{0} \left(x^3 - 6x - x^2\right) dx \\
&\qquad - \int_{0}^{2} \left(x^2 + x^3 - 6x\right) dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - 3x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{0} - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - 3x^2\right]_{0}^{2} \\
&= -\frac{9}{4} - \left(-\frac{16}{3}\right) \\
&= \frac{37}{12}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$A = \frac{37}{12}\, u^2.$$

Ejemplo 3.7. Halle el área de la región limitada por las gráficas de las siguientes ecuaciones:

$$y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen}(3x), \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

Solución. Antes de graficar las curvas y reconocer la región, determinamos los puntos de intersección:

$$\cos x = \cos(3x) \Longrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}(3x)$$

entonces

$$3x = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi n \quad \vee \quad 3x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Luego, tomando los x que se encuentra en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tenemos que la intersección ocurre en

$$x = \frac{\pi}{8} \quad \text{y} \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

Seguidamente, la gráfica de las curvas y la región limitada es

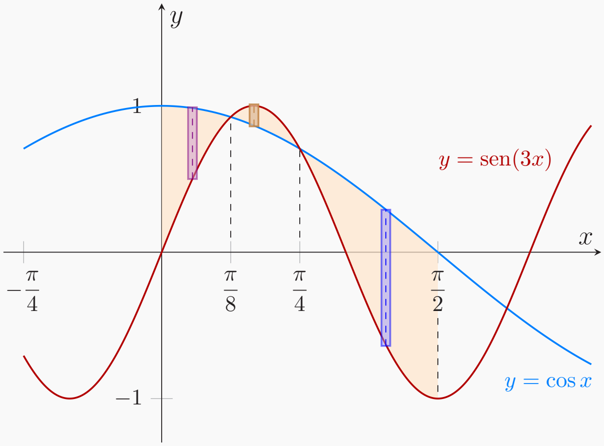


Figura 3.13

Entonces,

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\frac{\pi}{8}} (\cos x - \operatorname{sen}(3x))\, dx + \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{sen}(3x) - \cos x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \operatorname{sen}(3x))\, dx \\
&= \left[\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{3}\cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{8}} + \left[-\frac{1}{3}\cos(3x) - \operatorname{sen}(x)\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} + \left[\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{3}\cos(3x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}} - 1}{3} + \frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}} - \sqrt{2}}{3} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} + 1\right) \\
&= \frac{4\sqrt{2-\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} + 2}{3}\ u^2.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.8. Halle el área de la región comprendida entre el eje y, la curva

$$y = \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}}$$

y sus asíntotas.

Solución. Si tomamos los límites:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}} = -3 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}} = 3$$

se verifica fácilmente que las asíntotas de la curva son las rectas:

$$y = -3, \quad y = 3.$$

Luego, graficamos la curva, mostrando sus asíntotas y reconociendo la región, tal como se muestra en la Figura 3.14.

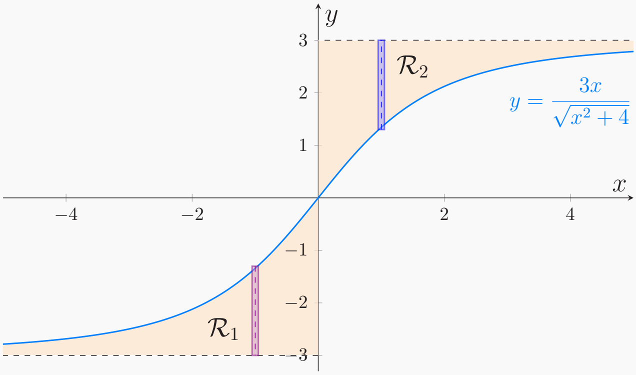


Figura 3.14

De la Figura 3.14, observamos que hay una simetría respecto al origen de coordenadas, por lo que,

$$A(\mathcal{R}) = A(\mathcal{R}_1) + A(\mathcal{R}_2) = 2A(\mathcal{R}_2)$$

Así, el área de la región está determinada por la siguiente integral:

$$A = 2\int_0^{+\infty}\left(3 - \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx$$

Luego,

$$\begin{aligned}
A &= 6\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx = 6\lim_{b\to+\infty}\left(x - \sqrt{x^2+4}\Big|_0^b\right)\\
&= 6\lim_{b\to+\infty}\left(b - \sqrt{b^2+4}+2\right) = 12 + 6\lim_{b\to+\infty}\left(b - \sqrt{b^2+4}\right)\\
&= 12 + 6\left[\lim_{b\to+\infty}\frac{-4}{b+\sqrt{b^2+4}}\right] = 12 + 6(0)\\
&= 12\ u^2.
\end{aligned}$$

Importante.

En ocasiones, resulta más apropiado tratar a x como una función de y. Es decir, si la región $\mathcal{R}$ está delimitada por las curvas con ecuaciones $x = g(y)$ (derecha) y $x = h(y)$ (izquierda), y por las líneas horizontales $y = c$, $y = d$, donde g y h son funciones continuas y $g(y) \geq h(y)$ para todo $y \in [c, d]$, entonces el área está dada por

$$\boxed{A(\mathcal{R}) = \int_c^d [g(y) - h(y)]dy.} \qquad (3.3)$$

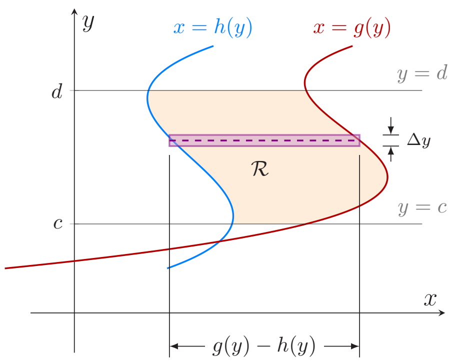


Figura 3.15

Ejemplo 3.9. Encuentre el área limitada por la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$.

Solución. Realizamos un esbozo de las curvas reconociendo la región, tal como se muestra en la Figura 3.16

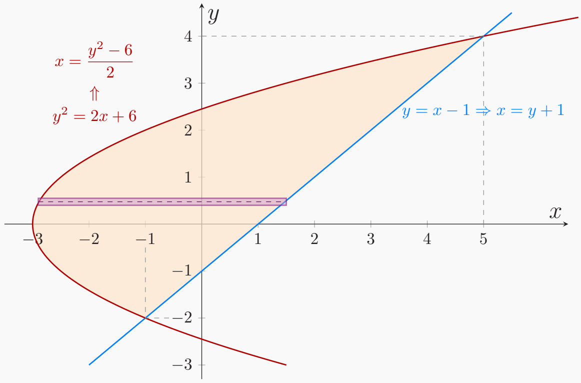


Figura 3.16

Observamos claramente que si queremos integrar con respecto de x, se tendrían dos integrales. Sin embargo, si integramos con respecto de y, obtenemos solo una. Por lo tanto, el área de la región es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{4} \left[(y+1) - \left(\frac{y^2-6}{2} \right) \right] dy \\ &= \int_{-2}^{4} \left[y + 7 - \frac{y^2}{2} \right] dy \\ &= \left[\frac{y^2}{2} + 7y - \frac{y^3}{6} \right]_{-2}^{4} \\ &= 36\ u^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.10. Halle el área de la región limitada por las curvas

$$y = -1 - \frac{5}{x-1} \quad \text{y} \quad x = (y^2+1)(y-4).$$

Solución. Graficamos las curvas y sombreamos la región limitada por las curvas.

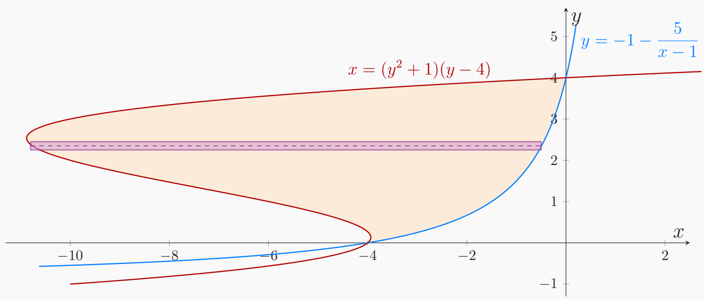


Figura 3.17

De la Figura 3.17, se observa claramente que es conveniente integrar respecto a y. Para ello despejamos x en

$$y = -1 - \frac{5}{x-1} \Longrightarrow x = 1 - \frac{5}{y+1}.$$

Luego, tenemos que el área está dado por:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 \left[\left(1 - \frac{5}{y+1}\right) - \left((y^2+1)(y-4)\right) \right] dy \\ &= \int_0^4 \left[-y^3 + 4y^2 - y - \frac{5}{y+1} + 5 \right] dy \\ &= \left[-\frac{y^4}{4} + \frac{4y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - 5\ln|y+1| + 5y \right]_0^4 \\ &= \left(\frac{100}{3} - 5\ln(5) \right) u^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.11. Calcule el área limitada por las gráficas de

$$x = \frac{y^2}{4} - 3 \quad \text{y} \quad x = y^2 - \frac{1}{16}y^4 + 1.$$

Solución. Encontrando los puntos de intersección en:

$$\frac{y^2}{4} - 3 = y^2 - \frac{1}{16}y^4 + 1$$

tenemos

$$y^4 - 12y^2 - 64 = 0 \Longrightarrow (y^2+4)(y+4)(y-4) = 0$$

Así, las intersecciones se dan en $y = -4$, $y = 4$.

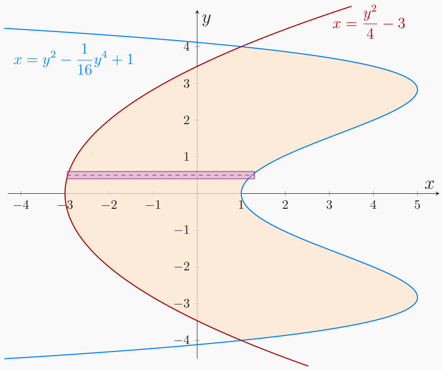


Figura 3.18

De la Figura 3.18, se tiene que el área de la región es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^4 \left[y^2 - \frac{1}{16}y^4 + 1 - \left(\frac{y^2}{4} - 3 \right) \right] dy \\ &= \int_{-4}^4 \left[\frac{3y^2}{4} - \frac{y^4}{16} + 4 \right] dy \\ &= \left[\frac{y^3}{4} - \frac{y^5}{80} + 4y \right]_{-4}^4 \\ &= \frac{192}{5} u^2. \end{aligned}$$

Para continuar con la exploración detallada sobre área entre dos curvas, los lectores pueden consultar los libros titulados Calculus: Early Transcendentals (Tan, 2010) y Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas (Zill, 2011).

Ejemplo 3.12. Calcule el área de región limitada por la gráfica de la curva

$$x = \sqrt{y}e^{-y^3}$$

y su asíntota.

Solución. Si tendemos el límite

$$\lim_{y\to+\infty} \sqrt{y}e^{-y^3} = 0$$

notamos que la asíntota a la gráfica es la recta $x = 0$. Además, se prueba fácilmente que la curva pasa por el punto $(0, 0)$. Luego,

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{+\infty} \sqrt{y}e^{-y^3}\,dy \\
&= \int_0^{+\infty} u^{1/6}e^{-u}\frac{du}{3u^{2/3}}, \qquad \text{usando el cambio } u = y^3 \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{2}-1}e^{-u}du \\
&= \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \qquad \text{por función Gamma} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{3}\ u^2.
\end{aligned}$$

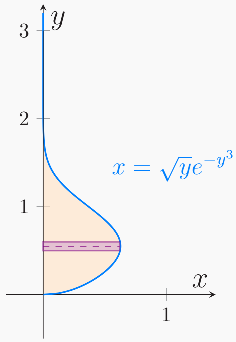


Figura 3.19

Ejercicios propuestos 3.1.

1. En los siguientes ejercicios, esboce la región limitada por las curvas de las ecuaciones dadas y encuentre el área de dicha región.

   a) $y = \dfrac{x^2}{2} + 3, \quad y = x - 1, \quad x = -1, \quad x = 1.$

   b) $y = x^2 - 2x, \quad y = -e^x - 1, \quad x = -1, \quad x = 1.$

   c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}} + 2$, con $0 \leq x < 2 \quad y = e^{-2x}, \quad x = 0, \quad x = \dfrac{3}{2}.$

   d) $x = 2y^2 + 1, \quad x = 0, \quad y = -\dfrac{1}{2}, \quad y = 2.$

   e) $y = e^x$ y $y = \ln x$.

   f) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}, \quad y = x^3.$

   g) $y = \dfrac{x(x - 6)}{x - 8}$ y el eje x.

   h) $y = 3\sqrt{x} - x + 1, \quad y = -\sqrt{x} + 1.$

   i) $y = 2x\sqrt{8 - x^2}, \quad y = 0.$

   j) $x = y^2 - 2y, \quad x = 4y - y^2.$

   k) $y^2 = 4x$ y $4x + y - 6 = 0$.

   l) $y = x^3 - 1$ y $x - y - 1 = 0$.

   m) $y = x^3 - 6x^2 + 9x, \quad y = -x^2 + 3x.$

   n) $y = x^2 - 4x + 3, \quad y = -x^2 + 2x + 3.$

2. Calcule el área de la región limitada por la curva $\mathcal{C}: y = x - \dfrac{x^2}{2} + 4$ y las rectas tangentes a dicha curva, en los puntos donde $\mathcal{C}$ corta al eje x.

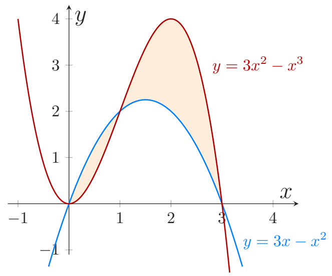
3. Determine el área de la región $\mathcal{R}$, limitada por la recta $x = 0$, la curva $y = (x-1)^2$ y su recta tangente en el punto $(3, 4)$.

4. Halle el área de la región limitada por las curvas

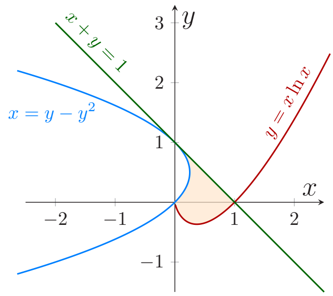
$$3y = -\sqrt{4-x}, \quad x = y^2(y-4) \quad \text{y} \quad 4y = (x-4)^2.$$

5. Encuentre el área de la región sombreada y encerrada por las curvas dadas.

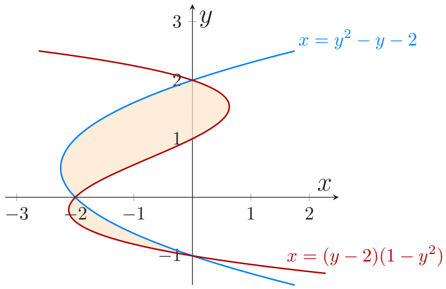
a)



c)



b)



6. Grafique y calcule el área de la región encerrada por las curvas:

$$y = 2x - x^2, \quad y = x^3 - x^2 - 2x.$$

7. Determine el área de la región limitada por las gráficas de

$$x = 2y^2 - 8 \quad \text{y} \quad x = 8 + 2y - y^2.$$

8. Calcule el área de la región limitada por las gráficas de

$$y = \frac{(x-2)^2}{9} - 1, \quad 5y = 2x + 2 \ \text{ y } \ x = 4.$$

9. Determine el área de la región limitada por las gráficas de

$$y = \frac{x^2}{2} - 2x + 1, \quad y = \frac{x}{3} + 1 \ \text{ y } \ x + y = 5.$$

3.2. Volumen de un sólido de revolución

Un sólido de revolución se obtiene al girar una región en el plano alrededor de una recta en el mismo plano. Esta recta recibe el nombre de eje de revolución o eje de giro. Por ejemplo, si la región $\mathcal{R}$ como se muestra en la Figura 3.20 se gira alrededor del eje y, obtenemos el sólido de revolución E mostrado en la Figura 3.21. Aquí, el eje de revolución del sólido es el eje y.

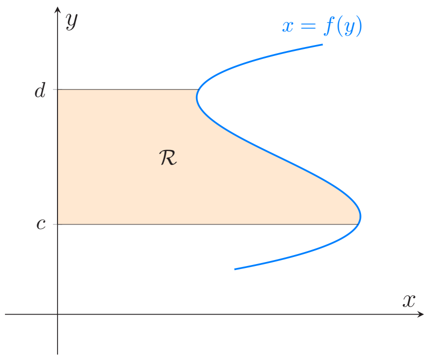


Figura 3.20: Región en el plano.

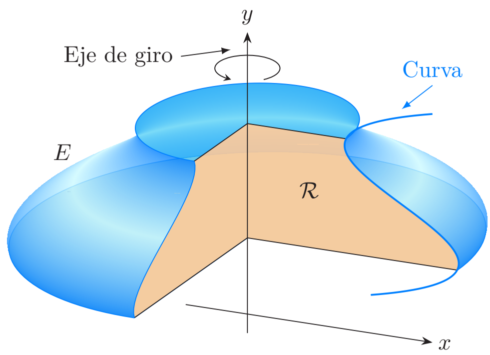


Figura 3.21: Sólido obtenido al girar la región $\mathcal{R}$ alrededor del eje y.

3.2.1. Método del disco

Para definir el volumen de un sólido de revolución y desarrollar un método para calcularlo, consideremos el sólido E generado por la región $\mathcal{R}$ mostrada en la Figura 3.22. Sea $\mathbf{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición regular de $[a, b]$. Esta partición divide la región $\mathcal{R}$ en n subregiones no superpuestas $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n$. Cuando estas regiones se giran alrededor del eje x, forman n sólidos no superpuestos $E_1, E_2, \ldots, E_n$, cuya unión es E. (Ver Figura 3.23).

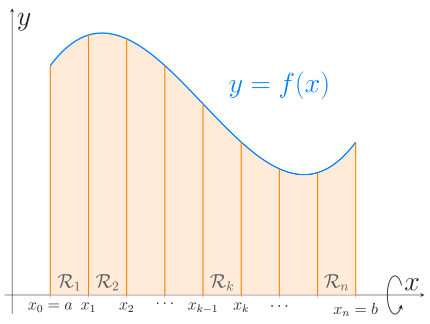


Figura 3.22: Región $\mathcal{R}$.

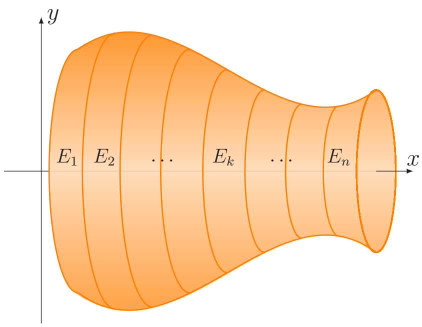


Figura 3.23: Sólidos $E_1, E_2, ..., E_n$.

Fijémonos en la parte del sólido de revolución que se genera por la región $\mathcal{R}_k$ bajo la gráfica de f en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Esta región se muestra ampliada para mayor claridad en la Figura 3.24. Si t_k es un punto de evaluación en $[x_{k-1}, x_k]$, entonces el área de $\mathcal{R}_k$ se puede aproximar por un rectángulo de altura $f(t_k)$ y ancho $\Delta x = (b-a)/n$. Si este rectángulo se gira alrededor del eje x, genera el disco D_k con radio $f(t_k)$ y ancho Δx; por lo tanto, su volumen es

$$\Delta V_k = \pi\left[f(t_k)\right]^2 \Delta x.$$

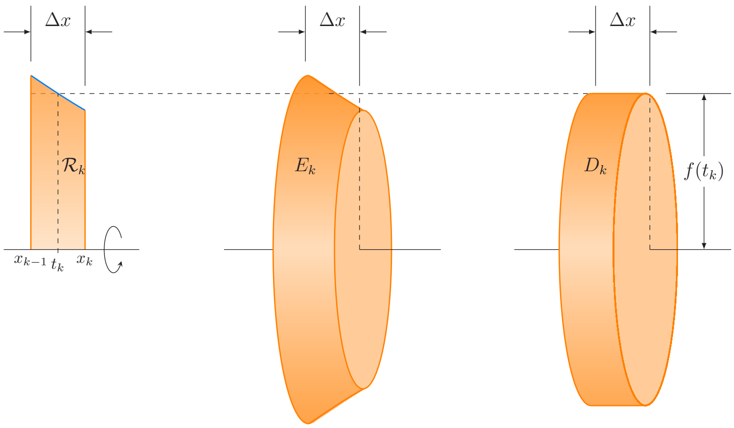


Figura 3.24: El volumen de E_k es aproximado por el disco D_k.

El volumen del disco D_k otorga una aproximación del volumen del sólido E_k. Entonces, al aproximar el volumen de cada sólido $E_1, E_2, \ldots, E_n$ con el volumen de un disco correspondiente $D_1, D_2, \ldots, D_n$, vemos que el volumen total del sólido E es aproximado por la suma de los volúmenes de estos discos. (Ver Figura 3.25). Así, tenemos la siguiente aproximación del volumen total:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} \pi\left[f(t_k)\right]^2 \Delta x,$$

donde ΔV_k representa el volumen del disco D_k, $f(t_k)$ es la función que describe el radio del disco en el punto t_k, y Δx es la altura del disco, que corresponde a una pequeña partición del intervalo en el eje x.

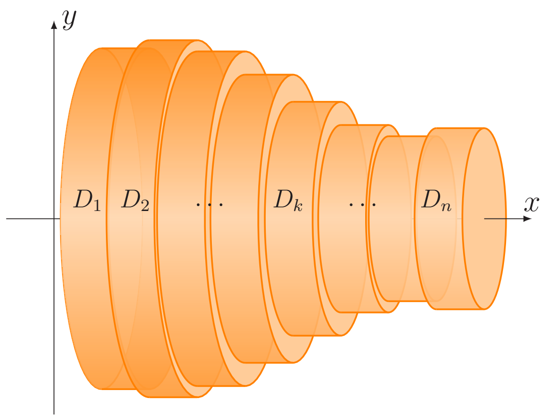


Figura 3.25: Aproximación del volumen del sólido E, mediante la suma de los discos $D_1, \ldots, D_n$.

Al reducir el tamaño de cada partición, la aproximación se vuelve cada vez más precisa. Luego, con esta técnica de sumas de Riemann, estamos en realidad integrando la función

$\pi\,[f(x)]^2$ sobre el intervalo dado, lo que nos brinda una herramienta para calcular volúmenes de sólidos de revolución.

Definición 3.2: Volumen de un sólido de revolución.

Sea f una función continua y no negativa en $[a,b]$, y sea $\mathcal{R}$ la región bajo la gráfica de la función f en el intervalo $[a,b]$. El volumen del sólido de revolución generado por la rotación de $\mathcal{R}$ alrededor del eje x está dado por:

$$\boxed{V = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\pi\,[f(t_k)]^2\,\Delta x = \int_a^b \pi\,[f(x)]^2\,dx.} \tag{3.4}$$

De la misma manera que hicimos para encontrar el área bajo una curva al considerar el área de un rectángulo representativo, podemos recordar la Fórmula (3.4) al examinar el volumen del disco generado al girar un rectángulo representativo alrededor del eje x.

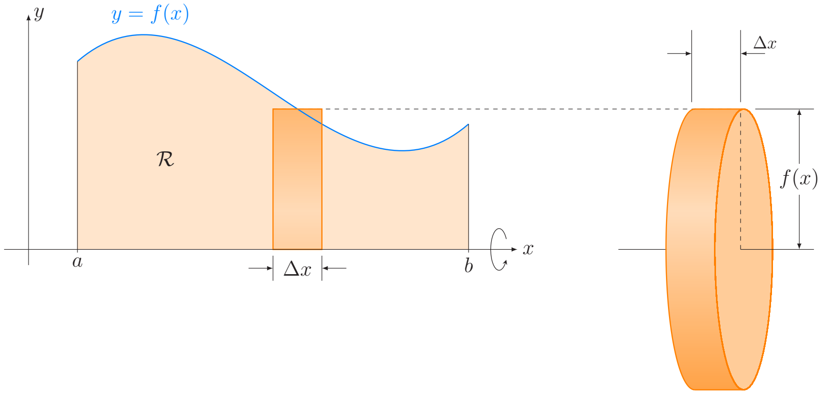


Figura 3.26: Rotación de rectángulo representativo alrededor del eje x.

Procedemos de esta forma:

- Luego de graficar la región $\mathcal{R}$ bajo el gráfico de $y=f(x)$ en $[a,b]$, trazamos un rectángulo vertical representativo con altura $f(x)$, correspondiente a un valor de x en $[a,b]$, y con ancho Δx (Ver Figura 3.26).

- Siguiendo con el proceso, consideramos que el disco tiene volumen

$$\Delta V = \pi[f(x)]^2\Delta x = \pi y^2\Delta x$$

como un elemento de volumen de un sólido. Observemos ahora que la expresión junto a $\Delta x, \pi y^2$, es el integrando en la ecuación (3.4).

- Finalmente, obtenemos el **Método del Disco** para encontrar el volumen de un sólido de revolución, cuando la región $\mathcal{R}$ gira alrededor del eje x:

$$\boxed{V = \pi\int_a^b [f(x)]^2dx = \pi\int_a^b y^2dx, \quad y\geq 0.} \tag{3.5}$$

Importante. De ahora en adelante, cada vez que presentemos un nuevo concepto o deduzcamos una fórmula usando sumas de Riemann, recurriremos con frecuencia a un enfoque intuitivo. Este enfoque implica examinar un elemento representativo del término general de la suma de Riemann (sin los subíndices) para facilitar la comprensión de la fórmula deducida. Al adoptar este método, no solo hacemos que las fórmulas sean más fáciles de recordar, sino que también logramos una comprensión más profunda y visual de cómo éstas se construyen a partir de sus componentes fundamentales.

Ejemplo 3.13. Halle el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región limitada por la gráfica de la curva $y = \sqrt{4 - x^2}$ y el eje x, alrededor de la recta $y = 0$.

Solución. Para hallar el volumen del sólido de revolución, utilizamos el método de discos.

La región a rotar está limitada por el eje x y la curva $y = \sqrt{4 - x^2}$. A partir de la Figura 3.27, vemos que el radio del disco representativo correspondiente a un valor particular de x en $[-2, 2]$ (la altura del rectángulo representativo) es y. Por lo tanto, el volumen del disco es

$$\Delta V = \pi y^2 \Delta x$$
$$= \pi \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 \Delta x = \pi(4 - x^2)(\Delta x)$$

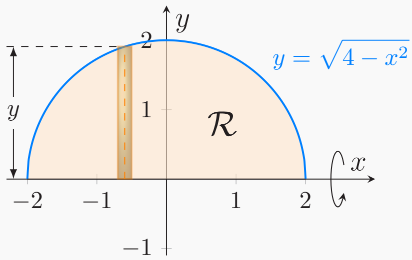


Figura 3.27

Así, el volumen V del sólido de revolución generado al rotar la región $\mathcal{R}$ alrededor del eje x está dado por:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx \\ &= \pi \left(\left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2} \right) \\ &= \pi \left(16 + \frac{16}{3}\right) = \frac{32\pi}{3}\ u^3. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.14. Calcule el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región limitada por la gráfica de la curva $y = -(x - 2)e^x$, con $x \in [-2, 2]$ y la recta $y = 0$, alrededor del eje x.

Solución. Para determinar el volumen del sólido de revolución, utilizamos el método de discos. La región a rotar está delimitada por el eje x, la curva $y = -(x - 2)e^x$ y las rectas $x = -2$ y $x = 2$. Luego, tomando un rectángulo representativo como en la Figura 3.28, tenemos que el volumen del disco generado es

$$\begin{aligned} \Delta V &= \pi \left[-(x - 2)e^x\right]^2 \Delta x \\ &= \pi(x - 2)^2 e^{2x} \Delta x. \end{aligned}$$

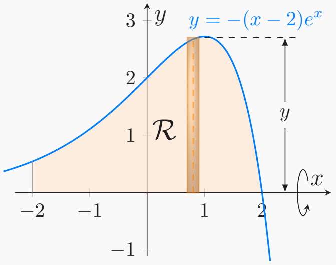


Figura 3.28

Por lo tanto, el volumen V del sólido de revolución generado al rotar la región $\mathcal{R}$ alrededor del eje x está dado por:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^{2} (x-2)^2 e^{2x} dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} x^2 - \frac{5}{2} e^{2x} x + \frac{13}{4} e^{2x} \right]_{-2}^{2} \\ &= \pi \left(\frac{1}{4} e^4 - \frac{41}{4} e^{-4} \right) u^3. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.15. Encuentre el volumen del sólido obtenido al rotar alrededor de la recta $y=0$, la región delimitada por la curva $y = (\sqrt{x+3})e^{-(x+3)}$ y el eje x.

Solución. Para encontrar el volumen del sólido de revolución, utilizaremos nuevamente el método de discos.

A partir de la Figura 3.29, observamos que el radio del disco representativo correspondiente a un valor particular de x en el intervalo de $[-3, +\infty[$ es y. Por lo tanto, el volumen del disco es

$$\begin{aligned} \Delta V &= \pi y^2 \Delta x \\ &= \pi \left[(\sqrt{x+3}) e^{-(x+3)} \right]^2 \Delta x \\ &= \pi \left(\sqrt{x+3} \right)^2 e^{-2(x+3)} (\Delta x) \\ &= \pi \,(x+3)\, e^{-2(x+3)} (\Delta x) \end{aligned}$$

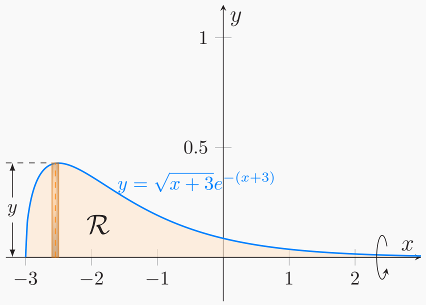


Figura 3.29

Por lo tanto, el volumen V del sólido de revolución generado al rotar la región $\mathcal{R}$ alrededor del eje x está dado por:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-3}^{+\infty} (x+3)e^{-2(x+3)} dx = \pi \int_{0}^{+\infty} \frac{t}{4} e^{-t} dt \quad (\text{usando } t = 2(x+3)) \\ &= \frac{\pi}{4} \lim_{b \to +\infty} \int_0^b t e^{-t} dt = \frac{\pi}{4} \lim_{b \to +\infty} \left(-e^{-t} t - e^{-t} \right) \Big|_0^b \\ &= \frac{\pi}{4} \lim_{b \to +\infty} \left(-b e^{-b} - e^{-b} + 1 \right) = \frac{\pi}{4} \, u^3. \end{aligned}$$

Importante. (Cuando el eje de giro es una recta $y=k$). Sea f una función continua sobre $[a,b]$, para todo $x \in [a,b]$ y k una constante. Para una región plana $\mathcal{R}$ limitada por la gráfica de f y las rectas $y=k$, $x=a$ y $x=b$ tal como se muestra en la Figura 3.30, el volumen V del sólido de revolución generado al rotar la región $\mathcal{R}$ alrededor de la recta horizontal $y = k$ está dado por:

$$V = \pi \int_a^b [f(x) - k]^2 dx = \pi \int_a^b [y - k]^2 \, dx. \tag{3.6}$$

donde $|f(x) - k|$ es el radio de giro.

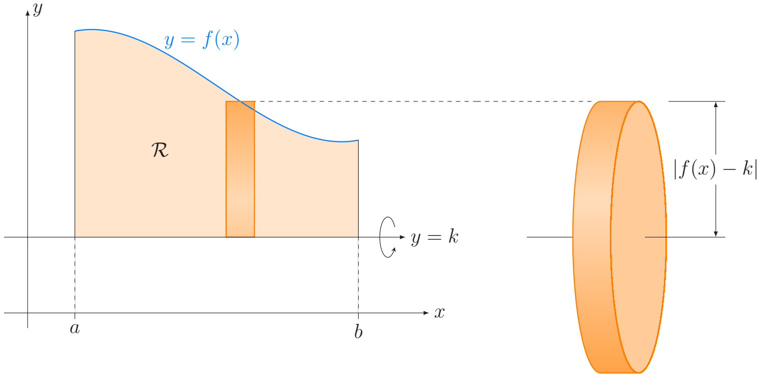


Figura 3.30: Rotación del rectángulo representativo alrededor de la recta $y = k$.

La fórmula proporcionada en la ecuación (3.6) es más general que la presentada en (3.5), ya que cuando $k = 0$, el eje de rotación coincide con el eje x.

Ejemplo 3.16. Halle el volumen del sólido que genera la región encerrada por

$$y = 2x^2, \quad y = 1,$$

que gira alrededor de la recta $y = 1$.

Solución. Hallemos la intersección de la curva con la recta: $2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Por otro lado, el radio de giro es

$$\text{Radio} = |y - k| = |(2x^2) - 1| = 1 - 2x^2.$$

Luego, el volumen V del sólido de revolución generado al rotar la región $\mathcal{R}$ alrededor de la recta $y = 1$ está dado por:

$$V = \pi \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (2x^2 - 1)^2 dx$$

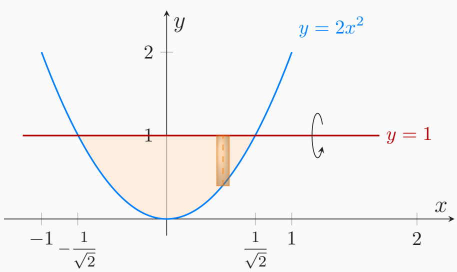


Figura 3.31

Calculando la integral:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (4x^4 - 4x^2 + 1)\, dx \\ &= \pi \left[\frac{4x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + x \right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{15}\pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución es $\dfrac{8\sqrt{2}}{15}\pi\ u^3$.

Ejemplo 3.17. Calcule el volumen del sólido que genera la región limitada por

$$y = x^{2/3} + 2, \quad y = 2, \quad x = -8 \quad \text{y} \quad x = 1,$$

y que gira alrededor de la recta $y = 2$.

Solución. Graficando la región $\mathcal{R}$ la cual está limitada por las ecuaciones

$$y = x^{2/3} + 2, \quad y = 2, \quad x = -8 \quad \text{y} \quad x = 1.$$

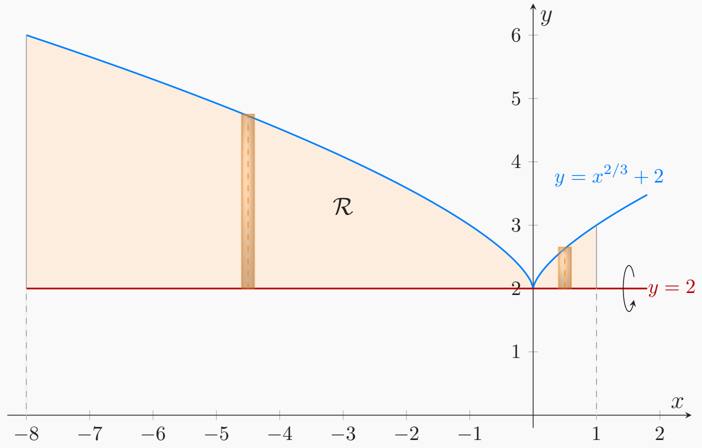


Figura 3.32

El radio del disco representativo, al girar alrededor de la recta $y = 2$, es:

$$\text{Radio} = y - 2 = x^{2/3} + 2 - 2 = x^{2/3}$$

Luego, el volumen V del sólido de revolución generado al rotar la región $\mathcal{R}$ alrededor de la recta $y = 2$ está dado por:

$$\begin{aligned} V &= \pi \left(\int_{-8}^{0} (x^{2/3})^2 dx + \int_{0}^{1} (x^{2/3})^2 dx \right) \\ &= \pi \left(\frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} \Big|_{-8}^{0} + \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} \Big|_{0}^{1} \right) \\ &= \pi \left(\frac{3}{7} 2^7 + \frac{3}{7} \right) = \frac{387}{7}\pi\ u^3. \end{aligned}$$

Observamos que la ecuación (3.6) sólo se utiliza para calcular el volumen de un sólido de revolución cuando el eje de rotación es paralelo al eje x. No obstante, ahora procederemos a deducir una fórmula para determinar el volumen V de un sólido de revolución obtenido al girar una región alrededor de una recta paralela al eje y. Sea g una función continua en el intervalo $[c, d]$, para todo $y \in [c, d]$ y h una constante real. Consideremos la región $\mathcal{R}$ delimitada por la gráfica de la función $x = g(y)$ y las rectas $y = c$, $y = d$ y $x = h$, como se muestra en la Figura 3.33.

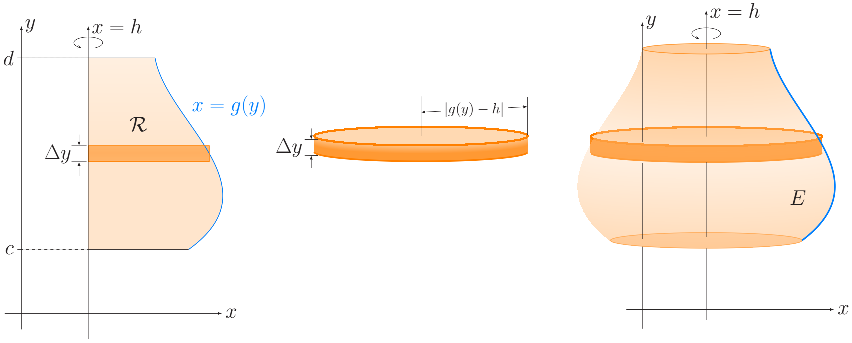


Figura 3.33: Sólido de revolución E, obtenido al girar la región $\mathcal{R}$ alrededor de la recta $x = h$.

Cuando $\mathcal{R}$ es girada alrededor de la recta $x = h$, se genera un sólido de revolución E. Luego, tomando un rectángulo horizontal representativo (perpendicular al eje de rotación) con longitud $|x - h|$ o $|g(y) - h|$, y ancho Δy se produce un disco como en la Figura 3.33 con volumen

$$\Delta V = \pi[g(y) - h]^2 \Delta y = \pi(x - h)^2 \Delta y.$$

Finalmente, al sumar los volúmenes de estos discos y tomar el límite, obtenemos la siguiente fórmula integral:

$$\boxed{V = \pi \int_c^d [g(y) - h]^2 dy = \pi \int_c^d [x - h]^2 \, dy} \tag{3.7}$$

donde $|g(y) - h|$ es el radio de giro.

Ejemplo 3.18. Determine el volumen del sólido de revolución generado al rotar, alrededor del eje y, la región en el primer cuadrante, limitada por la gráfica de la curva $y = x^2$, la recta $y = 4$ y el eje y.

Solución. Para calcular el volumen del sólido de revolución, utilizaremos la fórmula (3.7) ya que el eje de giro es paralelo al eje y.

De la Figura 3.34, observamos que al tomar un rectángulo representativo de largo x, donde $x=\sqrt{y}$, tenemos que el volumen del disco es generado es

$$\begin{aligned}\Delta V &= \pi(x-0)^2\Delta y\\ &= \pi\left(\sqrt{y}\right)^2\Delta y = \pi y \Delta y\end{aligned}$$

De esta manera, el volumen V del sólido de revolución generado al rotar la región $\mathcal{R}$ alrededor del eje y está dado por:

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_0^4 \left(\sqrt{y}\right)^2\,dy = \pi\int_0^4 y\,dy\\ &= \pi\left(\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4\right)\\ &= \pi\left(\frac{16}{2}-0\right) = 8\pi\ u^2.\end{aligned}$$

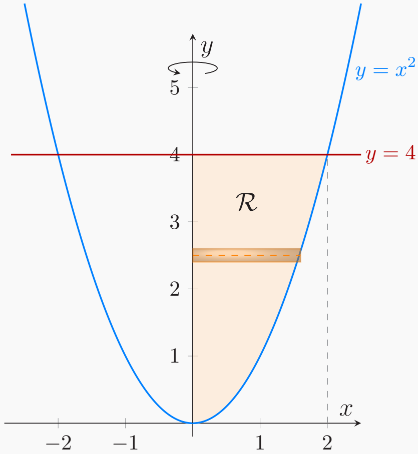


Figura 3.34

Ejemplo 3.19. Calcule el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región limitada por la curva $y^2=2(x-2)$ y las rectas $y=2$, $y=-3$, y $x=-1$, alrededor de la recta $x=-1$.

Solución. La gráfica de la región es

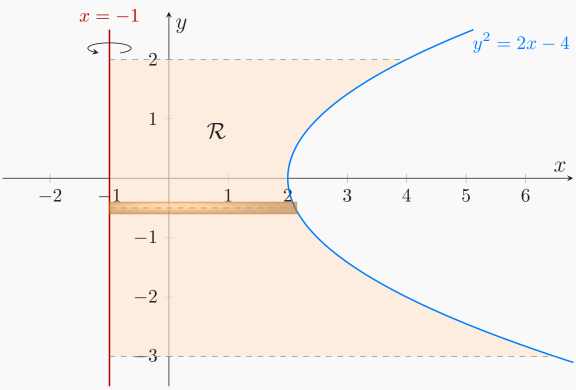


Figura 3.35

Si despejamos x de $y^2=2x-4$, tenemos $x=\dfrac{y^2}{2}+2$. Así, de la Figura 3.35 el radio del disco al girar alrededor de la recta $x=-1$ es:

$$\text{Radio} = \left|\left(\frac{y^2}{2}+2\right)-(-1)\right| = \frac{y^2}{2}+3.$$

Por lo que, el volumen V del sólido de revolución es:

$$V=\pi\int_{-3}^{2}\left(\frac{y^2}{2}+3\right)^2\,dy.$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-3}^{2} \left(\frac{y^4}{4} + 3y^2 + 9 \right) dy \\
&= \pi \left[\frac{y^5}{20} + y^3 + 9y \right]_{-3}^{2} \\
&= \frac{375\pi}{4}\ u^3.
\end{aligned}
$$

3.2.2. Método del anillo

El método del anillo, también conocido como el método de las arandelas, es una extensión del método del disco para calcular el volumen de sólidos de revolución. Este método es particularmente útil cuando la región a rotar tiene un agujero en el centro, como un anillo o una arandela.

Caso 1: Cuando el eje de giro paralelo al eje x

Cuando el eje de rotación es paralelo al eje x, el volumen del sólido de revolución se puede calcular considerando una sección transversal perpendicular al eje de rotación. Al girar esta sección se genera un sólido que será un anillo representativo con un radio externo y un radio interno. (Ver Figura 3.36).

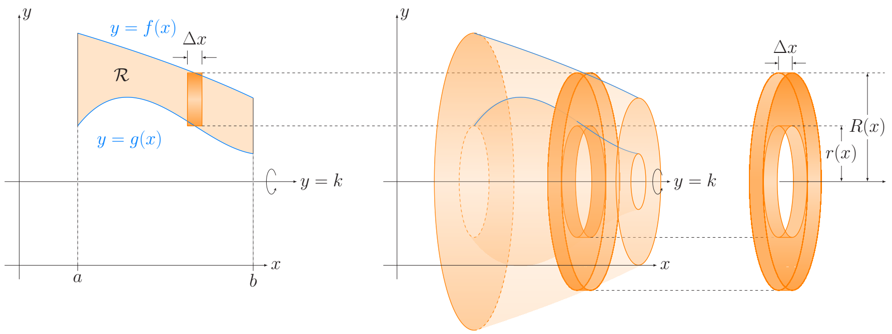


Figura 3.36: Anillo representativo.

De la Figura 3.36 consideramos dos funciones $y = f(x)$, $y = g(x)$, continuas en el intervalo $[a, b]$, donde $f(x) \geq g(x)$. Queremos encontrar una fórmula que nos permita calcular el volumen del sólido de revolución generado al rotar, alrededor del eje $y = k$, la región delimitada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$. Para ello tomamos la sección perpendicular al eje $y = k$ (eje de giro) donde $R(x) = |f(x) - k|$ es el radio exterior y $r(x) = |g(x) - k|$ es el radio interior; así, el volumen del anillo correspondiente es:

$$
\Delta V = \pi (R(x))^2 \Delta x - \pi (r(x))^2 \Delta x = \pi \left[(R(x))^2 - (r(x))^2 \right] \Delta x
$$

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución es

$$
\boxed{V = \pi \int_a^b \left[(R(x))^2 - (r(x))^2 \right] dx = \pi \int_a^b \left[(f(x) - k)^2 - (g(x) - k)^2 \right] dx.} \tag{3.8}
$$

Ejemplo 3.20. Halle el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer girar alrededor de la recta $y = -1$, la región delimitada por las curvas

$$y = -x^2 - 3x + 6 \quad \text{y} \quad x + y = 3.$$

Solución. Encontrando los puntos de intersección de la curva con la recta:

$$-x^2 - 3x + 6 = 3 - x \Longrightarrow x = -3, \quad x = 1.$$

Además, los radios exterior e interior, respectivamente, son:

$$\begin{aligned} R(x) &= |-x^2 - 3x + 6 - (-1)| \\ &= |7 - x^2 - 3x| \end{aligned}$$

y

$$r(x) = |3 - x - (-1)| = |4 - x|.$$

Luego, de la Figura 3.37, el volumen V del sólido de revolución, obtenido al girar la región $\mathcal{R}$, alrededor de la recta $y = -1$ está dado por:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-3}^{1} \left[(R(x))^2 - (r(x))^2 \right] dx \\ &= \pi \int_{-3}^{1} \left[(7 - x^2 - 3x)^2 - (4 - x)^2 \right] dx \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{2} - 2x^3 - 17x^2 + 33x \right]_{-3}^{1} \\ &= \frac{704}{5} \pi \ u^3. \end{aligned}$$

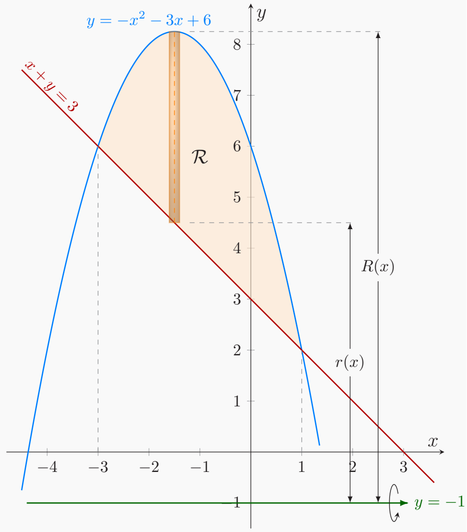


Figura 3.37

Ejemplo 3.21. Halle el volumen del sólido de revolución generado al girar, alrededor de $y = 0$, la región que está sobre el eje x y limitada por las gráficas de las ecuaciones:

$$3x^2 + 4y^2 = 28 \quad \text{y} \quad 2y = x^2.$$

Solución. Primero encontramos los puntos de intersección de las curvas

$$3x^2 + 4y^2 = 28 \quad \text{y} \quad 2y = x^2.$$

Esto es,

$$3x^2 + 4\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = 28 \Longrightarrow 3x^2 + x^4 - 28 = 0.$$

Resolviendo la última ecuación

$$(x+2)(x-2)\left(x^2+7\right) = 0$$

tenemos $x = -2$ y $x = 2$. Además, de la Figura 3.38 tenemos que los radios exterior e interior, respectivamente, son:

$$R(x) = \left|\sqrt{\frac{28-3x^2}{4}} - 0\right| = \sqrt{\frac{28-3x^2}{4}}$$

y

$$r(x) = \left|\frac{x^2}{2} - 0\right| = \frac{x^2}{2}.$$

Luego, el volumen V del sólido de revolución, obtenido al girar la región $\mathcal{R}$, alrededor de la recta $y = 0$ es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^{2} \left[(R(x))^2 - (r(x))^2\right] dx \\ &= \pi \int_{-2}^{2} \left[\left(\sqrt{\frac{28-3x^2}{4}}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2}\right)^2\right] dx \\ &= \pi \int_{-2}^{2} \left[7 - \frac{3x^2}{4} - \frac{x^4}{4}\right] dx \\ &= \pi \left[7x - \frac{x^3}{4} - \frac{x^5}{20}\right]_{-2}^{2} \\ &= \frac{104}{5}\pi\ u^3. \end{aligned}$$

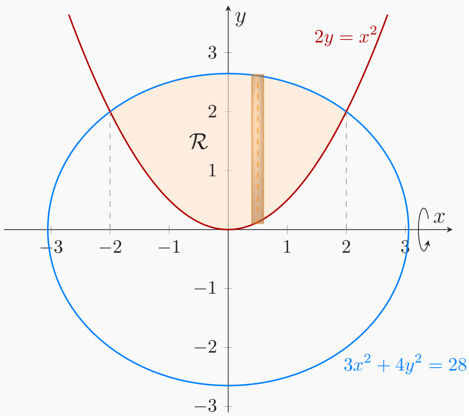


Figura 3.38

Ejemplo 3.22. Calcule el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer girar la región en el primer cuadrante, y encerrada por las curvas $y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 5$, $y = x - 1$ y el eje x, alrededor de la recta $y = 4$.

Solución. Iniciamos con encontrar todos los puntos de intersección entre las curvas y rectas que encierran la región:

$$\frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 5 = x - 1$$

resolviendo esta última ecuación tenemos que la curva y la recta se cortan en $x = 4$ y $x = 1$. Además, si resolvemos

$$\frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 5 = 0$$

tenemos que la curva se corta con el eje x en $x = \frac{10}{3}$ y $x = 1$.

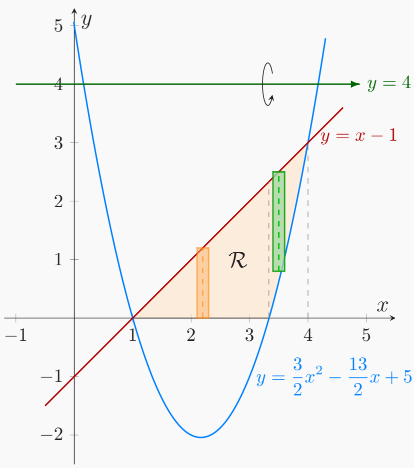


Figura 3.39

Así, de la Figura 3.39, tenemos que el volumen del sólido de revolución generado es la suma de dos volúmenes:

$$V = V_1 + V_2,$$

donde

$$\Delta V_1 = \pi\left[R_1^2(x) - r_1^2(x)\right]$$

y

$$\Delta V_2 = \pi\left[R_2^2(x) - r_2^2(x)\right]$$

Luego, el volumen V del sólido de revolución, obtenido al girar la región $\mathcal{R}$, alrededor de la recta $y = 4$ está dado por:

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_1^{\frac{10}{3}}\left[(R_1(x))^2 - (r_1(x))^2\right]dx + \pi\int_{\frac{10}{3}}^4\left[(R_2(x))^2 - (r_2(x))^2\right]dx\\
&= \pi\int_1^{\frac{10}{3}}\left[(4-0)^2 - (5-x)^2\right]dx + \pi\int_{\frac{10}{3}}^4\left[\left(4-\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 5\right)\right)^2 - (5-x)^2\right]dx\\
&= \pi\int_1^{\frac{10}{3}}\left[16 - (5-x)^2\right]dx + \pi\int_{\frac{10}{3}}^4\left[\left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{2}x - 1\right)^2 - (5-x)^2\right]dx\\
&= \pi\left[-9x + 5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^{\frac{10}{3}} + \left[\frac{9}{20}x^5 - \frac{39}{8}x^4 + \frac{59}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 24x\right]_{\frac{10}{3}}^4\\
&= \frac{1421}{81}\pi + \frac{518}{135}\pi\\
&= \frac{8659\pi}{405}\ u^3 \approx 67.168\ u^3.
\end{aligned}$$

Caso 2: Cuando el eje de giro es paralelo al eje y

Cuando el eje de rotación es paralelo al eje y, el volumen del sólido de revolución se puede calcular considerando una sección transversal perpendicular al eje de rotación. Esta sección será un anillo con un radio externo y un radio interno. (Ver Figura 3.40).

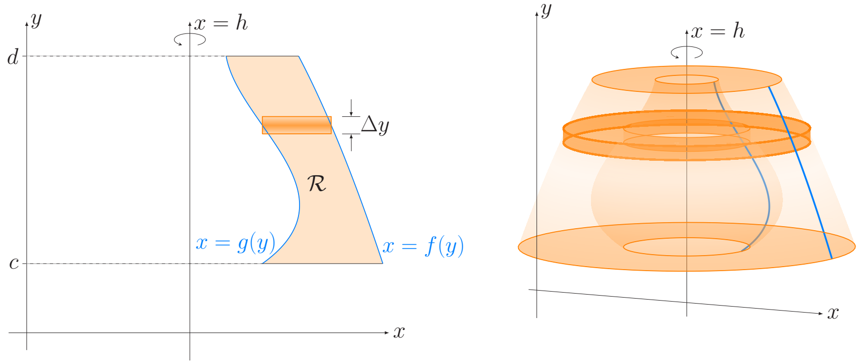


Figura 3.40

Sean $x = f(y)$ y $x = g(y)$ dos funciones continuas en el intervalo $[c, d]$, tal que $f(y) \geq g(y)$. De la Figura 3.40 el rectángulo representativo, al girar alrededor del eje $x = h$, genera un anillo radio de:

$$\text{Radio exterior} = |f(y) - h|, \quad \text{Radio interior } = |g(y) - h| \ \text{ y } \ \text{Altura } = \Delta y.$$

Entonces

$$\Delta V = \pi \left[(f(y) - h)^2 - (g(y) - h)^2 \right] \Delta y$$

y el volumen del sólido de revolución es

$$\boxed{V = \pi \int_c^d \left[(f(y) - h)^2 - (g(y) - h)^2 \right] dy.} \tag{3.9}$$

Ejemplo 3.23. Calcule el volumen del sólido de revolución generado por la región delimitada por las curvas $x = y^2$ y $x = 2y$, con $y \in [0, 2]$, rotada alrededor de la recta $x = 5$.

Solución. Al resolver el sistema

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = 2y \end{cases}$$

tenemos que los puntos de intersección ocurren en $y = 0$, $y = 2$.

La región del plano limitada por la parábola se muestra en la Figura 3.41. Como los radios interior $r(y)$ y exterior $R(y)$ de cada sección transversal son respectivamente

$$r(y) = |2y - 5| = 5 - 2y, \ \ y \in [0, 2]$$
$$R(y) = |y^2 - 5| = 5 - y^2, \ \ y \in [0, 2]$$

Por lo tanto, el volumen V del sólido de revolución está dado por

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 \left[(R(y))^2 - (r(y))^2 \right] dy \\ &= \pi \int_0^2 \left[(5 - y^2)^2 - (5 - 2y)^2 \right] dy \\ &= \pi \int_0^2 \left[y^4 - 14y^2 + 20y \right] dy \\ &= \pi \left[\frac{y^5}{5} - \frac{14y^3}{3} + 10y^2 \right]_0^2 = \frac{136}{15}\pi \end{aligned}$$

Luego, el volumen del sólido es $\dfrac{136}{15}\pi \ u^3$.

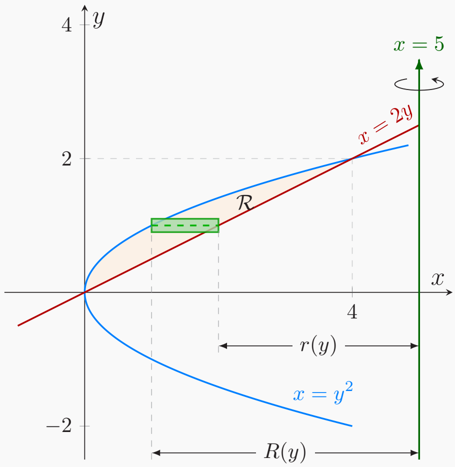


Figura 3.41

Ejemplo 3.24. Halle el volumen del sólido de revolución generado al girar la región limitada por las curvas:

$$x = y - y^2 \quad \text{y} \quad x - y^2 + 3 = 0,$$

alrededor de la recta $x = -4$.

Solución. Primero buscamos los puntos de intersección, para ello resolvemos

$$y - y^2 = y^2 - 3.$$

Por lo que, los puntos de intersección ocurren cuando $y=-1$, $y=\dfrac{3}{2}$.

En la Figura 3.42 se muestra la gráfica de la región y el rectángulo representativo. Los radios interior $r(y)$ y exterior $R(y)$ del anillo generado son respectivamente

$$r(y)=|y^2-3-(-4)|=y^2+1$$
$$R(y)=|y-y^2-(-4)|=4+y-y^2.$$

Por lo tanto, el volumen V del sólido de revolución es

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-1}^{\frac{3}{2}}\left[(4+y-y^2)^2-(y^2+1)^2\right]dy\\&=\pi\int_{-1}^{\frac{3}{2}}\left[-2y^3-9y^2+8y+15\right]dy\\&=\pi\left[-\frac{y^4}{2}-3y^3+4y^2+15y\right]_{-1}^{3/2}\\&=\frac{875}{32}\pi\ u^3.\end{aligned}$$

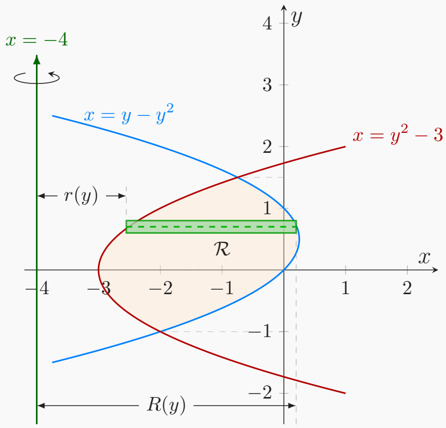


Figura 3.42

Ejemplo 3.25. Calcule el volumen del sólido generado al rotar la región encerrada por las curvas:

$$x(y+3)=2,\quad y^2=4x-4,\quad y=4,$$

alrededor de la recta $x=-2$.

Solución. Como en los ejemplos anteriores, encontramos los puntos de intersección:

$$\frac{2}{y+3}=\frac{y^2+4}{4}\Longrightarrow y^3+3y^2+4y+4=0\Longrightarrow (y+2)\left(y^2+y+2\right)=0\Longrightarrow y=-2.$$

De la Figura 3.43 tenemos que los radios interior $r(y)$ y exterior $R(y)$ del anillo generado, respectivamente, son

$$r(y)=\left|\frac{2}{y+3}-(-2)\right|=\frac{2}{y+3}+2$$
$$R(y)=\left|\frac{y^2+4}{4}-(-2)\right|=\frac{y^2+12}{4}$$

Por lo tanto, el volumen V del sólido es

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-2}^{4}\left[\left(\frac{y^2+12}{4}\right)^2-\left(\frac{2}{y+3}+2\right)^2\right]dy\\&=\pi\int_{-2}^{4}\left[\frac{y^4+24y^2}{16}-\frac{4}{(y+3)^2}-\frac{8}{y+3}+5\right]dy\\&=\pi\left[\frac{1}{16}\left(\frac{y^5}{5}+8y^3\right)+\frac{4}{y+3}-8\ln|y+3|+5y\right]_{-2}^{4}\\&=\left(\frac{2652}{35}-8\ln(7)\right)\pi\ u^3.\end{aligned}$$

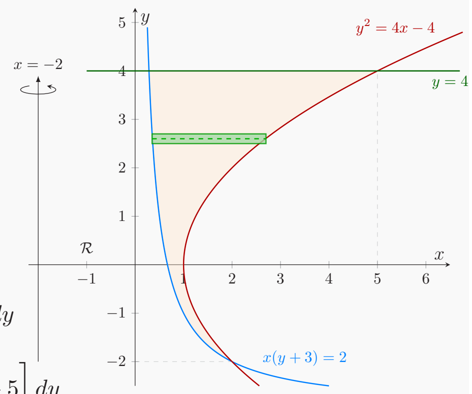


Figura 3.43

3.2.3. Método de láminas cilíndricas

El método de las láminas cilíndricas utiliza los volúmenes de cáscaras cilíndricas (o tubos) para aproximar el volumen de un sólido de revolución. Comenzamos con la deducción de una fórmula para determinar el volumen de una cáscara cilíndrica.

Supongamos que una cáscara tiene un radio exterior r_2, un radio interior r_1 y una altura h como se muestra en la Figura 3.44.

El volumen V de la cáscara se puede encontrar restando el volumen V_1 del cilindro interior con el volumen V_2 del cilindro exterior. Así,

$$\begin{aligned} V &= V_2 - V_1 \\ &= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h \\ &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \\ &= 2\pi\left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right)(r_2 - r_1)h \end{aligned}$$

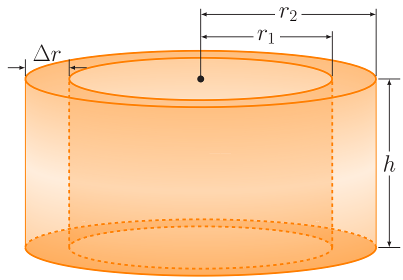


Figura 3.44: Cascarón cilíndrico de radio exterior r_2, radio interior r_1 y altura h.

Esta última ecuación se puede escribir de la forma

$$V = 2\pi r h \Delta r, \qquad (3.10)$$

donde $r = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$ es el radio promedio de la cáscara y $\Delta r = r_2 - r_1$ es el grosor de la cáscara. La ecuación (3.10) también puede escribirse de la siguiente forma: **Volumen de una lámina o cascarón cilíndrico**

$$V = 2\pi\ (\text{radio promedio})(\text{altura})(\text{grosor})\ .$$

Ahora sea $\mathcal{R}$ una región limitada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$, con $g(x) \leq f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, tal como se muestra en la Figura (3.45). Si esta región $\mathcal{R}$ se gira alrededor de la recta $x = h$, donde $h \notin [a, b]$, obtenemos el sólido mostrado en la Figura 3.46.

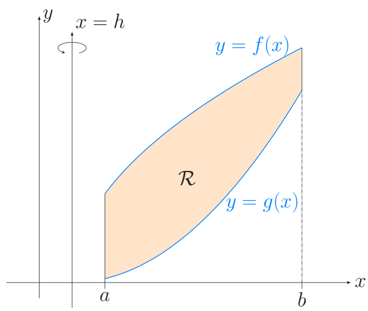


Figura 3.45

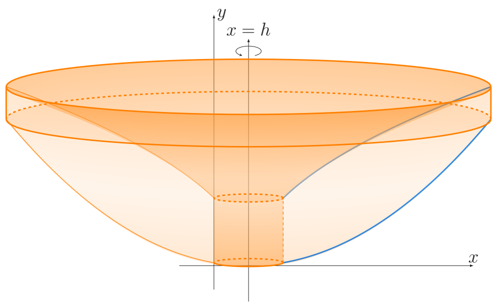


Figura 3.46

Seguidamente, consideremos una partición regular del intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Sea $t_k = \dfrac{x_k + x_{k-1}}{2}$ el punto medio del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Construimos un rectángulo con base $\Delta x = x_k - x_{k-1}$ y altura $f(t_k) - g(t_k)$. Ahora, si hacemos girar este rectángulo alrededor de la recta $x = h$, obtenemos un tubo cilíndrico tal como se puede observar en la Figura 3.47. Si $r_k = |t_k - h|$ es la distancia desde el centro del rectángulo hasta la recta de giro, entonces $r_k = |t_k - h|$ es el radio medio.

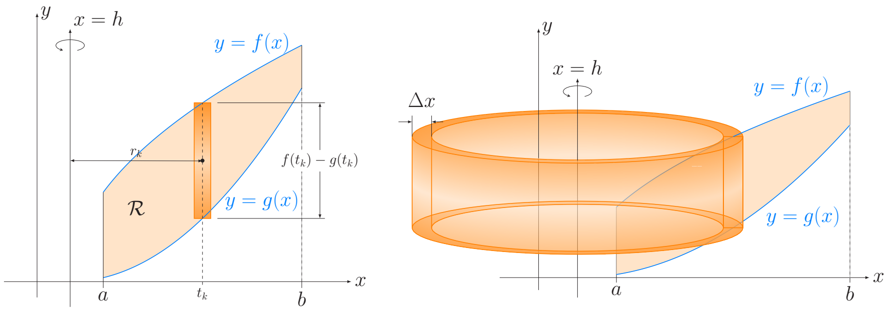


Figura 3.47

Por lo que, el volumen de este tubo, según la ecuación (3.10), es:

$$\Delta_k V = 2\pi |t_k - h| (f(t_k) - g(t_k)) \Delta x.$$

En consecuencia, el volumen del sólido de revolución es:

$$\boxed{V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta_k V = 2\pi \int_a^b |x - h| \,(f(x) - g(x))\, dx.} \tag{3.11}$$

Ejemplo 3.26. Halle el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región limitada por las curvas:

$$x = \ln(y - 1), \quad y = 3x^2 - 6x + 2 \ \text{ y } \ x = 2,$$

alrededor de la recta $x = -1$.

Solución. De la primera ecuación, tenemos que $y = e^x + 1$. Luego, encontrando la intersección de las curvas:

$$e^x + 1 = 3x^2 - 6x + 2 \Longrightarrow x = 0.$$

Además, de la Figura 3.49 observamos que el radio es

$$\text{radio} = |x - (-1)| = x + 1$$

y la altura

$$\begin{aligned}\text{altura} &= e^x + 1 - \left(3x^2 - 6x + 2\right)\\ &= e^x - 3x^2 + 6x - 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la ecuación (3.11) el volumen del sólido de revolución generado es

$$\begin{aligned}V &= 2\pi \int_0^2 (x+1)\left[e^x - 3x^2 + 6x - 1\right] dx\\ &= 2\pi \left[xe^x - \frac{3}{4}x^4 + x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x\right]_0^2\\ &= 2\pi \left[4 + 2e^2\right]\ u^3.\end{aligned}$$

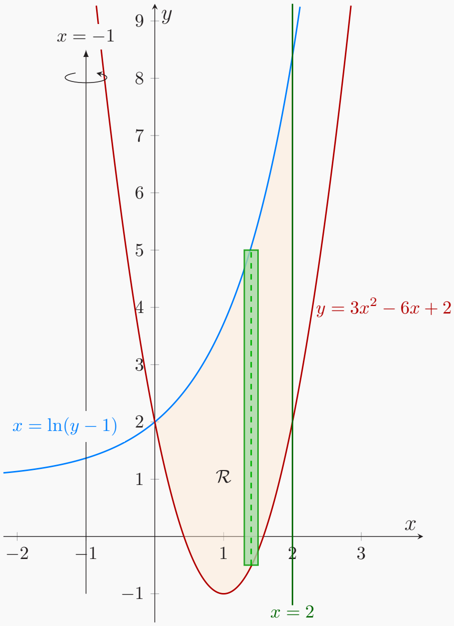


Figura 3.48

Ejemplo 3.27. Halle el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región limitada por las curvas:

$$y = \frac{6x}{2x^2+1}, \quad y = \frac{1}{3x} \ \text{ y } \ x = 3,$$

alrededor de la recta $x = 4$.

Solución. Primero encontramos la intersección de las curvas:

$$\frac{6x}{2x^2+1} = \frac{1}{3x} \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{4}.$$

Luego, de la Figura 3.49, tenemos que

$$x = \frac{1}{4}.$$

Además, el radio y la altura respectivamente son:

$$\begin{aligned}\text{radio} &= |x - 4| = 4 - x\\ \text{altura} &= \frac{6x}{2x^2+1} - \frac{1}{3x}.\end{aligned}$$

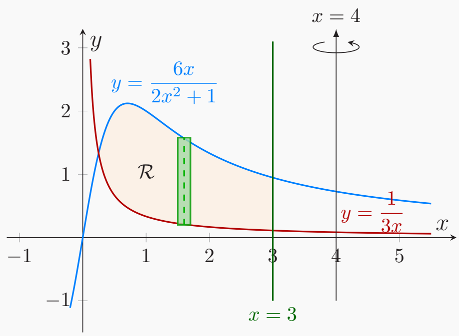


Figura 3.49

Por lo tanto, de la ecuación (3.11) el volumen del sólido generado es

$$V = 2\pi \int_{1/4}^{3} (4 - x)\left(\frac{6x}{2x^2+1} - \frac{1}{3x}\right) dx$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{1/4}^{3} \left[\frac{6x(4-x)}{2x^2+1} - \frac{4-x}{3x} \right] dx \\ &= 2\pi \int_{1/4}^{3} \left[\frac{24x}{2x^2+1} - \frac{6x^2}{2x^2+1} - \frac{4}{3x} + \frac{1}{3} \right] dx \\ &= \int_{1/4}^{3} \left[\frac{24x}{2x^2+1} + \frac{3}{2x^2+1} - \frac{4}{3x} - \frac{8}{3} \right] dx \\ &= 2\pi \left[6\ln\left|2x^2+1\right| + \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan\left(\sqrt{2}x\right) - \frac{4}{3}\ln|x| - \frac{8}{3}x \right]_{1/4}^{3} \\ &= 2\pi \left[6\ln\left(\frac{152}{9}\right) + \frac{3}{\sqrt{2}} \left(\arctan(3\sqrt{2}) - \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \right) - \frac{4}{3}\ln(12) - \frac{22}{3} \right] u^3 \\ &\approx 8.43u^3. \end{aligned}$$

Importante.

De manera similar se puede deducir una fórmula para cuando el eje de giro es paralelo al eje x; es decir, el eje de rotación es una recta $y = k$. Sea $\mathcal{R}$ una región limitada por las gráficas de $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ y $y = d$, con $g(y) \leq f(y)$ en el intervalo $[c, d]$, tal como se muestra en la Figura (3.50). Si esta región $\mathcal{R}$ se gira alrededor de la recta $y = k$, donde $k \notin [c, d]$, el volumen del sólido de revolución generado está dado por:

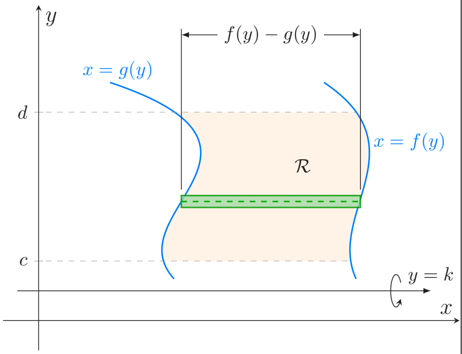


Figura 3.50

$$\boxed{V = 2\pi \int_{c}^{d} |y-k| \, (f(y) - g(y)) \, dy.} \tag{3.12}$$

Ejemplo 3.28. Sea $\mathcal{R}$ la región limitada por las gráficas de $x = y + 1$ y $x = -y^2 + 6y + 1$. Encuentre el volumen del sólido generado al rotar la región $\mathcal{R}$ alrededor del eje x.

Solución. Encontrando los puntos de intersección de las curvas:

$$y + 1 = -y^2 + 6y + 1 \Longrightarrow -y^2 + 5y = 0 \Longrightarrow y = 0, \quad y = 5.$$

Luego, representamos la región $\mathcal{R}$

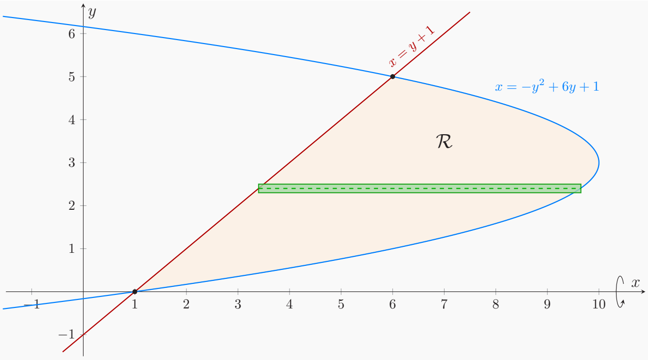


Figura 3.51

Entonces, de la Figura 3.51, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{radio} &= |y - 0| = y \\ \text{altura} &= (-y^2 + 6y + 1) - (y + 1) = -y^2 + 5y \end{aligned}$$

Finalmente, de la ecuación (3.12) el volumen del sólido de revolución generado es

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^5 y\left[-y^2 + 5y\right] dy \\ &= 2\pi \left[-\frac{y^4}{4} + \frac{5y^3}{3}\right]_0^5 = 2\pi \left(\frac{625}{12}\right) = \frac{625\pi}{6}\ u^3. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.29. Calcule el volumen del sólido de revolución al hacer girar, alrededor de la recta $y = -1$, la región limitada por las curvas

$$y = \frac{(x-2)^2}{3}, \quad y = \sqrt{x + 2y - 2}.$$

Solución. Observamos claramente que la primera ecuación corresponde a la gráfica de una parábola. Además, la segunda ecuación se puede reescribir como:

$$y = \sqrt{x + 2y - 2} \Longrightarrow (y - 1)^2 = x - 1.$$

Lo que indica que la segunda ecuación es parte de una parábola de vértice $(1, 1)$. Representamos estos datos en la Figura 3.52. Luego, despejando adecuadamente, tenemos dos funciones que dependen de y:

$$x = 2 + \sqrt{3y} \quad \text{y} \quad x = 1 + (y - 1)^2.$$

Asimismo, ambas curvas se cortan cuando $y = 0$, $y = 3$. Por lo tanto, usando la ecuación (3.12) tenemos que el volumen del sólido generado es

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^3 |y - (-1)| \left[(2 + \sqrt{3y}) - (1 + (y-1)^2)\right] dy \\ &= 2\pi \int_0^3 (y + 1)\left[\sqrt{3y} - y^2 + 2y\right] dy \\ &= 2\pi \left[-\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} + y^2 + \sqrt{3}\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = 2\pi\left[\frac{291}{20}\right] = \frac{291\pi}{10}\ u^3. \end{aligned}$$

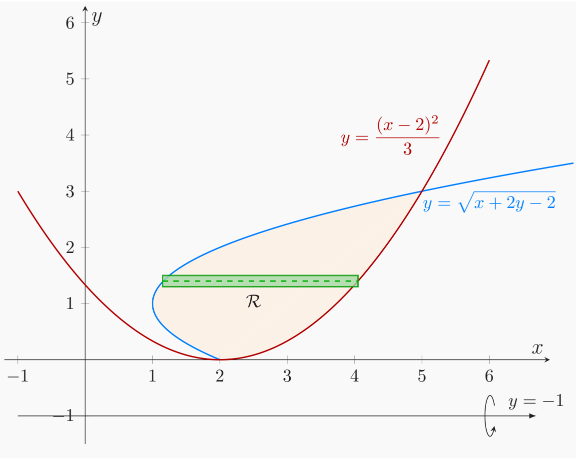


Figura 3.52

Para una comprensión más completa sobre el volumen de revolución, los lectores pueden consultar los libros titulados Calculus: Early Transcendentals (Tan, 2010) y Cálculo II (Mitacc et al., 2018).

Ejercicios propuestos 3.2.

1. Calcule el volumen del sólido de revolución, generado cuando la región ubicada en el segundo cuadrante y acotada por las curvas de ecuaciones

$$y = -\frac{2}{x+1}, x = -5 \text{ y } y = 2$$

se gira alrededor de la recta de ecuación $x = -5$.

2. Halle el volumen del sólido de revolución generado cuando la región acotada por la curva $y = -\sqrt{9-x}$, el eje x y el eje y, se gira alrededor del eje y.

3. Encuentre el volumen del sólido de revolución generado cuando la región acotada por la curva $x = y - y^2$, el eje x y la rectas $x = 1$ se gira alrededor del eje x.

4. Calcule el volumen del sólido de revolución generado cuando la región acotada por la curva $x = \frac{2}{y}$, las rectas $y = 1$ y $y = 4$ se gira alrededor del eje y.

5. Determine el volumen del sólido revolución generado al hacer girar la región acotada por las parábolas $y = x^2 + 4$ y $y = 2x^2$ en torno al eje x.

6. Halle el volumen del sólido generado al rotar, alrededor de la recta $x = -1$, la región limitada por la curva $y = \ln x$, las rectas $y = 1$ y $x = 1$.

7. Calcule el volumen del sólido que se genera al hacer rotar, alrededor de la recta $x = 4$, la región limitada por las curvas $y = \frac{3}{x+2} + 1, y = 2$ y $y - x = 5$.

8. Calcule el volumen del sólido generado al rotar, alrededor de la recta $y = 2$, la región limitada por las curvas $y = -1 + \cos x$, $y = \operatorname{sen} x$ y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

9. Halle el volumen del sólido que se genera al rotar la región limitada por

$$y = e^x, \quad y = e^{-x} \quad \text{y} \quad x = \ln 2,$$

alrededor de $x = 2$.

10. Determine el volumen del sólido generado al rotar la región limitada por las curvas $y = x^3 + x; y = 2x^2$, alrededor de la recta $x = 2$.

11. Calcule el volumen del sólido generado al rotar, alrededor de la recta $y = -1$, la región limitada por las curvas $x = y(y-1)^2, x = 1 - y^2$ y $y = -1$

12. Determine el volumen del sólido que se genera cuando rota, alrededor de la recta $x = 3$, la región acotada por las gráficas de $f(x) = -\sqrt{2-x}, g(x) = 4+x$ y $x = 2$.

13. Encuentre el volumen del cuerpo cuya base es un círculo de radio $r = 2$ y cuya sección recta perpendicular a la base es siempre un triángulo de altura $h = 4$.

14. Calcule el volumen de una esfera de radio r.

15. Halle el volumen al girar la hipérbola $x = \dfrac{2}{y}$, respecto al eje y, limitada por las rectas $y = 1$ y $y = 4$.

16. Encuentre el volumen generado al hacer girar la curva $y = x^2 + 1$ alrededor del eje y, desde $y = 1$ hasta $y = 4$.

17. Determine el volumen generado por la región acotada $y = 2 + senx$, $y = 0$, $x = 0$, y $y = 2\pi$, alrededor del eje y.

18. Halle el volumen del solido generado al hacer girar la región limitada por las curvas $y = 4x^2 - x^3, y = x^3$,alrededor de la recta $x = -1$.

3.3. Longitud de arco

Imagina que recorres por un camino que no es recto, sino curvado. La distancia que caminas a lo largo de esta curva se llama longitud de arco. En matemáticas, usamos la integral definida para calcular esta distancia. Esto no solo es interesante, sino que también tiene muchas utilidades reales. Por ejemplo, nos ayuda a diseñar carreteras con muchas curvas, a construir puentes y a entender mejor el mundo que nos rodea.

En esta sección, deduciremos la fórmula para calcular la longitud de arco de una curva $y = f(x)$, donde f es una función continua en un intervalo dado. Si bien nos enfocaremos en este tipo de curvas para simplificar la explicación, es importante destacar que el método que desarrollaremos a continuación no es aplicable a curvas que no son gráficas de funciones, como las paramétricas o las definidas implícitamente.

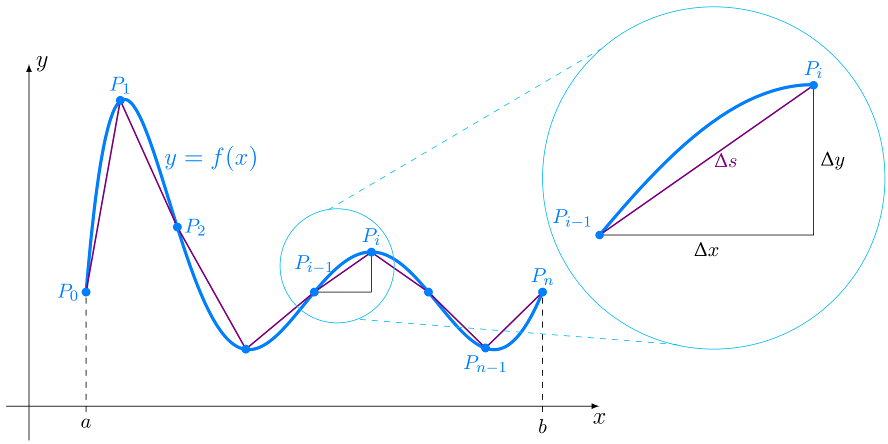


Figura 3.53: Aproximación poligonal a la curva $y = f(x)$.

Sea $y = f(x)$ una curva que conecta los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Supongamos que elegimos una serie de puntos $(a, f(a)) = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ y $P_n = (b, f(b))$ ordenados a lo largo de la curva, como se muestra en la Figura 3.53. La línea poligonal $P_0P_1P_2 \cdots P_{n-1}P_n$, construida uniendo pares adyacentes de los puntos anteriores con segmentos de línea recta, forma una aproximación poligonal a la curva $y = f(x)$, de longitud

$$L_n = d(P_0, P_1) + d(P_1, P_2) + \cdots + d(P_{n-1}, P_n) = \sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}, P_i), \tag{3.13}$$

donde $d(P_{i-1}, P_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$. Claramente si aumentamos el número de vértices a la línea poligonal entre los vértices adyacentes, L_n no puede disminuir, sino solo aumentar. Por lo que, la suma dada en (3.13) nos brinda una aproximación intuitiva de la longitud de la curva desde P_0 hasta P_n. Como cada punto P_i en la línea poligonal corresponde a un punto en la partición del intervalo $[a, b]$, el siguiente paso en la deducción de la fórmula de la longitud de arco es analizar qué sucede cuando la norma $\|\Delta x\|$ de la partición se aproxima a cero. Si la suma dada en (3.13) converge a un número L cuando $\|\Delta x\| \to 0$, definimos a este número como la **longitud de arco** de la curva $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$:

$$L = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}, P_i). \tag{3.14}$$

Si el límite de (3.14) existe, entonces se dice que la curva es **rectificable**. En caso contrario, se denomina **no rectificable**.

3.3.1. Longitud de una curva en coordenadas cartesianas

Ahora exploraremos el cálculo de la longitud de arco, centrándonos en el uso de la integral definida para determinar la distancia a lo largo de una curva definida por la función $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, donde f tiene derivada continua en $[a, b]$. Tal función es denominada como **suave** y su gráfica es una **curva suave**.

La fórmula (3.14) nos ha proporcionado el concepto de curva rectificable, es decir, la capacidad de medir la longitud de una curva suave en el plano. No obstante, la ecuación (3.14) no tiene la forma de una suma de Riemann, por lo que no podemos pasar de forma inmediata a una fórmula integral para calcular la longitud de arco.

La Figura 3.53 muestra que un cambio pequeño Δx corresponde a un cambio pequeño

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x.$$

Usando el teorema de Pitágoras, se observa que la longitud del fragmento de la curva se aproxima por

$$\text{Longitud} \approx \Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(x)\Delta x)^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\Delta x.$$

Por lo tanto, la longitud del arco de toda la curva se aproxima por una suma de Riemann:

$$\text{Longitud de arco} \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\Delta x.$$

Dado que x varía entre a y b, a medida que dejamos que Δx tienda a cero, la suma se convierte en la siguiente integral:

$$\text{Longitud de arco } = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Definición 3.3: Longitud de arco.

Si una función f definida en $[a, b]$, tiene derivada continua en $[a, b]$, entonces la longitud de arco de la curva $y = f(x)$ desde el punto $(a, f(a))$ hasta $(b, f(b))$, con $a < b$, está dada por

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.} \tag{3.15}$$

Ejemplo 3.30. Halle la longitud de arco de la curva $y = x^{3/2}$, desde el punto $(2, 2\sqrt{2})$ hasta el punto $(4, 8)$.

Solución. La gráfica del arco de la curva se muestra en la Figura 3.54.

Si derivamos la función, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces, la longitud de arco es:

$$\begin{aligned} L &= \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int_2^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x dx} \\ &= \frac{8}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_2^4 \\ &= \frac{8}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{4}\cdot 4\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 + \frac{9}{4}\cdot 2\right)^{\frac{3}{2}}\right] \end{aligned}$$

Finalmente, la longitud de arco es:

$$L = \frac{2\sqrt{2}\left(40\sqrt{5} - 11\sqrt{11}\right)}{27}\ u.$$

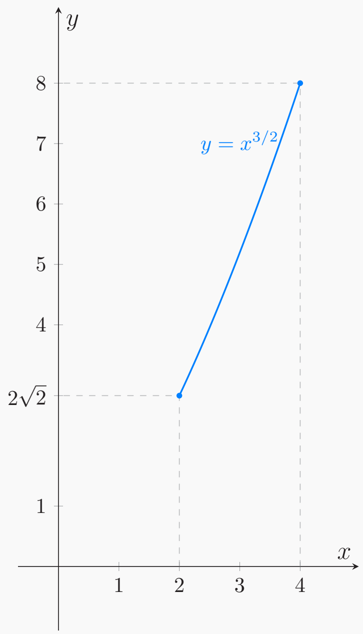


Figura 3.54

Ejemplo 3.31. Encuentre la longitud del gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \ln(\sqrt{x})$ en el intervalo $[1, 4]$.

Solución. Primero, encontramos la derivada de la función:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{4} - \ln(\sqrt{x})\right] = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$$

Usando la ecuación (3.15) con

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)^2 = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2}$$

vemos que la longitud pedida es

$$\begin{aligned} L &= \int_1^4 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_1^4 \frac{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}}{2x} dx \\ &= \int_1^4 \frac{\sqrt{(x^2+1)^2}}{2x} dx = \int_1^4 \frac{x^2 + 1}{2x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right)\right]_1^4 = \left(\frac{15}{4} + \ln(2)\right)\ u. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.32. Halle la longitud de la curva $y = \dfrac{x^6}{12} + \dfrac{1}{8x^4}$; desde $x = 1$ hasta $x = 3$.

Solución. Iniciamos hallando la derivada $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^6}{12} + \frac{1}{8x^4}\right) = \frac{x^5}{2} - \frac{1}{2x^5}$$

Usando la fórmula de la longitud de arco:

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 1 + \left(\frac{x^5}{2} - \frac{1}{2x^5}\right)^2 = 1 + \left(\frac{x^{10}-1}{2x^5}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{x^{20} - 2x^{10} + 1}{4x^{10}} = \frac{x^{20} + 2x^{10} + 1}{4x^{10}} \\ &= \frac{(x^{10}+1)^2}{4x^{10}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la longitud de la curva es

$$\begin{aligned} L &= \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ &= \int_1^3 \sqrt{\frac{(x^{10}+1)^2}{4x^{10}}} dx \\ &= \int_1^3 \frac{x^{10}+1}{2x^5} dx \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x^6}{6} - \frac{1}{4x^4}\right)\right]_1^3 = \frac{4924}{81}\ u. \end{aligned}$$

En puntos de la curva donde la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ no está definida, puede ocurrir que la derivada $\dfrac{dx}{dy}$ sí lo esté. En tales situaciones, aún podríamos ser capaces de determinar la longitud de la curva si expresamos x como una función de y. En consecuencia, se tiene la siguiente definición.

Definición 3.4:

Si una función g definida en $[c, d]$, tiene derivada continua en $[c, d]$, entonces la longitud de arco de la curva $x = g(y)$ desde $(g(c), c)$ hasta $(g(d), d)$, con $c < d$, está dada por

$$\boxed{L = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy.} \tag{3.16}$$

Ejemplo 3.33. Determine la longitud de la curva $y = 3x^{2/3}$ desde $x = 0$ hasta $x = \sqrt{8}$.

Solución. Observamos que la derivada

$$\frac{dy}{dx} = 3\left[\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right] = \frac{2}{x^{1/3}}$$

no está definida en $x = 0$; en consecuencia, no es posible utilizar la fórmula dada en

(3.15). Sin embargo, si expresamos x en términos de y, se tiene:

$$x = \left(\frac{y}{3}\right)^{3/2}.$$

De acuerdo a esta última ecuación y a la Figura 3.55, vemos que la longitud solicitada, se puede determinar como la longitud de la curva $x = \left(\frac{y}{3}\right)^{3/2}$ desde $y = 0$ a $y = 6$. Entonces, la derivada

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{3}\right)^{1/2}$$

es continua en el intervalo $[0, 6]$. Luego, usando la fórmula (3.16), se tiene

$$L = \int_0^6 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{y}{3}\right)^{1/2}\right]^2}\, dy.$$

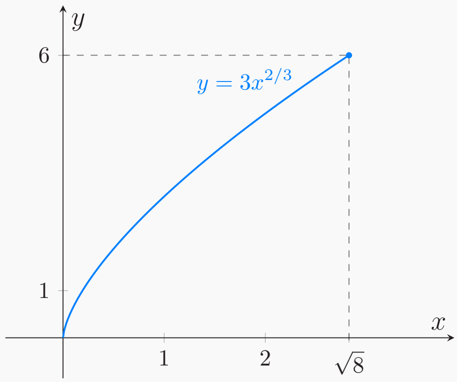


Figura 3.55: Gráfica de $y = 3x^{2/3}$ en $[0, \sqrt{8}]$.

Así, la longitud de la curva es

$$L = \int_0^6 \sqrt{1 + \frac{y}{12}}\, dy = 12\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\right)\ u.$$

Ejemplo 3.34. Calcule la longitud de la curva $x = \frac{1}{2}\left(e^y + e^{-y}\right)$, desde el punto $(1, 0)$ hasta $\left(\frac{17}{8}, \ln 4\right)$.

Solución. La curva está dada por la función $x = \frac{1}{2}\left(e^y + e^{-y}\right)$. En primer lugar, encontramos $\frac{dx}{dy}$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}\left(e^y + e^{-y}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(e^y - e^{-y}\right).$$

Luego,

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 &= 1 + \frac{1}{4}\left(e^{2y} - 2 + e^{-2y}\right) \\ &= \frac{e^{2y} + 2 + e^{-2y}}{4} = \frac{(e^y + e^{-y})^2}{4} \end{aligned}$$

Entonces, utilizamos la fórmula (3.16) para encontrar la longitud de arco:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\ln 4} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^{\ln 4} \sqrt{\frac{(e^y + e^{-y})^2}{4}}\, dy \\ &= \int_0^{\ln 4} \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) dy \\ &= \left[\frac{1}{2}(e^y - e^{-y})\right]_0^{\ln 4} = \frac{15}{8}\ u. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.35. Determine la longitud de la curva $x = \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{1}{2}\ln y$, desde $y = 1$ hasta $y = e^2$.

Solución. Determinando la derivada $\dfrac{dx}{dy}$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{y^2}{4} - \frac{1}{2}\ln y\right) = \frac{y}{2} - \frac{1}{2y}$$

Luego,

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 &= 1 + \left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2y}\right)^2 = \frac{y^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^2} \\ &= \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{2y}\right)^2. \end{aligned}$$

Entonces, la longitud de arco es

$$\begin{aligned} L &= \int_1^{e^2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \\ &= \int_1^{e^2} \sqrt{\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{2y}\right)^2}\, dy \\ &= \int_1^{e^2} \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{2y}\right) dy = \left[\frac{y^2}{4} + \frac{1}{2}\ln|y|\right]_1^{e^2} \\ &= \frac{e^4 + 3}{4}\ u. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.36. Calculela longitud del arco de la parábola semicúbica $3y^3 = x^2$ comprendida dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

Solución. Primero, hallamos los puntos de intersección del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3y^3 = x^2 \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, encontramos un valor real $y = 1$, donde las coordenadas son

$$A\left(-\sqrt{3}, 1\right) \quad \text{y} \quad B\left(\sqrt{3}, 1\right).$$

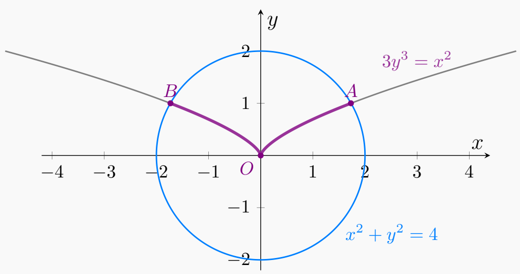


Figura 3.56

Luego, de la Figura 3.56 la longitud del arco OA tiene la misma medida que el arco OB. Por lo que,

$$L_{OA} = L_{OB} = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy.$$

Primero, determinamos $\dfrac{dx}{dy}$:

$$3y^3 = x^2 \implies x = \pm\sqrt{3y^3}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\sqrt{3y^3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} y^{\frac{1}{2}}.$$

Sustituyendo en la integral, tenemos

$$\begin{aligned} L_{OA} &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} y^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{27}{4} y}\, dy \\ &= \left[\frac{1}{81}\,(4 + 27y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{31\sqrt{31} - 8}{81} \end{aligned}$$

Finalmente, la longitud total es:

$$L = 2L_{OA} = \frac{62\sqrt{31} - 16}{81}\; u.$$

Si la curva $y = f(x)$ es suave en $[a, b]$, entonces es suave en $[a, x]$ para cada número $x \in [a, b]$, y la longitud de la curva desde $(a, f(a))$ hasta $(x, f(x))$ es

$$\int_a^x \sqrt{1 + (f'(u))^2}\, du.$$

Si denotamos a esta integral como $s(x)$, entonces s puede considerarse como una función con dominio $[a, b]$, ya que a cada x en $[a, b]$ le corresponde un número único $s(x)$.

Definición 3.5: Función longitud de arco.

Si f es una función con derivada continua en $[a, b]$. Entonces la longitud de arco desde el punto inicial $(a, f(a))$ y un punto variable $(x, f(x))$, con $a \leq x \leq b$, está determinada por

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(u)]} du,$$

donde u es la variable de integración. La función s se denomina **función longitud de arco** para la curva $y = f(x)$.

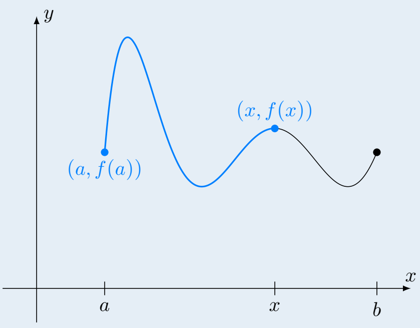


Figura 3.57

Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos

$$s'(x) = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Por lo que, ds es la **diferencial de la longitud de arco** y puede escribirse como

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

o

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy.$$

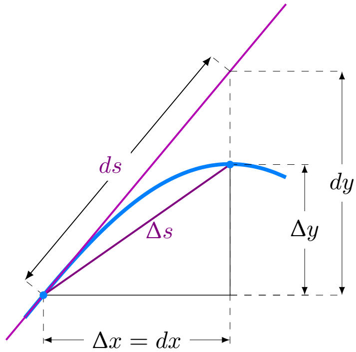


Figura 3.58: Interpretación geométrica de la diferencial de la longitud de arco.

Ejemplo 3.37. Determine la función longitud de arco para la curva $y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3}$, tomando como inicio al punto $\left(1, \frac{19}{60}\right)$.

Solución. Primero determinamos la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3}\right) = \frac{x^4}{3} - \frac{3}{4x^4}.$$

Luego,

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{x^4}{3} - \frac{3}{4x^4}\right)^2 = \frac{x^8}{9} + \frac{1}{2} + \frac{9}{16x^8} = \left(\frac{x^4}{3} + \frac{3}{4x^4}\right)^2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} s(x) &= \int_1^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_1^x \sqrt{\left(\frac{t^4}{3} + \frac{3}{4t^4}\right)^2} dt \\ &= \int_1^x \left(\frac{t^4}{3} + \frac{3}{4t^4}\right) dt = \left[\frac{t^5}{15} - \frac{1}{4t^3}\right]_1^x = \frac{x^5}{15} - \frac{1}{4x^3} + \frac{11}{60}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función longitud de arco está dada por

$$s(x) = \frac{x^5}{15} - \frac{1}{4x^3} + \frac{11}{60}.$$

3.3.2. Longitud de una curva dada en ecuaciones paramétricas

En esta sección, introduciremos la expresión matemática utilizada para calcular la longitud de arco de una curva definida por ecuaciones paramétricas. La deducción detallada de esta expresión puede encontrarse en textos especializados mencionados en la bibliografía (Boyce & DiPrima, 2005).

Definición 3.6: Longitud de Arco de una Curva Paramétrica

Sea $\mathcal{C}$ una curva en el plano dada por las ecuaciones paramétricas

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

donde las funciones x, y son diferenciables en el intervalo $[\alpha, \beta]$. La longitud de arco L de esta curva desde $t = \alpha$ hasta $t = \beta$ está representada por la integral:

$$\boxed{L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.} \tag{3.17}$$

La ecuación(3.17) nos proporciona una herramienta para calcular la longitud de curvas que no pueden ser descritas fácilmente por una única función $y = f(x)$. Al utilizar parámetros, podemos trabajar con una mayor variedad de curvas (ver Figura 3.59), incluyendo aquellas que se cruzan a sí mismas o que no son funciones de x de manera convencional.

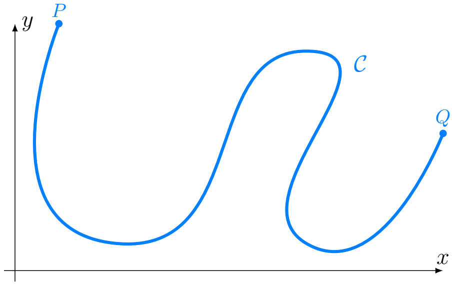


Figura 3.59: Curva paramétrica.

Ejemplo 3.38. Halle la longitud de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

donde r es el radio.

Solución. Tenemos que una de las ecuaciones paramétrica de la circunferencia es

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Entonces

$$\frac{dx}{dt} = -r\,\mathrm{sen}\, t, \quad \frac{dy}{dt} = r\cos t,$$

y usando la ecuación (3.17), tenemos

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\,\mathrm{sen}\, t)^2 + (r\cos t)^2} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

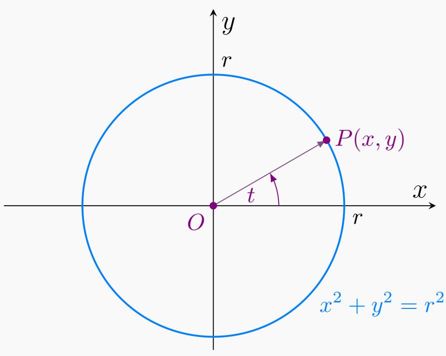


Figura 3.60

Ejemplo 3.39. Calcule la longitud de arco de la curva $\mathcal{C}$, representada por las ecuaciones paramétricas:

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = t - \operatorname{sen} t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Solución. Para calcular la longitud de arco de una curva definida por ecuaciones paramétricas, utilizamos la fórmula (3.17). Dado que la curva $\mathcal{C}$ está representada por las ecuaciones paramétricas, procedemos a calcular las derivadas de $x(t)$, $y(t)$ con respecto a t:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = \operatorname{sen} t.$$

Luego, sustituyendo estas derivadas en la fórmula de la longitud de arco, obtenemos:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \left| \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \right| dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8 \ u. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.40. Determine la longitud de arco de la curva

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = \cos t + t \operatorname{sen} t \\ y(t) = \operatorname{sen} t - t \cos t \end{cases},$$

desde el punto $(1, 0)$ hasta $(-1, \pi)$.

Solución. Primero, identificamos los valores de t correspondientes a los puntos dados. Evaluamos las ecuaciones paramétricas en estos puntos.

- Para el punto $(1, 0)$:
$$\begin{cases} x(0) = \cos 0 + 0 \cdot \operatorname{sen} 0 = 1 \\ y(0) = \operatorname{sen} 0 - 0 \cdot \cos 0 = 0 \end{cases}$$

- Para el punto $(-1, \pi)$:
$$\begin{cases} x(\pi) = \cos \pi + \pi \operatorname{sen} \pi = -1 \\ y(\pi) = \operatorname{sen} \pi - \pi \cos \pi = \pi \end{cases}$$

Dado que los puntos corresponden a $t = 0$ y $t = \pi$, calculamos las derivadas de $x(t)$ y $y(t)$ con respecto a t:

$$\frac{dx}{dt} = -\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t + t\cos t = t\cos t,$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos t - \cos t + t\operatorname{sen} t = -t\operatorname{sen} t.$$

Luego, usando la ecuación (3.17), tenemos que la longitud de arco es

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi \sqrt{(t\cos t)^2 + (-t\operatorname{sen} t)^2}dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\operatorname{sen}^2 t}dt \\ &= \int_0^\pi t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} - 0 = \frac{\pi^2}{2}\ u. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.41. Si una partícula recorre una trayectoria dada por la curva:

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = \arctan t \\ y(t) = \ln\left(\sqrt{t^2+1}\right) \end{cases}, \quad t \in [0, 10].$$

Determine el punto de la curva $\mathcal{C}$ donde la partícula ha recorrido una distancia de $\ln(2+\sqrt{3})$ unidades.

Solución. Calculamos las derivadas de $x(t)$, $y(t)$ con respecto a t:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\arctan t) = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\ln\left(\sqrt{t^2+1}\right)\right) = \frac{t}{t^2+1}$$

Luego, encontramos la función longitud de arco:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{\left(\frac{1}{1+u^2}\right)^2 + \left(\frac{u}{u^2+1}\right)^2}du \\ &= \int_0^t \sqrt{\frac{1}{u^2+1}}du = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du \\ &= \left[\ln\left|\sqrt{u^2+1}+u\right|\right]_0^t = \ln\left(\sqrt{t^2+1}+t\right). \end{aligned}$$

Dado que la distancia recorrida es $\ln(2+\sqrt{3})$, existe $t_1 \in [0, 10]$ tal que:

$$s_1 = s(t_1) = \ln(2+\sqrt{3}).$$

Luego, resolviendo

$$\ln\left(\sqrt{t_1^2+1}+t_1\right) = \ln(2+\sqrt{3}),$$

obtenemos que $t_1 = \sqrt{3}$. Por lo tanto, el punto de la curva $\mathcal{C}$ donde la partícula ha recorrido una distancia de $\ln(2+\sqrt{3})$ unidades es:

$$\left(\arctan(\sqrt{3}), \ln(2)\right).$$

Ejemplo 3.42. La curva $\mathcal{C}$ es definida por las ecuaciones paramétricas:

$$\mathcal{C}:\begin{cases} x(t)=\displaystyle\int_1^t \frac{\cos u}{u}du, \\ y(t)=\displaystyle\int_1^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}du \end{cases},\quad t\geq 1.$$

Encuentre la longitud de arco desde el origen de coordenadas al punto más cercano en la curva donde existe una tangente vertical.

Solución. Como $x=\displaystyle\int_1^t \frac{\cos u}{u}du$ y $y=\displaystyle\int_1^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}du$, por el primer teorema fundamental del cálculo, tenemos que

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\cos t}{t} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt}=\frac{\operatorname{sen} t}{t}.$$

Además, las rectas tangentes verticales ocurren cuando $\dfrac{dx}{dt}=0$; esto es,

$$\cos t=0 \Longrightarrow t=\frac{\pi}{2}.$$

Por lo que, la tangente vertical más cercana ocurre cuando $t=\dfrac{\pi}{2}$. Asimismo, cuando $t=1$, se tiene el punto $(0,0)$. Por lo tanto, la longitud de arco entre estos puntos es

$$\begin{aligned} L&=\int_1^{\pi/2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt \\ &=\int_1^{\pi/2}\sqrt{\frac{\cos^2 t}{t^2}+\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}}dt=\int_1^{\pi/2}\frac{dt}{t}=[\ln t]_1^{\pi/2}=\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)\ u. \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos 3.3.

1. Calcule la longitud de arco de las siguientes curvas dadas en coordenadas cartesianas:

   a) $y=\dfrac{1}{2}x+4$ en $[0,3]$.

   b) $y=\ln(\operatorname{sen} x)$, $\quad x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   c) $3y^2=x(x-1)^2$; $\quad x\in[0,1]$.

   d) $y=\sqrt{-x^2-x}+\arccos\sqrt{x+1}$; $\quad x\in\left[-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4}\right]$.

   e) $y=\operatorname{arcsen}\left(e^{-x}\right)$; $\quad x\in[1,\ln 5]$.

   f) $x=\dfrac{y^4}{4}-\dfrac{1}{8y^2}$; $\quad y\in[1,2]$.

   g) $y=\sqrt{x-x^2}+\operatorname{arcsen}(\sqrt{x})$.

   h) $x=\displaystyle\int_0^y\sqrt{\sec^4 t-1}dt$, $-\dfrac{\pi}{4}\leq y\leq\dfrac{\pi}{4}$.

i) $x = \frac{1}{4}\left(y^2+2\right)^{3/2}, \; y \in [0,4]$.

2. Calcule la longitud del arco de la curva $x = \frac{y^3}{6} + \frac{1}{y}$, desde el punto $A\left(\frac{7}{6}, 1\right)$ hasta $B\left(\frac{11}{6}, 2\right)$.

3. Halle la longitud de la curva $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, en el primer cuadrante.

4. Calcule la longitud de arco de la curva:
$$x = \frac{1}{2}(y-2)\sqrt{y}, \quad y \in [0,9].$$

5. Calcule la longitud de arco de las siguientes curvas dadas en coordenadas paramétricas:

a) $\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{8} + \dfrac{1}{4t} \\ y(t) = \sqrt{t} \end{cases}, \; t \in [1,6]$

b) $\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \ln(\cos t) \end{cases}, \; t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

c) $\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = e^t - t \\ y(t) = 4e^{t/2} \end{cases}, \; t \in [-8,3]$

d) $\mathcal{C}: \begin{cases} x\,(t) = t^2 - 1 \\ y\,(t) = \dfrac{1}{3}t^3 - t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$

e) $\mathcal{C}: \begin{cases} x\,(t) = 4\,(\cos t + t \operatorname{sen} t) \\ y\,(t) = 4\,(\operatorname{sen} t - t\cos t) \end{cases}, \; t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

f) $\mathcal{C}: x = t^3, y = t^2, -1 \le t \le \sqrt{5}$

g) $\mathcal{C}: \begin{cases} x = 4\cos\theta \\ y = 4\operatorname{sen}\theta \end{cases}, \; \theta \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

h) $\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 - 1 \end{cases}$, desde $(4,-9)$ hasta $(1,-2)$.

3.4. Área de una superficie de revolución

Si una curva plana y suave se hace girar alrededor de un eje que yace en su propio plano, se genera una superficie de revolución, como se muestra en la Figura 13. Nuestro objetivo es determinar el área de dicha superficie.

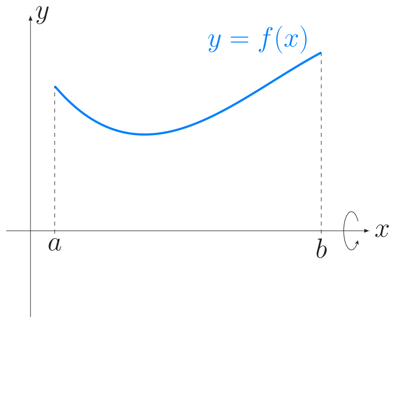


Figura 3.61: Superficie de revolución.

Para comenzar, introducimos la fórmula para el área de un tronco de cono o cono truncado. Un tronco de cono es la parte de la superficie de un cono comprendida entre dos planos perpendiculares al eje del cono (sombreado en la Figura 14). Si un tronco de cono tiene los radios de sus bases r_1 y r_2, y una altura oblicua l, entonces su área A está dada por

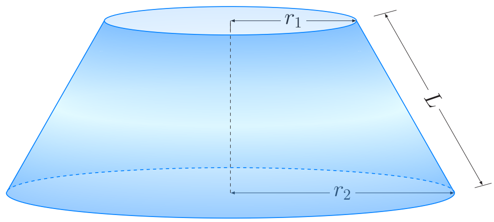


Figura 3.62: Cono truncado.

$$A = 2\pi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)\ell = 2\pi\,(\text{radio promedio})\cdot(\text{altura oblicua})$$

La deducción de este resultado se basa únicamente en la fórmula para el área de un círculo (véase el problema 31).

Supongamos que $y = f(x)$, con $a \leq x \leq b$, determina una curva suave en la mitad superior del plano xy, como se muestra en la Figura 15. Dividamos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos mediante los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, y así también se divide la curva en n segmentos. Denotamos por Δs_i la longitud del i-ésimo segmento y sea y_i la ordenada de un punto en ese segmento. Cuando la curva se gira alrededor del eje x, se genera una superficie y cada segmento genera una banda estrecha. El "área"de esta banda puede aproximarse a la de un tronco de cono, es decir, aproximadamente $2\pi y_i \Delta s_i$. Al sumar las contribuciones de todos los segmentos y tomar el límite cuando la norma de la partición tiende a cero, obtenemos lo que definimos como el área de la superficie de revolución. Todo esto se ilustra en la Figura 16. Así, el área de la superficie es

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i \Delta s_i \\ &= 2\pi \int_a^b y\, ds \\ &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx \end{aligned} \tag{3.18}$$

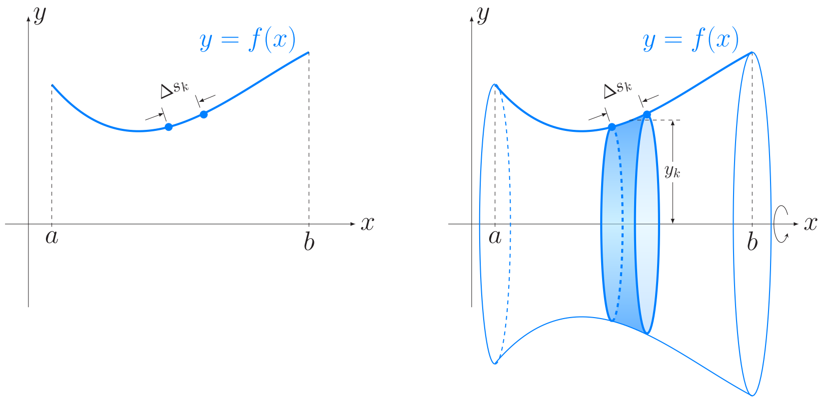


Figura 3.63

La fórmula (3.18) nos sirve sólo para calcular el área de superficies de revolución cuyo eje de giro es el eje x. Sin embargo, podemos extender este concepto para abarcar giros alrededor de otras rectas horizontales o verticales. Para ello, es necesario determinar los valores de $r(x)$ y $r(y)$, que representan las distancias de un punto general de la curva al eje de revolución. A continuación, se ilustran dos casos:

1. En la Figura 3.64, se observa que la curva $y = f(x)$ gira alrededor de la recta horizontal $y = k$, generando una superficie de revolución al girar la curva en torno a dicha recta. La distancia desde un punto de la curva al eje de revolución es

$$r(x) = |f(x) - k|\,.$$

Esta distancia $r(x)$ representa el radio de la circunferencia generada por el punto $(x, f(x))$ de la curva al girar alrededor de la recta $y = k$. Es fundamental reconocer que esta distancia es siempre positiva, ya que $r(x)$ es el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y k, asegurando así que el radio de revolución se mida correctamente en cualquier posición de la curva.

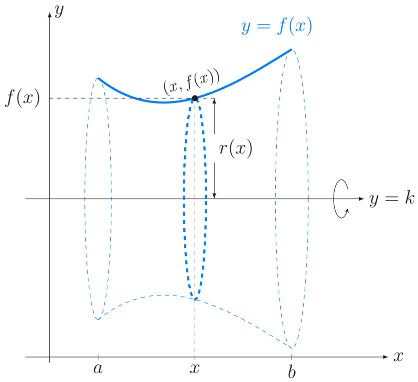


Figura 3.64

2. En la Figura 3.65, se muestra que la curva $x = g(y)$ gira alrededor de la recta vertical $x = h$. Esta disposición genera una superficie de revolución al girar la curva en torno a dicha recta. La distancia desde un punto de la curva al eje de revolución es
$$r(y) = |g(y) - h|\,.$$
Esta distancia $r(y)$ representa el radio de la circunferencia generada por el punto $(g(y), y)$ de la curva al girar alrededor de la recta $x = h$.

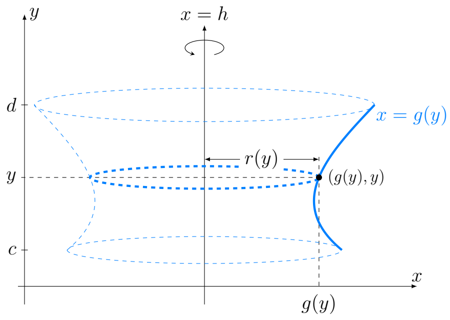


Figura 3.65

Estos resultados nos permiten establecer la siguiente definición:

Definición 3.7

1. Si $y = f(x)$ es una curva suave en el intervalo $[a, b]$, el área A de la superficie de revolución obtenida al girar la gráfica de f alrededor de una recta horizontal se calcula mediante:
$$A = 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$
donde $r(x)$ es la distancia entre la gráfica de f y el eje de revolución.

2. Si $x = g(y)$ es una curva suave en el intervalo $[c, d]$, el área A de la superficie de revolución obtenida al girar la gráfica de g alrededor de una recta vertical se obtiene mediante:
$$A = 2\pi \int_c^d r(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy,$$
donde $r(y)$ es la distancia entre la gráfica de g y el eje de revolución.

Ejemplo 3.43. Halle el área de la superficie de revolución, generada al hacer rotar el arco de curva
$$y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x} \quad \text{con} \quad x \in [1, 3],$$
alrededor de la recta $y = 0$.

Solución. Para hallar el área de la superficie de revolución generada al hacer rotar el arco de curva $y = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{1}{x}$ alrededor de $y = 0$ en $x \in [1, 3]$, utilizamos:
$$A = 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$
donde según la Figura 3.66, tenemos la distancia entre la gráfica de la curva y el eje de giro es
$$r(x) = |y - 0| = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}, \quad x \in [1, 3].$$

Además, derivando respecto de x, se tiene:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{x^2}.$$

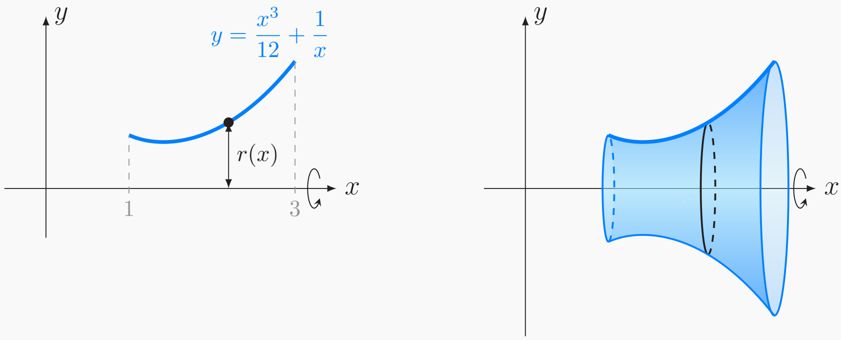


Figura 3.66

Finalmente, el área de la superficie de revolución es

$$\begin{aligned}
A &= 2\pi\int_1^3\left(\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx\\
&= 2\pi\int_1^3\left(\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}\right)\sqrt{\frac{x^4}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}}\,dx\\
&= 2\pi\int_1^3\left(\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx\\
&= 2\pi\int_1^3\left(\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)dx\\
&= 2\pi\int_1^3\left(\frac{x^5}{48}+\frac{x}{3}+\frac{1}{x^3}\right)dx\\
&= 2\pi\left[\frac{x^6}{288}+\frac{x^2}{6}-\frac{1}{2x^2}\right]_1^3=\frac{155}{18}\pi\ u^2.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.44. Halle el área de la superficie de revolución generada al girar el arco de la curva $y=\ln(x-1)$, $1.5\le x\le 5$ alrededor de la recta $x=1$.

Solución. Tenemos que $y=\ln(x-1)$ se puede expresar como

$$x=1+e^y,\quad \text{con}\quad y\in[\ln(1/2),\ln 4]\,.$$

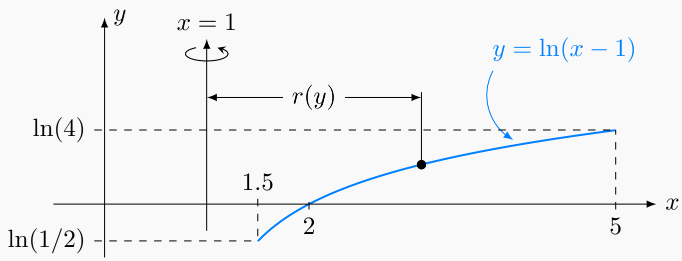


Figura 3.67

De la Figura 3.67, tenemos que el radio está dado por

$$r(y) = |x-1| = e^y.$$

Luego, derivando con respecto de y:

$$\frac{d}{dy}\left(1+e^y\right) = e^y.$$

Así, tenemos que el área de la superficie de revolución es

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{\ln(1/2)}^{\ln(4)} e^y \sqrt{1+(e^y)^2}\, dy \\ &= 2\pi \left[\frac{e^{2y}}{2}\sqrt{\frac{1+e^{2y}}{e^{2y}}} + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{e^{2y}+1}+e^y\right| \right]_{\ln(1/2)}^{\ln 4} \\ &= \pi\left(4\sqrt{17}+\ln\left(\sqrt{17}+4\right) - \frac{\sqrt{5}}{4} - \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\right)\ u^2. \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos 3.4.

1. Calcule el área de la superficie de una esfera de radio r.
2. Calcule las áreas de las superficies que se obtienen rotando las curvas dadas alrededor de las rectas que se indican, en los siguientes items:
   a) $y = x^3$, $(0 \le x \le 2)$ alrededor del eje y.
   b) $y = x^2$, $(0 \le x \le 1)$ alrededor del eje x.
   c) $y = x^{3/2}$, $(0 \le x \le 1)$ alrededor del eje x.
   d) $y = x^{3/2}$, $(0 \le x \le 1)$ alrededor del eje y.
3. **(Área de la superficie de un cono).** Calcule el área de la superficie curva de un cono circular recto con radio en la base r y altura h que se obtiene rotando el segmento recto que va desde $(0,0)$ hasta (r,h) alrededor del eje y.
4. En los siguientes items, encuentra el área de superficie que se genera al girar la curva en torno al eje y.

a) $x = 7y - 2, 0 \leq y \leq 3$

b) $x = y^3, 0 \leq y \leq 5$

c) $x = \sqrt{16 - y^2}, -2 \leq y \leq 2$

5. Calcule el área de la superficie de revolución generada al hacer girar el arco de la curva $y = \sqrt{9 - x^2}$, $-2 \leq x \leq 2$, alrededor del eje x.

6. Halle el área de la superficie de revolución generada al girar el arco de curva $\ln(\sqrt{y}) + x - \dfrac{y^4}{4} = 0$, $y \in [2, 4]$, alrededor de la recta $x = 1$.

7. Calcule el área de la superficie de revolución generada al hacer girar el arco de curva $x = \dfrac{1}{8}y^4 + \dfrac{1}{4y^2}$ desde $y = 1$ hasta $y = 2$ alrededor de la recta $x = 4$.

8. Determine el área de la superficie de revolución generada al hacer girar el arco de curva $y = -1 + \sqrt{4 - \dfrac{x^2}{2}}$ con $x \in [0, 2]$ alrededor de la recta $y + 1 = 0$.

9. Halle el área de la superficie de revolución generada al girar el arco de curva $x^4 + \dfrac{2}{x^2} - 8y = 0$; $x \in [1, 2]$ alrededor de la recta $x - 2 = 0$.

10. Encuentre el área de la superficie que envuelve el solido generado al rotar la curva $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, alrededor del eje x.

11. Calcule el área de la superficie de revolución generada al rotar, alrededor de la recta $x = -2$, el arco de la curva $x = -2 - \sqrt{4 - y}$, en $[-5, -3]$.

12. Halle el área de la superficie de la revolución engendrada por el arco de la parábola cúbica $9y = x^3$ en $[0; 2]$.

13. Determine el área de la superficie alrededor del eje x, generada por el arco de la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = e^t \operatorname{sen} t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$$

desde $t = 0$ hasta $t = \pi$.

14. Encuentre el área de la superficie de revolución generada al hacer girar la curva $y = \sqrt{x}$ alrededor del eje x, en $0 \leq x \leq 2$.

15. Halle el área de la superficie de revolución generada al hacer girar el arco de la curva $y = \dfrac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)$,en$[-1, 1]$ alrededor de la recta $x = 2$.

3.5. Aplicaciones en la física

La integral definida es una herramienta fundamental en la física, proporcionando una forma de cuantificar diversas magnitudes que varían de manera continua. En esta sección, exploraremos cómo las integrales definidas se aplican para calcular el trabajo realizado por fuerzas variables, la determinación del centro de masa de sistemas de partículas y cuerpos continuos.

3.5.1. Trabajo

En la vida cotidiana, se entiende por trabajo al esfuerzo para realizar una tarea. En física, el concepto de trabajo es fundamental para entender cómo las fuerzas afectan el movimiento de los objetos. El trabajo realizado por una fuerza se define como el producto de la fuerza aplicada y el desplazamiento en la dirección de la fuerza. Sin embargo, cuando la fuerza varía a lo largo del recorrido, necesitamos usar la integral definida para calcular el trabajo total.

Cuando una fuerza constante F actúa sobre un objeto y lo desplaza una distancia d en la dirección de la fuerza, el trabajo realizado se calcula como:

$$W = F \cdot d.$$

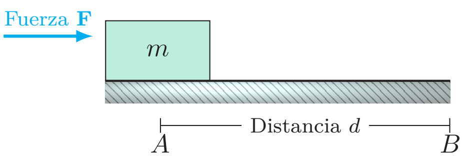


Figura 3.68: Trabajo necesario para trasladar el objeto desde A hasta B es $W = F \cdot d$.

El trabajo se mide en diferentes unidades según el sistema de unidades que se esté utilizando. La unidad de trabajo en el Sistema Internacional de Unidades (SI) es el joule (J), pero hay otras unidades que se usan en diferentes contextos. A continuación, se presenta una tabla con algunas de las unidades más comunes de trabajo:

Sistema	**Distancia**	**Fuerza**	**Trabajo**
SI	metro (m)	Newton (N)	N−m = Joule (J)
Técnico	metro (m)	kilogramo fuerza (kg − f)	kg − f · m
Cegesimal (CGS)	centímetro (cm)	dina	dina−cm=ergio
Inglés	pie (ft)	libra (lb)	lb − ft

Cuadro 3.1: Unidades de trabajo en diferentes sistemas.

En muchos casos prácticos, la fuerza que actúa sobre un objeto no permanece constante, sino que cambia a medida que el objeto se desplaza a lo largo de una línea. Imagina que el objeto se desplaza a lo largo del eje x desde el punto a hasta el punto b, y está sujeto a una fuerza variable, representada por $F(x)$ en el punto x, donde F es una función continua. ¿Cuánto trabajo se realiza en este proceso? Una vez más, podemos utilizar la estrategia de dividir, aproximar e integrar para encontrar la respuesta. Al particionar el intervalo $[a, b]$ en pequeñas partes iguales, estamos segmentando el problema. Luego, al suponer que la fuerza es constante en cada parte pequeña, podemos aproximar el trabajo realizado. Si la fuerza permanece constante en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y es igual $F(t_k)$, con $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, entonces el trabajo necesario para mover el objeto desde x_{k-1} hasta x_k es $F(t_k)(x_k - x_{k-1})$ (ver la Figura 3.69). Finalmente, al sumar todos estos pequeños trabajos y tomar el límite cuando la longitud $\Delta x = x_k - x_{k-1}$ tiende a cero, obtenemos el **trabajo** total realizado al mover el objeto desde a hasta b:

$$W_{a\to b} = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} F(t_k)\Delta x.$$

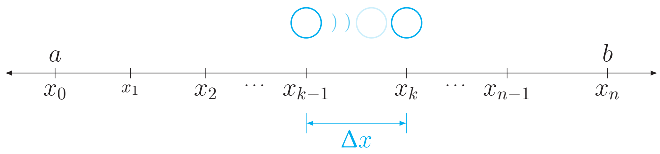


Figura 3.69

A partir del análisis previo, se establece la siguiente definición.

Definición 3.8: Trabajo

Sea F una función continua en el intervalo $[a, b]$ y sea $F(x)$ la fuerza en un número $x \in [a, b]$. Entonces el trabajo W realizado por la fuerza para mover un objeto desde a hasta b es

$$\boxed{W_{a\to b} = \int_a^b F(x)dx.} \tag{3.19}$$

Ejemplo 3.45. Sobre una partícula que está a x metros del origen, se ejerce una fuerza de $F(x) = x^2 + 2x + 2$ Newton. Halle el trabajo realizado al trasladar la partícula desde $x = 2$ hasta $x = 6$.

Solución. Hallamos el trabajo mediante:

$$W = \int_2^6 \left(x^2 + 2x + 2\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right]_2^6 = \frac{328}{3} Joule.$$

En esta sección, nos centraremos en el cálculo del trabajo con aplicación específica a los resortes.

Aplicación a resortes

La ley de Hooke establece que cuando un resorte se estira (o comprime) más allá de su longitud natural (ver Figura 3.70), la fuerza de restitución ejercida por el resorte es directamente proporcional a la cantidad de elongación (o compresión) x (ver Figura 3.71). Esto se puede expresar matemáticamente como:

$$F(x) = kx,$$

donde k es una constante de proporcionalidad llamada **constante del resorte**.

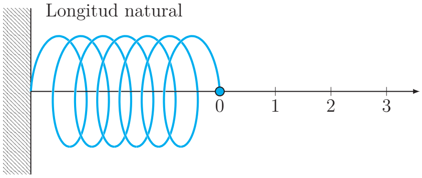


Figura 3.70

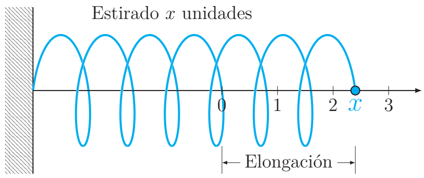


Figura 3.71

Ejemplo 3.46. Una fuerza de 80 N se requiere para mantener estirado un resorte desde su longitud natural de 25 cm hasta una longitud de 30 cm. ¿Cuánto trabajo se necesita para estirar el resorte desde 32 cm hasta 36 cm de longitud?

Solución. Usamos la ley de Hooke

$$F = kx$$
$$80 = k\left(\frac{30-25}{100}\right)$$

entonces $k = 1600$. Luego, reemplazando en:

$$W = \int_{\frac{32-25}{100}}^{\frac{36-25}{100}} F(x)dx = \int_{\frac{7}{100}}^{\frac{11}{100}} 1600xdx = (1600)\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{\frac{7}{100}}^{\frac{11}{100}}$$
$$W = 800\left(\left(\frac{11}{100}\right)^2 - \left(\frac{7}{100}\right)^2\right) = \frac{144}{25}J.$$

El trabajo que se necesita para estirar el resorte desde 32 cm hasta 36 cm es de $\frac{144}{25}$ J.

Ejemplo 3.47. Para estirar un resorte en 5 cm desde su longitud natural L se requiere de 2 J de trabajo. Determine L, si para comprimir el resorte desde su longitud natural hasta 20 cm se necesitan 50 J de trabajo.

Solución. Por la ley de Hooke, sabemos que $F = kx$, por lo que hallaremos k en:

$$2 = \int_0^{5/100} kxdx$$
$$4 = k\left(\frac{5}{100}\right)^2$$
$$k = 1600$$

Por otro lado, tenemos

$$50 = \int_0^{L-20/100} 1600xdx$$
$$50 = 1600\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{L-1/5}$$
$$\frac{50}{800} = \frac{1}{16} = \left(L - \frac{1}{5}\right)^2$$
$$\pm\frac{1}{4} = L - \frac{1}{5} \Rightarrow L = \frac{9}{20}$$

Finalmente, $L = 0.45$ m $= 45$ cm.

Ejemplo 3.48. Se requiere una fuerza de 100N para estirar un resorte 3cm. Determine el trabajo que se necesita para comprimir dicho resorte desde una longitud de 10cm a 8cm, si se sabe que su longitud natural es de 25cm.

Solución.

- Vemos que: $F(0.03) = 100 = k(0.03)$ entonces $K = \dfrac{100^2}{3} N/m$
- Además, como la longitud natural es de 25cm, tenemos:

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{-\frac{15}{100}}^{-\frac{17}{100}} \frac{100^2}{3} x dx \\
&= -\frac{100^2}{3} \int_{-\frac{17}{100}}^{-\frac{15}{100}} x dx \\
&= -\frac{100^2}{3} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{-0.17}^{-0.15} \right) \\
&= -\frac{100^2}{6} \left((0.15)^2 - (0.17)^2 \right) \\
&= -\frac{100^2}{6} (0.15 - 0.17)(0.15 + 0.17) \\
&= -\frac{100^2}{6} \left(-\frac{2}{100} \right) \left(\frac{32}{100} \right) = \frac{32}{3} J \approx 10.7\ J
\end{aligned}
$$

Ejercicios propuestos 3.5.1.

1. Para estirar un resorte helicoidal desde una longitud de 24 cm hasta una longitud de 30 cm se requiere un trabajo de 4 Joules. Calcule la longitud natural de dicho resorte si para comprimir 5 cm desde su longitud natural se requiere 2 Joules de trabajo.
2. Un resorte tiene una longitud natural de Lcm; para comprimirlo 6 cm se requiere una fuerza de 160 N.
   a) Si el trabajo que se requiere para comprimir el resorte desde Lcm hasta 50 cm es de 80 J. Calcule la longitud L.
   b) Determine el trabajo que se requiere para hacer que el resorte llegue a 95 cm, partiendo de su estado comprimido del ítem a).
3. Para estirar en 5 cm un resorte desde su longitud natural (Lcm) se requiere de una fuerza de 80 N.
   a) Determine el trabajo realizado al comprimir el resorte de la longitud natural a $L - 3$ cm.
   b) Si se requiere de 60 J para comprimir el resorte hasta 40 cm. Halle la longitud natural del resorte.

4. Para cualquier resorte que cumple la Ley de Hooke, demuestre que el trabajo realizado para estirar el resorte una distancia d está dado por $W = \frac{1}{2}kd^2$.

5. Para estirar en 8 cm un resorte helecoidal desde su longitud natural se requiere un trabajo de $4J$. Calcule su longitud natural si con una fuerza de 40 N el resorte se mantiene estirado una longitud de 20 cm.

6. Una fuerza de $25N$ alarga un resorte helecoidal de 3 cm. Calcule el trabajo realizado para alargar el resorte 2 cm más.

7. Se requiere $5J$ de trabajo para estirar un resorte helicoidal de 10 cm a 14cm y de otros $10J$ de trabajo para estirarlo de 14cm a 16cm. Determine el trabajo que se requiere para comprimir dicho resorte desde una longitud de 8cm hasta una longitud de 5cm.

8. Una fuerza de 20N comprime un resorte helicoidal que tiene longitud natural 80 cm hasta una longitud de 70 cm. Determine el trabajo necesario para comprimir dicho resorte desde una longitud de 60 cm a 10 cm.

9. Un resorte cuya longitud natural es L cm se estira hasta alcanzar una longitud de 15 cm y para mantenerlo estirado se necesita una fuerza de $50N$. Si se requiere de un trabajo de 4 J para estirarlo desde 15 hasta 20 cm, determine la longitud natural del resorte.

10. La longitud natural de un resorte es de 10 cm, se requiere una fuerza de 300 N para comprimirlo 6 cm. Calcule el trabajo necesario para comprimir el resorte desde los 8 cm hasta los 6 cm.

11. Se requiere una fuerza de $10N$ para estirar un resorte de 20 cm, a una de longitud de 26 cm. Encuentra el trabajo realizado para estirar el resorte desde una longitud de 24 cm, a una de 28 cm.

12. Para estirar un resorte desde una longitud de $4cm$ hasta una de 8 cm se requiere un trabajo de 40 $Joules$, y para deformarlo de 8 cm a 9 cm se requieren de un trabajo de 120 Joules. Calcule la constante de fuerza del resorte y su longitud natural.

3.5.2. Centro de masa y centroide

En esta sección, nos enfocaremos en calcular el centro de masa y el centroide de figuras planas y láminas planas homogéneas. Más adelante, en la sección 3.6, profundizaremos en los conceptos de centro de gravedad y centro de masa para un sistema de partículas. Sin embargo, en esta sección, nuestro objetivo será encontrar el centro de masa de láminas homogéneas, es decir, aquellas con densidad constante.

Comprender la posición del centro de masa de un cuerpo o de un conjunto de cuerpos es esencial tanto en física como en ingeniería. Antes de aprender a determinar el centro de masa de regiones planas, es necesario repasar algunos conceptos básicos de física.

La **masa** de un objeto se refiere a la cantidad de materia que posee. En el sistema de unidades inglés, la masa se mide en slugs; en el Sistema Internacional (SI), se mide en kilogramos; y en el sistema centímetro-gramo-segundo (cgs), se mide en gramos.

Centro de masa de un sistema en una línea

Consideremos un sistema sencillo compuesto por dos partículas con masas m_1 y m_2, conectadas mediante una varilla de masa despreciable. Si este sistema se coloca sobre un fulcro, como se muestra en la Figura 3.72, el equilibrio se alcanzará si

$$m_1 d_1 = m_2 d_2, \tag{3.20}$$

donde d_1 y d_2 son las distancias (también conocidas como brazos de momento) entre cada partícula y el fulcro. La cantidad $m_1 d_1$, conocida como el momento de m_1 respecto al fulcro, indica la tendencia de m_1 a hacer girar el sistema alrededor del fulcro (en este caso, en sentido antihorario). De manera similar, el momento $m_2 d_2$ indica la tendencia de m_2 a hacer girar el sistema alrededor del fulcro (en sentido horario).

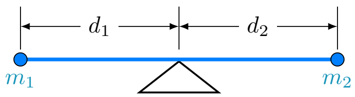


Figura 3.72: La condición de equilibrio del sistema es $m_1 d_1 = m_2 d_2$.

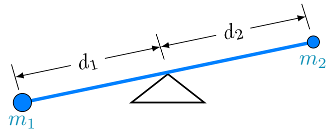


Figura 3.73: Sistema que no está en equilibrio.

Podemos utilizar la ecuación (3.20) para encontrar una fórmula que permita calcular el centro de masa del sistema. Ubiquemos el sistema en una línea de coordenadas. Si x representa la distancia desde el origen O hasta una masa m, el producto mx se define como el momento de la masa respecto al origen, como lo vimos previamente.

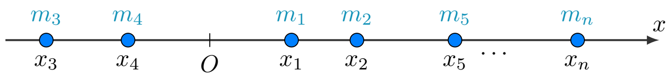


Figura 3.74: Sistema de n masas puntuales sobre el eje x.

Consideremos un sistema de n masas puntuales $m_1, m_2, \dots, m_n$ ubicadas a distancias dirigidas $x_1, x_2, \dots, x_n$ desde O, como se muestra en la Figura 3.74, definimos la masa total del sistema como

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

y el momento del sistema respecto al origen como

$$M_O = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k.$$

Utilizando la ecuación (3.20), decimos que el sistema está en equilibrio si

$$\sum_{k=1}^{n} m_k x_k = 0.$$

Si el sistema de masas no está en equilibrio, como se muestra en la Figura 3.73, existe un punto P con coordenada $\bar{x}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - \bar{x}) = 0 \quad \text{o} \quad \sum_{k=1}^{n} m_k x_k - \bar{x}\sum_{k=1}^{n} m_k = 0.$$

Al resolver para $\bar{x}$, obtenemos

$$\bar{x} = \frac{M_O}{m} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}.$$

Este punto $\bar{x}$ se conoce como el **centro de masa** o **centro de gravedad** del sistema.

Importante. En un sistema donde la aceleración de la gravedad difiere entre las masas, el centro de gravedad no coincide con el centro de masa.

Definición 3.9: Centro de masa de un sistema de n masas en una línea

Sea S un sistema de n masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ubicadas en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente, dispuestas en una línea, y sea $m = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k$ la masa total del sistema.

(i) El momento de S respecto al origen es

$$\boxed{M_O = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k.} \tag{3.21}$$

(ii) El centro de masa de S está ubicado en

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k.} \tag{3.22}$$

Ejemplo 3.49. Encuentre el centro de masa de un sistema de tres masas puntuales ubicadas en $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 5$, en el eje x (en metros), cuyas masas son $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ y $m_3 = 4$ kilogramos, respectivamente.

Solución. Para encontrar el centro de masa del sistema, utilizamos (3.22). Primero, calculamos la masa total del sistema:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = 2\,\text{kg} + 3\,\text{kg} + 4\,\text{kg} = 9\,\text{kg}$$

Luego, calculamos el momento total respecto al origen:

$$M = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = (2\,\text{kg})(1\,\text{m}) + (3\,\text{kg})(3\,\text{m}) + (4\,\text{kg})(5\,\text{m})$$

Entonces

$$M = 2\,\text{kg}\cdot\text{m} + 9\,\text{kg}\cdot\text{m} + 20\,\text{kg}\cdot\text{m} = 31\,\text{kg}\cdot\text{m}$$

Finalmente, el centro de masa se encuentra en:

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{31\,\text{kg}\cdot\text{m}}{9\,\text{kg}} = 3.44\,\text{m}$$

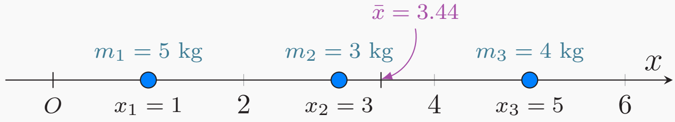


Figura 3.75: Sistema de 3 masas puntuales sobre el eje x.

Centro de masa de un sistema en un plano

Para un sistema de n masas puntuales ubicadas en el plano xy, como se ilustra en la Figura 3.76, el centro de masa se define como el punto $(\overline{x}, \overline{y})$, donde las coordenadas están dadas por:

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

donde M_x y M_y representan los momentos de las masas respecto a los ejes x, y, respectivamente, y $m = \sum_{k=1}^{n} m_k$ es la masa total del sistema.

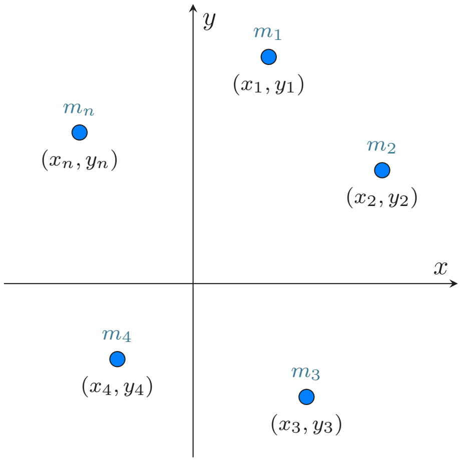


Figura 3.76: Sistema de n masas puntuales en el plano xy.

Centro de masa de una lámina plana

Ahora exploraremos cómo encontrar el centro de masa, o punto de equilibrio, de una lámina delgada bidimensional (ver Figura 3.77) con densidad constante ρ (masa por unidad de área).

La **densidad** es la medida de masa por unidad de volumen, como gramos por centímetro cúbico, pero para láminas planas, se refiere a la masa por unidad de área. Una lámina es **homogénea** cuando su densidad ρ es uniforme. El centro de masa de una lámina homogénea es el punto donde se puede considerar concentrada toda su masa. Dado que la densidad es constante en una lámina plana homogénea, encontrar su centro de masa se reduce a localizar el centroide de la región.

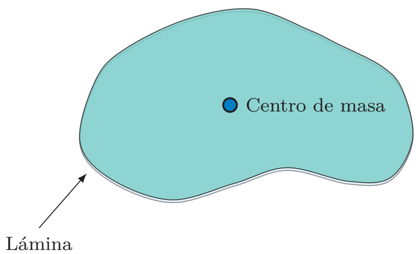


Figura 3.77: Centro de masa de una lámina.

Consideremos una lámina plana de forma irregular con densidad constante ρ, delimitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ en el intervalo $[a, b]$, como se muestra en la Figura 3.78.

La masa de esta región es

$$m = \rho \cdot A = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx,$$

donde A es el área de la región. Para encontrar el centro de masa de esta lámina, tomamos una partición regular del intervalo $[a, b]$ en n de longitud Δx. Sea t_k el centro del k-ésimo subintervalo. Podemos aproximar la parte de la lámina en el k-ésimo subintervalo con un rectángulo cuya altura es $h = f(t_k) - g(t_k)$. Dado que la densidad es constante e igual a ρ, la masa del rectángulo es

$$m_k = \rho \cdot \text{área} = \rho \cdot [f(t_k) - g(t_k)] \cdot \Delta x.$$

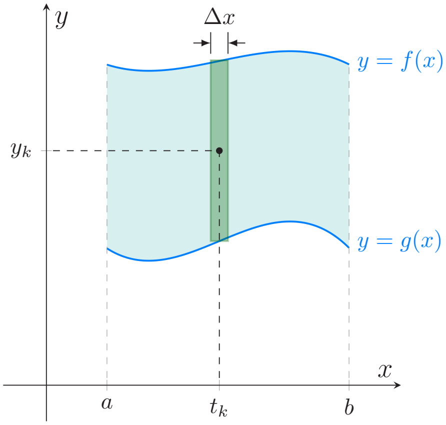


Figura 3.78: Lámina plana con densidad constante ρ.

El centro de masa del rectángulo es (t_k, y_k) y la distancia dirigida desde el eje x al centro de masa es

$$y_k = \frac{f(t_k) + g(t_k)}{2}.$$

Por lo tanto, el momento de m_k respecto al eje x está dado por

$$\text{Momento} = (\text{masa})\,(\text{distancia}) = m_k \cdot y_k = \rho \cdot [f(t_k) - g(t_k)] \cdot \Delta x \cdot \left(\frac{f(t_k) + g(t_k)}{2}\right).$$

Sumando todos los momentos y tomando el límite cuando $n \to \infty$, obtenemos las siguiente definición para los momentos y el centro de masa de la lámina plana.

Definición 3.10: Momentos y centro de masa de una lámina plana

Sean f y g dos funciones continuas tal que $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Si consideramos una lámina plana de densidad constante ρ y acotada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$, tenemos:

(i) Los **momentos** respecto al eje x y al eje y, respectivamente, son

$$M_x = \frac{\rho}{2} \int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right] dx,$$

$$M_y = \rho \int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx.$$

(ii) El **centro de masa** $(\bar{x}, \bar{y})$ está dado por

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m},$$

donde $m = \rho \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ es la masa total de la lámina.

Ejemplo 3.50. Encuentre el centro de masa de la lámina con densidad constante ρ, acotada por las gráficas de las parábolas:

$$y = -x^2 + 4, \quad y = (x-1)^2 - 1.$$

Solución. La lámina en cuestión se muestra en la Figura 3.79. Los puntos de intersección de las dos gráficas son $(-1,3)$ y $(2,0)$. Si definimos las funciones $f(x) = -x^2 + 4$ y $g(x) = (x-1)^2 - 1$, entonces $f(x) \geq g(x)$ en $[-1,2]$. Por lo tanto, la masa de la lámina es

$$\begin{aligned} m &= \rho \int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx \\ &= \rho \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + 4 - ((x-1)^2 - 1)\right)\, dx \\ &= \rho \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\, dx \\ &= \rho \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} \\ &= 9\rho \text{ unidades de masa.} \end{aligned}$$

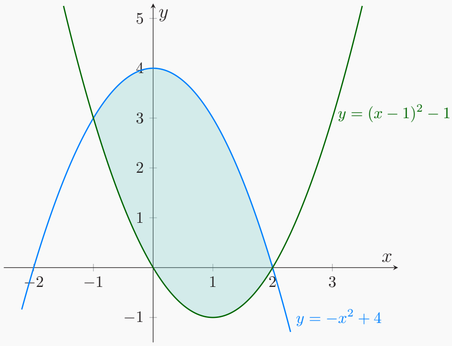


Figura 3.79

Luego, calculamos los momentos respecto a los ejes:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{\rho}{2} \int_{-1}^{2} \left[\left(-x^2 + 4\right)^2 - \left((x-1)^2 - 1\right)^2\right]\, dx \\ &= \frac{\rho}{2} \int_{-1}^{2} \left(4x^3 - 12x^2 + 16\right)\, dx = \frac{\rho}{2}\left[x^4 - 4x^3 + 16x\right]_{-1}^{2} = \frac{27\rho}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \rho \int_{-1}^{2} x[f(x) - g(x)]dx = \rho \int_{-1}^{2} (-2x^3 + 2x^2 + 4x)dx \\ &= \rho \left[-\frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} + 2x^2\right]_{-1}^{2} = \frac{9\rho}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, las coordenadas del centro de masa son

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right) = \left(\frac{\frac{9\rho}{2}}{9\rho}, \frac{\frac{27\rho}{2}}{9\rho}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

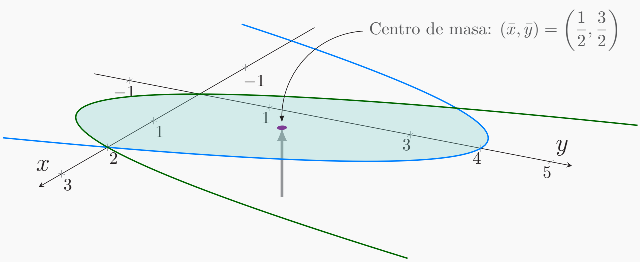


Figura 3.80: El centro de masa es el punto de equilibrio.

Importante. En el ejemplo anterior, la densidad ρ es un factor común en ambos momentos y en la masa, por lo que se simplifica en los cocientes que representan las coordenadas del centro de masa. Por consiguiente, el centro de masa de una lámina con densidad constante depende únicamente de la forma de la lámina y no de su densidad. Debido a esto, el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, es conocido como centroide, y a veces se denomina centro de masa de una región en el plano o centroide de la región. En resumen, para encontrar el centroide de una región en el plano, simplemente se considera que la región tiene una densidad constante $\rho = 1$ y se calcula el centro de masa correspondiente, donde en lugar de dividir los momentos por la masa, se divide solamente por el área de la región.

Ejemplo 3.51. Determine el centroide de la región limitada por las curvas:

$$y + 2x^3 = 0 \quad \text{y} \quad 8x^2 = y^3.$$

Solución. Hallando los puntos de intersección de las curvas:

$$y^3 = 8x^2 = -8x^9$$

entonces $x = 0 \vee x = -1$, luego los puntos de intersección son: $(0,0), (-1,2)$.
La región acotada por las curvas, se muestra la siguiente Figura 3.81:

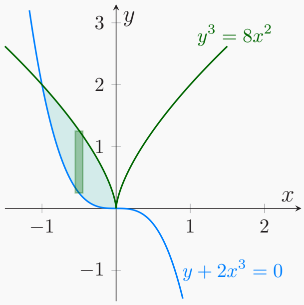


Figura 3.81

El centroide es:

$$C = (x, y) = \left(\frac{M_y}{A}, \frac{M_x}{A}\right)$$

Luego, hallando el área:

$$A = \int_{-1}^{0} \left[2x^{2/3} - \left(-2x^3\right)\right] dx = \int_{-1}^{0} \left(2x^{2/3} + 2x^3\right) dx$$

$$A = \left(\frac{6}{5}x^{5/3} + \frac{1}{2}x^4\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{7}{10}.$$

Ahora hallaremos los momentos:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \left[\left(2x^{2/3}\right)^2 - \left(-2x^3\right)^2\right] dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \left(4x^{4/3} - 4x^5\right) dx$$

$$M_x = \left(\frac{6}{7}x^{7/3} - \frac{2}{7}x^7\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{4}{7} \Rightarrow y = \frac{\frac{7}{7}}{\frac{10}{10}} = \frac{40}{49}$$

$$M_y = \int_{-1}^{0} x\left[2x^{2/3} - \left(-2x^3\right)\right] dx = \int_{-1}^{0} \left(2x^{5/3} + 2x^4\right) dx$$

$$M_y = \left(\frac{3}{4}x^{1/3} + \frac{2}{5}x^5\right)\Bigg|_{-1}^{0} = -\frac{7}{20} \Rightarrow x = \frac{-\frac{7}{20}}{\frac{7}{10}} = -\frac{1}{2}.$$

Finalmente, el centroide es:

$$C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{40}{49}\right).$$

Importante. En el caso anterior, discutimos cómo determinar el centroide de una región limitada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$ integrando respecto a x.

Ahora, consideremos el caso en el que la integración se realiza respecto a y. Sean f y g funciones continuas tales que $g(y) \leq f(y)$ para todo $y \in [c, d]$. Consideremos una lámina homogénea con densidad ρ, limitada por las gráficas de $x = f(y)$, $x = g(y)$, y $c \leq y \leq d$ (ver Figura 3.82). Para este caso, tenemos que:

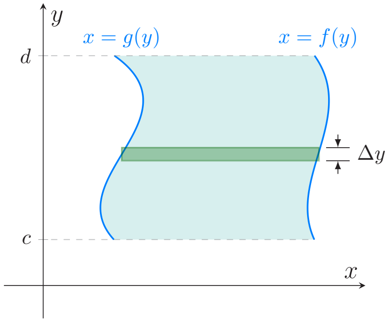


Figura 3.82

(i) La masa de la lámina es

$$M = \rho \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$

(ii) El momento con respecto al eje x es

$$M_x = \rho \int_c^d y[f(y) - g(y)]dy$$

(iii) El momento con respecto al eje y es

$$M_y = \frac{\rho}{2} \int_c^d \left[(f(y))^2 - (g(y))^2\right] dy$$

Entonces, el centro de masa o centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de esta región está dado por:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M}\right).$$

Ejemplo 3.52. Calcule las coordenadas del centro de masa de la región limitada por las gráficas de:

$$3x + (y-2)^2 = 9, \quad y = \sqrt{3x+9} + 2, \quad y = 2.$$

Solución. La región limitas por las curvas se muestran en la Figura 3.83.

Además, vemos que:

- Si $3x + (y-2)^2 = 9$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}(y-2)^2 + 3.$$

- Si $y = \sqrt{3x+9} + 2$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}(y-2)^2 - 3.$$

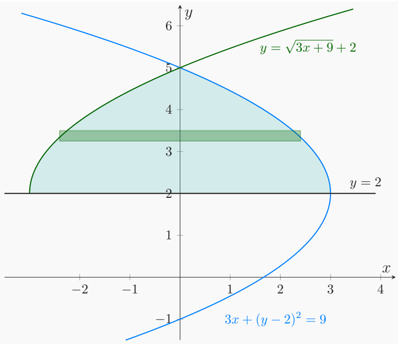


Figura 3.83

Así, tenemos que la masa es:

$$M = \rho \int_2^5 \left(-\frac{1}{3}(y-2)^2 + 3 - (\frac{1}{3}(y-2)^2 - 3) \right) dy = 12\rho$$

Po otro lado, por la simetría de la región, tenemos que $\bar{x} = 0$. Entonces, solo nos falta encontrar $\bar{y}$.

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_2^5 y \left(-\frac{1}{3}(y-2)^2 + 3 - \left(\frac{1}{3}(y-2)^2 - 3 \right) \right) dy \\ &= \rho \int_2^5 \left(-\frac{2y}{3}(y-2)^2 + 6y \right) dy \\ &= \rho \int_2^5 \left(-\frac{2}{3}y^3 + \frac{8}{3}y^2 + \frac{10}{3}y \right) dy \\ &= \frac{75}{2}\rho \end{aligned}$$

Entonces $\bar{y} = \dfrac{\frac{75}{2}\rho}{12\rho} = \dfrac{75}{24} \approx 3.13.$

$$\therefore (\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{75}{24} \right).$$

Ejercicios propuestos 3.5.2.

1. Encuentre el centroide de la región limitada por las curvas $y = 2x - x^2$, $y = 0$.
2. Halle la ordenada del centroide de la región encerrada por las curvas
$$y = \sqrt{x+y} \ \text{ y } \ 2y = x^2.$$
3. Determine el centroide de la región limitada por las curvas $y = \dfrac{1}{4}x^2 + 1$, $y = |x|$.
4. Calcule las coordenadas del centroide de la región limitada por las curvas:
$$y = \frac{4}{1+x^2}, \quad y = 2x^2.$$

5. Determine la abscisa del centroide de una lámina homogénea que tiene la forma de la región limitada por las curvas:

$$y=\sqrt{x},\quad y=\frac{x^2}{4}-1,\quad x+y=2 \quad \text{y} \quad x=0.$$

6. Halle las coordenadas del centroide de la región limitada por la curva $y=2\sqrt{x}$ y las rectas $x=4$, $y=0$.

7. Halle las coordenadas del centroide de la región limitada por la curva

$$y=\sqrt{16-x^2},\quad y=\sqrt{3}x,\quad y=x.$$

8. Halle las coordenadas del centroide de la región limitada por la curva

$$y=-2x^2-4x \ \text{ y la recta } \ y=0.$$

9. Halle las coordenadas del centroide de la región limitada por las curvas

$$x+y^2-4y=0,\quad y=x.$$

10. Halle las coordenadas del centroide de la región limitada por el eje Y y las curvas:

$$y=\operatorname{sen}x-\cos x,\quad y=\operatorname{sen}x+\cos x,\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

11. Calcule las coordenadas del centroide de la región limitada por las curvas:

$$x-y^2+4=0,\quad y-1+\sqrt{1-x}=0,\quad y=0.$$

12. Halle el centroide de la región limitada por las curvas:

$$y=x^2-1,\quad y=\ln(2x-1) \quad \text{y la recta} \quad y=1.$$

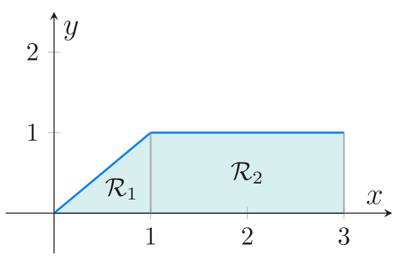
13. Determine la ordenada del centroide de la región limitada por las curvas:

$$y=1+\frac{1}{2}\sqrt{2-x},\quad x=1+e^{y-1} \ \text{ y la recta } \ y=2.$$

14. Determine el centroide la región limitada por las curvas:

$$y=x^2+\frac{4}{3}x-\frac{4}{3},\quad y=2-|x|$$

15. Para cada lámina homogénea $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ que se muestra en la figura adjunta, encuentre $M_y, M_x, \bar{y}$ y $\bar{x}$.



3.6. Algunas aplicaciones a la ingeniería

En esta sección, exploraremos la utilidad de la integral definida en diversas áreas de la física y la ingeniería. Desde la cinemática, donde nos permite determinar con precisión el movimiento de objetos bajo diferentes condiciones, hasta el cálculo del centro de gravedad y centro de masa en sistemas de partículas. Además, abordaremos cómo la integral definida se aplica en el cálculo de momentos de inercia, y veremos cómo se utiliza para determinar la fuerza hidrostática actuante sobre superficies sumergidas.

3.6.1. Aplicaciones a la cinemática

Cinemática de una partícula

En la vida cotidiana es muy común encontrar diversos problemas de ingeniería que pueden resolverse con conocimientos básicos de dinámica. En el estudio de la cinemática de una partícula, que consiste en determinar la geometría del movimiento de un cuerpo de tamaño despreciable. Asimismo, como es sabido, el movimiento se presenta de manera unidimensional o en línea recta, mientras que el desplazamiento se presenta en curva, de manera no lineal.

La cinemática es la rama de la dinámica que puede describir el **movimiento unidimensional** de la partícula mediante su **posición**, **velocidad** y **aceleración** en un momento determinado.

Posición

Es el punto donde se localiza una partícula y está referenciado por un sistema de coordenadas que tiene su origen en un punto fijo llamado O.

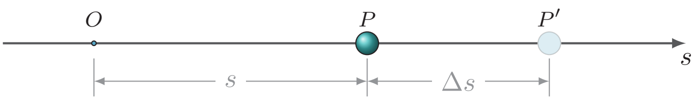


Figura 3.84: Posición.

Desplazamiento de una partícula

Se considera que una partícula se ha desplazado una distancia Δs sí su posición, s cambia a s' después de un determinado tiempo, como se muestra en la Figura 3.85.

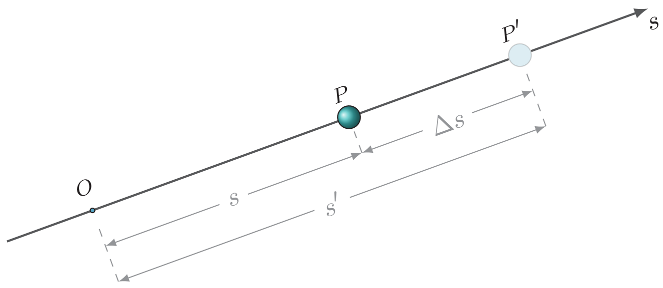


Figura 3.85: Desplazamiento de una partícula.

De la Figura 3.85 se tiene que

$$\Delta s = s' - s. \tag{3.23}$$

En este caso, Δs es positivo porque la posición final de la partícula está a la derecha de su posición inicial, es decir, $s' > s$. De manera similar, si la posición final estuviera a la izquierda de su posición inicial, Δs sería negativo.
El **desplazamiento** de una partícula es también una cantidad vectorial y debe diferenciarse de la **distancia recorrida** por la partícula. En particular, la distancia recorrida es un escalar positivo que representa la longitud total del trayecto que sigue la partícula.

Velocidad

Si una partícula recorre una distancia Δs durante el intervalo de tiempo Δt, su **velocidad media** en ese intervalo es:

$$v_{\text{media}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Si consideramos valores de Δt cada vez más pequeños, la magnitud de Δs también disminuye. Por lo tanto, la **velocidad instantánea** se define como el vector:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$$

o simplemente

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{3.24}$$

Dado que Δt o dt siempre es positivo, el signo que determina la dirección de la velocidad es el mismo que el de Δs o ds. Por ejemplo, si la partícula se mueve hacia la derecha (Figura 3.86), la velocidad es positiva; si se mueve hacia la izquierda, la velocidad es negativa. La magnitud de la velocidad se conoce como **rapidez** y generalmente se expresa en unidades de m/s o pies/s.

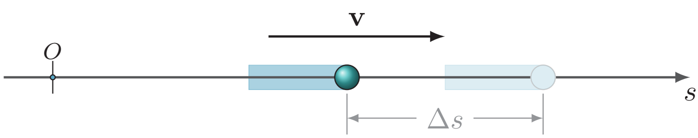


Figura 3.86: Velocidad.

Aceleración

Siempre que se conozca la velocidad de la partícula en dos puntos, su **aceleración media** durante el intervalo Δt se define como

$$a_{\text{media}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Aquí, Δv representa la variación de la velocidad durante el intervalo Δt, es decir, $\Delta v = v' - v$, como se muestra en la Figura 3.87.

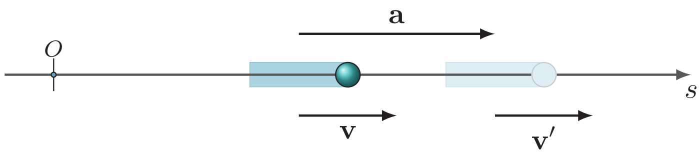


Figura 3.87: Aceleración.

La **aceleración instantánea** en un momento t se define como un vector que se obtiene considerando intervalos de tiempo Δt cada vez más pequeños y sus correspondientes cambios en velocidad Δv, de tal manera que:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right)$$

o equivalentemente,

$$a = \frac{dv}{dt}. \tag{3.25}$$

Si reemplazamos la ecuación (3.24) en (3.25), también podemos escribir:

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Tanto la aceleración media como la instantánea pueden ser positivas o negativas. En particular, cuando la partícula disminuye su velocidad, se dice que está desacelerando. Por lo tanto, a será negativa y actuará hacia la izquierda, en dirección opuesta a v. Además, cuando la velocidad es constante, la aceleración es cero, ya que $\Delta v = v - v = 0$. Las unidades comúnmente utilizadas para medir la aceleración son m/s^2 o pies/s^2.
Finalmente, se puede obtener una relación diferencial importante que relaciona el desplazamiento, la velocidad y la aceleración a lo largo de la trayectoria eliminando dt entre las ecuaciones (3.24) y (3.25), es decir,

$$\frac{v}{a} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{dv}{dt}} = \frac{ds}{dv}$$

o también

$$vdv = ads \quad \text{o} \quad a = v\frac{dv}{ds}. \tag{3.26}$$

Movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV)

Se caracteriza porque su aceleración a es constante. Además, si combinamos las ecuaciones (3.24), (3.25) y (3.26), obtenemos

- **Velocidad como una función del tiempo.** Si integramos (3.25), suponiendo que la velocidad inicialmente es $v = v_0$ cuando $t = 0$, entonces

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt = a\int_0^t dt \Longrightarrow v - v_0 = at$$

$$v = v_0 + at. \tag{3.27}$$

- **Velocidad como una función de posición.** Si suponemos que la velocidad inicialmente es $v = v_0$ cuando $s = s_0$, e integramos (3.26), tenemos

$$\int_{v_0}^{v} vdv = \int_{s_0}^{s} ads = a\int_{s_0}^{s} ds \Longrightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = a(s - s_0)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0). \tag{3.28}$$

- **Posición como una función del tiempo.** Si suponemos que la posición inicial es $s = s_0$ cuando $t = 0$, y reemplazamos (3.27) en (3.24) e integramos, obtenemos

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t (v_0 + at)\, dt \Longrightarrow s - s_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \tag{3.29}$$

Ejemplo 3.53. La aceleración "a" de un bloque deslizante que tiene movimiento rectilíneo a lo largo del eje x, es una función de su desplazamiento x, de modo que $a = k\sqrt{x}$, donde k es una constante. Además, tanto la velocidad v como el desplazamiento x son ceros cuando $t = 0$. Determine a, v y x como funciones del tiempo t.

Solución. Si aplicamos (3.26), se tiene

$$\int_0^v vdv = \int_0^x k\sqrt{x}dx \Longrightarrow \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^v = \left[\frac{2}{3}kx^{3/2}\right]_0^x \Longrightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{2}{3}kx^{3/2}$$

Luego, despejando tenemos

$$v = \sqrt{\frac{4k}{3}x^{3/2}} = 2\sqrt{\frac{k}{3}}x^{3/4}$$

Además, como $v = \dfrac{dx}{dt}$, se tiene

$$2\sqrt{\frac{k}{3}}x^{3/4} = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow \frac{dx}{x^{3/4}} = 2\sqrt{\frac{k}{3}}dt.$$

Integrando

$$\int_0^x \frac{dx}{x^{3/4}} = \int_0^t 2\sqrt{\frac{k}{3}}dt \Longrightarrow 4x^{1/4} = 2\sqrt{\frac{k}{3}}t$$

Por lo tanto, la posición en función del tiempo es

$$x(t) = \frac{k^2}{144}t^4.$$

Para obtener la velocidad solo derivamos la posición:

$$v = \frac{d}{dt}\left(\frac{k^2}{144}t^4\right) = \frac{k^2t^3}{36},$$

y para obtener la aceleración derivamos la velocidad

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{k^2t^3}{36}\right) = \frac{1}{12}k^2t^2.$$

Finalmente, la posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo, respectivamente, son:

$$x(t) = \frac{k^2}{144}t^4, \quad v(t) = \frac{k^2t^3}{36} \quad \text{y} \quad a(t) = \frac{1}{12}k^2t^2.$$

Ejemplo 3.54. Una pelota es lanzada en línea recta con una velocidad descrita por la ecuación $v = -\dfrac{x^2}{18}\,\mathrm{m/s}$. Determine la posición, la velocidad y la aceleración de la pelota cuando $t = 3$ segundos.

Solución.

(i) **Cálculo de la posición de la pelota.** La velocidad v está dada por:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{x^2}{18}$$

Separando las variables e integrando:

$$\frac{dx}{x^2} = -\frac{dt}{18} \Longrightarrow \int_0^x x^{-2}\,dx = -\frac{1}{18}\int_0^t dt$$

Evaluando los límites de integración:

$$\left[-\frac{1}{x}\right]_0^x = -\frac{1}{18}[t]_0^t$$

Esto se simplifica a:

$$-\frac{1}{x} = -\frac{t}{18} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{18}{t}.$$

Cuando $t = 3\,\mathrm{s}$:

$$x = \frac{18}{3} = 6\,\mathrm{m}.$$

(ii) **Cálculo de la velocidad.** La velocidad v se puede obtener derivando la posición con respecto al tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{18}{t}\right) = -\frac{18}{t^2}.$$

Cuando $t = 3\,\mathrm{s}$:

$$v = -\frac{18}{3^2} = -2\,\mathrm{m/s}.$$

(iii) **Cálculo de la aceleración.** Tenemos que la aceleración a se puede obtener derivando la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{18}{t^2}\right) = \frac{36}{t^3}$$

Cuando $t = 3\,\mathrm{s}$:

$$a = \frac{36}{3^3} = \frac{36}{27} = 1.33\,\mathrm{m/s^2}.$$

Ejemplo 3.55. Una motocicleta se desplaza en línea recta sobre una carretera a una velocidad que está definida por la función $V = (4t+5)\,\mathrm{m/s}$. Si la motocicleta parte del reposo, es decir, cuando $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, determine la posición y la aceleración de la motocicleta cuando $t = 5$ segundos.

Solución.

(i) **Cálculo de la posición cuando $t = 5$ segundos.** La velocidad V está dada por:

$$V = \frac{dx}{dt} = 4t + 5$$

Integrando ambos lados con respecto al tiempo:

$$\int_0^x dx = \int_0^5 (4t+5)\,dt$$

Resolviendo las integrales:

$$x = \left[2t^2 + 5t\right]_0^5 = 2(5)^2 + 5(5) - (0) = 50 + 25 = 75\,\mathrm{m}$$

Por lo tanto, la posición de la motocicleta cuando $t = 5$ segundos es $x = 75$ metros.

(ii) **Cálculo de la aceleración.** La aceleración a se obtiene derivando la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(4t+5) = 4\,\mathrm{m/s^2}$$

Por lo tanto, la aceleración de la motocicleta es $a = 4\,\mathrm{m/s^2}$.

Ejercicios propuestos 3.6.1.

1. La aceleración de un auto de carrera en el intervalo entre 2 y 4 segundos es de la forma $a = 2t$ m/s^2. En el instante $t = 2$ segundos, la velocidad es $v = 180$ km/h. Calcule el espacio recorrido por el auto en ese lapso de tiempo.

2. Una masa oscila en línea recta por acción de dos resortes, que le proporcionan una aceleración de la forma $a = mx + nx^2$ (m/s^2), con x en metros. Además, la velocidad de la masa $v(x)$ (m/s) en tres puntos de su recorrido son: $v(-1) = 2$, $v(1) = 4$ y $v(1.5) = 6$. Según esto, calcule la aceleración de la masa cuando $v = \sqrt{5}$ (m/s).

3. La aceleración de una partícula se define mediante la relación $a = 12x - 28$, donde x (m) y a (m/s^2). Si $v = 8$ m/s cuando $x = 0$, calcule si existe una velocidad mínima del móvil indicando en qué posición x tiene lugar.

4. La magnitud de la aceleración de una partícula que se desplaza sobre una línea recta varía según la ecuación $a = 12\sqrt{x}$, donde x está en cm y a en cm/s^2. Cuando

$t = 2$ s, la partícula se encuentra a 16 cm del origen, su velocidad es 32 cm/s, y la aceleración es 48 cm/s^2. Según esto, calcule:

(a) La velocidad en el instante en que la partícula se sitúa en $x = 12.96$ m.

(b) El instante que corresponde a la velocidad determinada en (a).

5. La aceleración de una partícula se define por $a = 200x(1 + Kx^2)$, donde a se expresa en m/s^2, x en metros, y K es una constante. Sabiendo que cuando $x = 0$, la velocidad de la partícula es $v = 2.5$ m/s, y cuando $x = 5$ m, $v = 5$ m/s. Calcula la velocidad para $x = 2$ m.

3.6.2. Centro de gravedad y centro de masa de un sistema de partículas

Centro de gravedad

Se llama centro de gravedad (cg) de un cuerpo, al centro de las atracciones (fuerzas) consideradas paralelas, que la gravedad ejerce sobre cada una de las partículas que forman el cuerpo.

Según la ecuación (3.30), para los cuerpos en aplicaciones prácticas se asume que el centro de atracción se encuentra en el infinito. Esta suposición permite establecer dos consideraciones importantes:

- **Primero:** Si representamos la atracción mediante fuerzas, dichas fuerzas son consideradas paralelas.

- **Segundo:** En un cuerpo homogéneo, todas las partículas experimentan la misma atracción gravitatoria, es decir, la gravedad es constante (g es constante). Así, cuando en un sistema g es constante y las fuerzas de atracción son paralelas, se dice que el sistema es gravitatorio uniforme.

Para un cuerpo sólido, cerrado y acotado en $\mathbb{R}^3$, la densidad se define como:

$$\rho = \frac{m}{V}, \tag{3.30}$$

donde $\rho = \rho(x, y, z)$ representa la densidad, m la masa y V el volumen del cuerpo.

Es importante notar que el concepto de centro de gravedad es fundamental en el análisis de la estabilidad de estructuras y objetos, así como en la mecánica de sistemas de partículas. En cuerpos homogéneos, el centro de gravedad coincide con el centro geométrico, lo que simplifica muchos cálculos en ingeniería y física aplicada.

Además, en sistemas no homogéneos, el cálculo del centro de gravedad requiere una integración más detallada de las distribuciones de masa, lo que puede involucrar el uso de técnicas avanzadas de cálculo integral y vectorial.

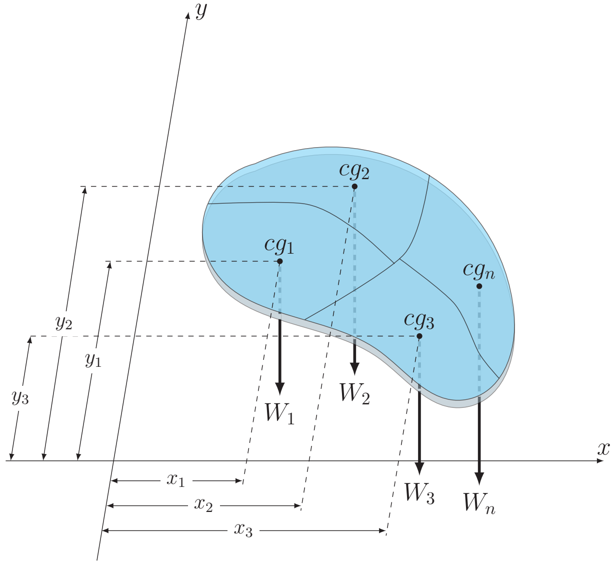


Figura 3.88: Para distancias cortas, es razonable aproximar los pesos considerándolos como fuerzas paralelas.

De la Figura 3.88, se observa que el **peso total** del sistema está dado por:

$$W = W_1 + W_2 + \cdots + W_n = \sum_{i=1}^{n} W_i.$$

A continuación, aplicamos el teorema de Varignon[1]:

$$\sum M_y : \sum_{i=1}^{n} W_i x_i \quad \text{y} \quad \sum M_y : W\bar{x}.$$

Según este teorema, ambos momentos deben ser iguales, lo que se expresa como:

$$W\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} W_i x_i.$$

Despejando para encontrar la coordenada $\bar{x}$, obtenemos:

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} W_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} W_i}. \tag{3.31}$$

Procediendo de manera análoga con los momentos en la dirección y:

$$\sum M_x : \sum_{i=1}^{n} W_i y_i \quad \text{y} \quad \sum M_x : W\bar{y}$$

[1] *El teorema de Varignon*, también conocido como *el principio de momentos*, establece que la suma de los momentos de las fuerzas alrededor de un punto determinado es igual al momento de la fuerza resultante respecto a dicho punto.

Igualando estas ecuaciones, se establece:

$$W\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} W_i y_i,$$

despejando

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i}. \tag{3.32}$$

De manera similar, para la coordenada z, se tiene:

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i}. \tag{3.33}$$

Finalmente, las coordenadas del centro de gravedad se expresan como:

$$\text{c. g.} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}). \tag{3.34}$$

Al generalizar las expresiones (3.31), (3.32) y (3.33), se obtiene:

$$\bar{x} = \frac{\int x \, dW}{\int \, dW} \tag{3.35}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y \, dW}{\int \, dW} \tag{3.36}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z \, dW}{\int \, dW}. \tag{3.37}$$

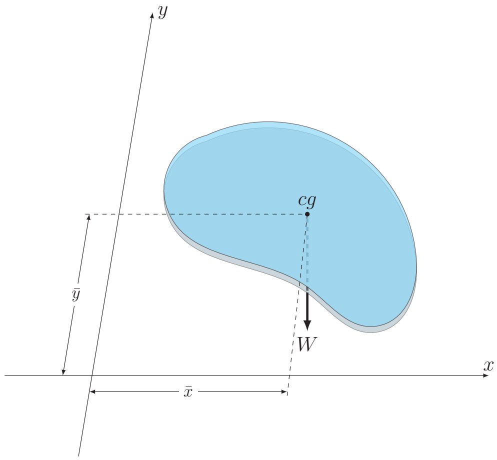


Figura 3.89: Centro de gravedad.

Centro de masa

Si consideramos que la aceleración de la gravedad es constante, se tiene la siguiente ecuación para el peso:

$$W = mg.$$

Luego, tomando diferenciales:

$$dW = gdm, \tag{3.38}$$

donde el diferencial dm es la masa de cualquier partícula del cuerpo. Por lo que, reemplazando (3.38) en las ecuaciones (3.31), (3.32) y (3.33), tenemos:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{3.39}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{3.40}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{3.41}$$

Generalizando las expresiones (3.39), (3.40) y (3.41):

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} \tag{3.42}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm} \tag{3.43}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z dm}{\int dm} \tag{3.44}$$

Las ecuaciones (3.42), (3.43) y (3.44) se utilizan para calcular el centro de masa de un cuerpo.

Centroide

El centroide es el centro geométrico de un objeto. Su ubicación se puede determinar mediante fórmulas análogas a las empleadas para calcular el centro de gravedad o el centro de masa de un cuerpo específico. Cuando el material que compone el cuerpo es uniforme u homogéneo, la densidad o peso específico se mantiene constante en toda su extensión. En este caso, dicho término puede factorizarse fuera de las integrales, lo que simplifica las fórmulas resultantes. Estas expresiones definen el centroide del cuerpo, ya que son independientes de su peso y dependen únicamente de su geometría.

Centro de gravedad de líneas

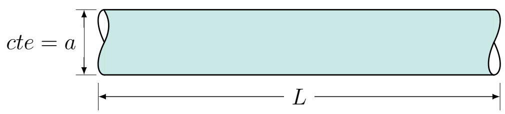


Figura 3.90: Alambre de sección contante.

El peso específico de un alambre se define como

$$\gamma = \frac{W}{V},$$

donde W es el peso y V es el volumen del cuerpo.

Despejando el peso de la relación anterior, tenemos:

$$W = \gamma V = \gamma a L,$$

con $V = aL$ el volumen del cuerpo. Tomando diferenciales, obtenemos

$$dw = \gamma dL$$

reemplazando esta relación en las ecuaciones (3.35), se tiene:

$$\bar{x} = \frac{\int x\gamma a dL}{\int \gamma a dL}, \quad \text{simplificando} \quad \bar{x} = \frac{\int x dL}{\int dL}. \tag{3.45}$$

Similarmente para las otras componentes, resultando:

$$\bar{y} = \frac{\int y dL}{\int dL} \tag{3.46}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z dL}{\int dL}. \tag{3.47}$$

Ejemplo 3.56. Halle el centro de gravedad de la línea OA (ver Figura 3.91), donde las coordenadas x, y están expresadas en centímetros.

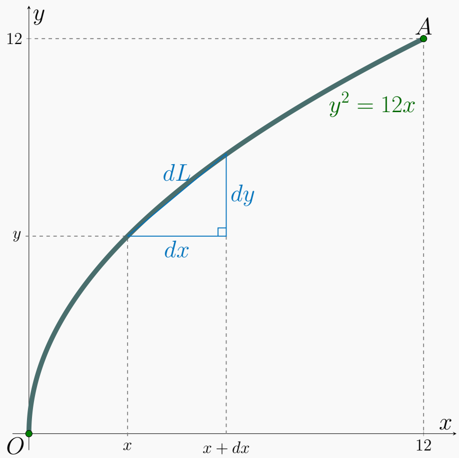


Figura 3.91

Solución. Las expresiones que permiten calcular el centro de gravedad están dada por las ecuaciones (3.45) y (3.46):

$$\bar{x} = \frac{\int x dL}{\int dL} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{\int y dL}{\int dL}.$$

(i) Primero vamos a determinar $\displaystyle\int dL$: Del gráfico tenemos que

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

entonces

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\ dy.$$

Como $y^2 = 12x$, tenemos

$$\begin{aligned}\int dL &= \int_0^{12} \sqrt{\frac{y^2}{36} + 1}\ dy = \frac{1}{6}\int_0^{12} \sqrt{y^2+36}\ dy \\ &= \frac{1}{6}\left[\frac{y}{2}\sqrt{y^2+36} + 18\ln\left|y + \sqrt{y^2+36}\right|\right]_0^{12} \\ &= 17.747 \text{ cm.} \end{aligned} \tag{3.48}$$

(ii) Determinando $\bar{x}$:

$$\int x dL = \frac{1}{6}\int_0^{12} \frac{y^2}{12}\sqrt{y^2+36}\ dy = \frac{1}{72}\int_0^{12} y^2\sqrt{y^2+36}dy.$$

Luego, integrando tenemos:

$$\begin{aligned}\int x dL &= \frac{1}{72}\left[\frac{y}{4}\sqrt{y^2+36} - \frac{36}{8}y\sqrt{y^2+36} - 162\ln\left|y+\sqrt{y^2+36}\right|\right]_0^{12} \\ &= 87.31 \text{ cm}^2 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Por lo tanto, dividiendo (3.48) entre (3.49), se tiene

$$\bar{x} = \frac{87.31 \text{ cm}^2}{17.75 \text{ cm}} = 4.92 \text{ cm}.$$

(iii) Encontrando $\bar{y}$:

$$\begin{aligned}\int y dL &= \frac{1}{6}\int_0^{12} y\sqrt{y^2+36}\ dy = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{3}\sqrt{(y^2+36)^3}\right]_0^{12} \\ &= 122.16 \text{ cm}^2. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Luego, dividiendo (3.50) entre (3.48), obtenemos:

$$\bar{y} = \frac{122.16 \text{ cm}^2}{17.747 \text{ cm}} = 6.88 \text{ cm}$$

Finalmente, las coordenadas del centro de gravedad está dado por:

$$c.g. = (\bar{x}, \bar{y}) = (4.92 \text{ cm}, 6.88 \text{ cm}).$$

Centro de gravedad de áreas

Para una placa de espesor constante (Figura 3.92), tenemos:

$$W = \gamma V = \gamma A t.$$

Tomando diferenciales

$$dW = \gamma t dA,$$

donde dA es el diferencial de área y t es el espesor constante de la placa.

Procediendo similarmente al caso de las líneas, tenemos que el centro de gravedad es:

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} \tag{3.51}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} \tag{3.52}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z dA}{\int dA}. \tag{3.53}$$

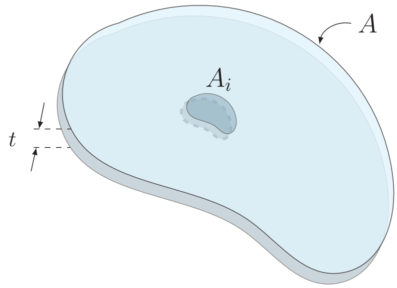


Figura 3.92: Placa con espesor constante.

Importante.

- El centro de gravedad toma en cuenta los materiales que componen en cuerpo y es el punto donde está aplicada la fuerza resultante equivalente que es el peso del cuerpo.
- El centroide es un centro geométrico, toma en cuenta la forma, más no los materiales que componen el cuerpo.
- Si el cuerpo es homogéneo (γ es constante), el centro de gravedad coincide con el centroide.

Ejemplo 3.57. Halle el centroide de la superficie rectangular dada en la Figura 3.93.

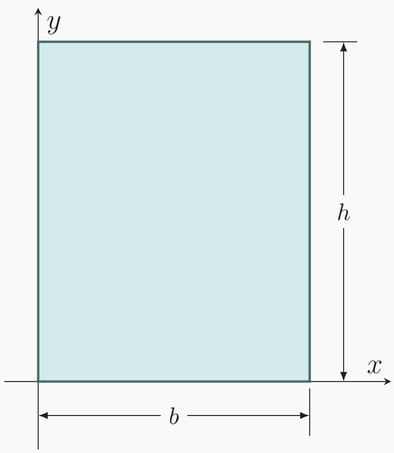


Figura 3.93

Solución. Tenemos que el elemento del diferencial de área dA del rectángulo de altura h y anchura dx es

$$dA = h\,dx.$$

Así, la componente $\bar{x}$ se calcula mediante:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA}$$

Luego, sustituyendo dA:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\int_0^b x\,h\,dx}{\int_0^b h dx}\\ &= \frac{h\int_0^b x\,dx}{b\,h}\\ &= \frac{h\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b}{b\,h}\\ &= \frac{\frac{b^2}{2}}{b} = \frac{b}{2}\end{aligned}$$

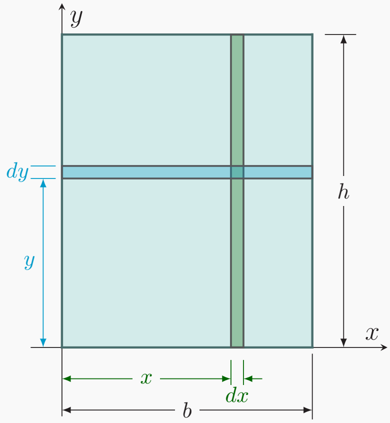


Figura 3.94

Para la componente $\bar{y}$, el diferencial de área es $dA = b\;dy$; así, se tiene:

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{\int dA} = \frac{\int_0^b ybdy}{\int_0^b bdy} = \frac{\frac{b\,h^2}{2}}{b\,h} = \frac{h}{2}$$

Por lo tanto, el centroide del rectángulo de base b y altura h se encuentra en el punto medio de sus dimensiones, es decir, en el punto:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right).$$

Ejemplo 3.58. Encuentre el centro de gravedad de enjuta semi-parabólica (ver Figura 3.95).

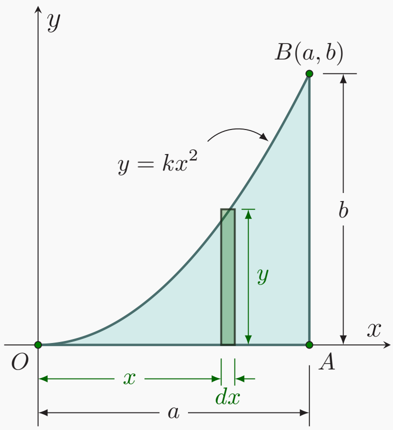


Figura 3.95

Solución. Primero, determinemos el valor de k. Según la Figura 3.95, tenemos:

$$b = ka^2 \implies k = \frac{b}{a^2}.$$

Por lo tanto, la ecuación de la curva superior es $y = \dfrac{b}{a^2}x^2$. Por consiguiente, ahora podemos determinar el área de la región:

$$A = \int dA = \int_0^a y\,dx = \int_0^a \frac{b}{a^2}x^2\,dx = \frac{b}{a^2}\int_0^a x^2\,dx = \frac{b}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{1}{3}ab.$$

Evaluando la integral, se obtiene el área de la región:

$$A = \frac{1}{3}ab. \tag{3.54}$$

Ahora, procedemos a calcular las coordenadas del centro de gravedad. Las cuales se determinan de la siguiente manera:

- Para $\bar{x}$:

$$\begin{aligned}\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} &= \frac{1}{A}\int_0^a xy\,dx = \frac{1}{\frac{1}{3}ab}\int_0^a x\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)dx \\ &= \frac{3}{ab}\cdot\frac{b}{a^2}\int_0^a x^3\,dx = \frac{3}{a^3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{3a}{4}.\end{aligned}$$

- Para $\bar{y}$:

$$\begin{aligned}\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} &= \frac{1}{A}\int_0^a \frac{y^2}{2}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{3}ab}\int_0^a \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)^2 dx \\ &= \frac{3}{ab}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^4}\int_0^a x^4\,dx = \frac{3b}{2a^5}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{3b}{10}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, las coordenadas del centro de gravedad son:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{3a}{4}, \frac{3b}{10}\right).$$

Ejemplo 3.59. Halle el centro de gravedad de la región mostrada en la Figura 3.96.

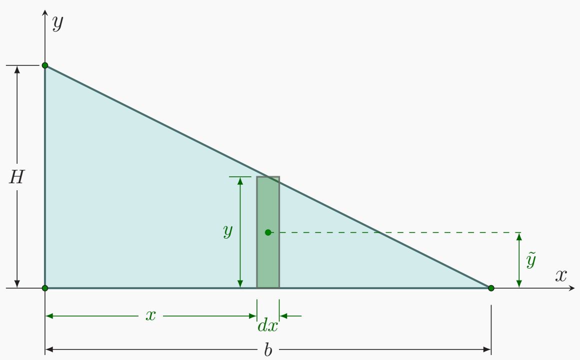


Figura 3.96

Solución. De la Figura 3.96, tenemos que:

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = \frac{y}{2} \quad \text{y} \quad dA = y dx.$$

(i) Cálculo del área de la región: Por semejanza de triángulos, se tiene

$$\frac{y}{H} = \frac{b-x}{b} \Longrightarrow y = \frac{H}{b}(b-x).$$

$$A = \int dA = \int_0^b y dx = \int_0^b \frac{H}{b}(b-x)dx = \frac{H}{b}\left[bx - \frac{x^2}{2}\right]_0^b = \frac{Hb^2}{2b} = \frac{bH}{2}.$$

(ii) Cálculo de la componente $\bar{x}$:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} = \frac{1}{\frac{Hb}{2}} \int_0^b xy\, dx \\ &= \frac{2}{Hb}\int_0^b x\left(\frac{H}{b}(b-x)\right) dx \\ &= \frac{2}{b^2}\left[\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^b = \frac{b}{3}.\end{aligned}$$

(iii) Cálculo de la componente $\bar{y}$:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{\int \tilde{y} dA}{\int dA} = \frac{1}{\frac{Hb}{2}}\int_0^b \left(\frac{y}{2}\right) y\, dx = \frac{1}{bH}\int_0^b y^2 dx \\ &= \frac{1}{bH}\int_0^b \frac{H^2}{b^2}(b-x)^2\, dx = \frac{H}{b^3}\left[b^2x - bx^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^b = \frac{H}{3}.\end{aligned}$$

Finalmente, el centro de gravedad de la región está dado por:

$$c.g. = (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{b}{3}, \frac{H}{3}\right).$$

Ejercicios propuestos 3.6.2.

1. Determine el centro de gravedad del sector circular dado en la Figura 3.97.

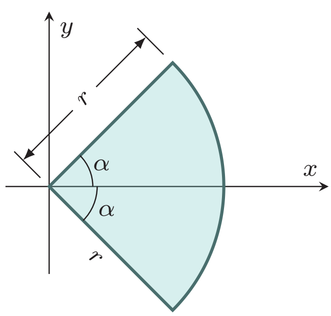


Figura 3.97

2. Calcule el centro de gravedad de la semiparábola que se muestra en la Figura 3.98.

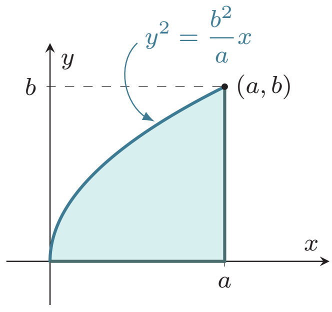


Figura 3.98

3. Halle el centro de gravedad del triángulo mostrado en la Figura 3.99.

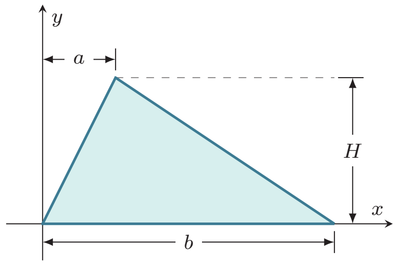


Figura 3.99

4. Halle el centro de gravedad de la superficie plana denominada un cuarto de elipse (ver Figura 3.100).

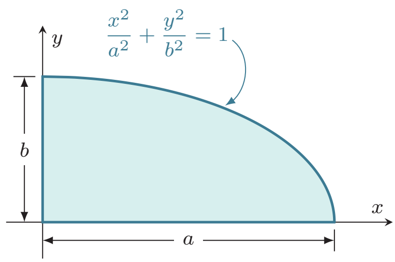


Figura 3.100

5. Determine el centro de gravedad de un cuarto de círculo (ver Figura 3.101).

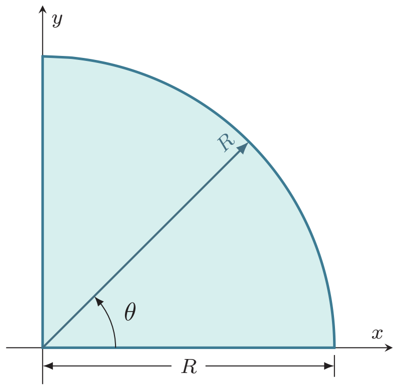


Figura 3.101

3.6.3. Momentos de inercia o segundos momentos

El momento de inercia de una área es una propiedad geométrica que se origina al calcular el momento de una carga distribuida, variable en forma lineal, respecto al eje de momentos. Un ejemplo típico de este tipo de carga se presenta cuando la presión de un líquido actúa sobre la superficie de una placa sumergida.

El centroide de un área se calcula utilizando el primer momento de área con respecto a un eje, es decir, para el cálculo tuvimos que evaluar una integral de la forma $\int x\,dA$.

Las integrales del segundo momento de un área, como $\int x^2\,dA$, se denominan momentos de inercia del área. Estas integrales no tienen un sentido físico directo, pero se llaman así porque tienen una formulación similar a la del momento de inercia de una masa, que es una propiedad dinámica de la materia.

Momentos de inercia de superficies planas

Los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados son:

$$I_x = \int y^2 dA \tag{3.55}$$

$$I_y = \int x^2 dA \tag{3.56}$$

$$J_0 = \int r^2 dA \tag{3.57}$$

Como $r^2 = x^2 + y^2$, tenemos que

$$\begin{aligned} J_0 &= \int (x^2 + y^2) dA \\ &= \int x^2 dA + \int y^2 dA \\ &= I_x + I_y \end{aligned} \tag{3.58}$$

donde J_0 es el momento polar de inercia.

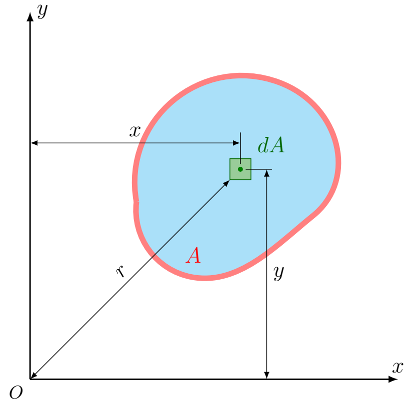


Figura 3.102

> **Importante.** Se puede notar que I_x, I_y y J_0 son siempre positivos, puesto que involucran el producto del cuadrado de la distancia y el área. Por lo tanto, sus unidades son longitud elevada a la cuarta potencia.

Teorema de ejes paralelos (Steiner)

De la Figura 3.103, tenemos que

$$dI_x = (y' + d_y)^2 dA.$$

Luego, integrando y desarrollando el binomio se tiene:

$$\begin{aligned} I_x = \int dI_x &= \int \left(y'^2 + 2y'd_y + d_y^2\right) dA \\ &= \int y'dA + 2d_y \int y'dA + d_y^2 \int dA \\ &= \int y'^2 dA + d_y^2 A. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$I_x = \bar{I}_{x'} = Ad_y^2. \tag{3.59}$$

Similarmente se obtienen:

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2. \tag{3.60}$$

$$J_0 = \bar{J}_{cg} + Ad^2. \tag{3.61}$$

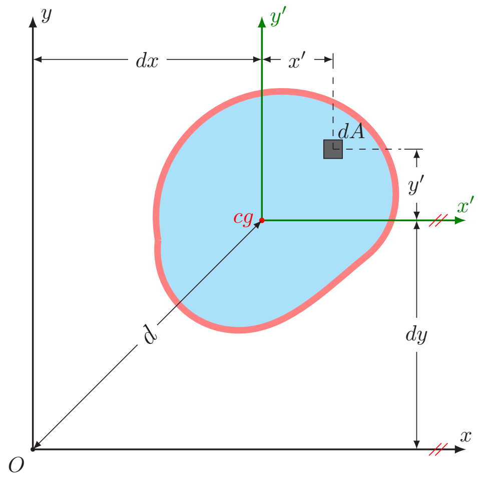


Figura 3.103

Ejemplo 3.60.

Calcule los momentos de inercia del rectángulo mostrado en la Figura 3.104 con respecto al ejes x y x_{cg} (cuando el eje pasa por el centroide).

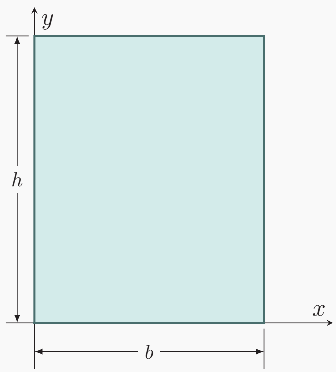


Figura 3.104

Solución.

- Cuando el eje pasa por su base (I_x):

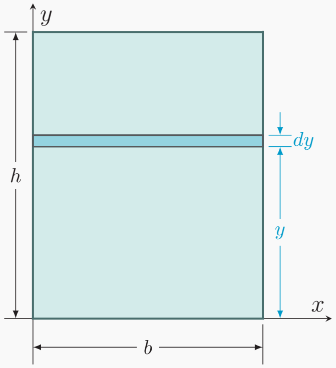


Figura 3.105

De la Figura 3.105, se tiene

$$dA = bdy.$$

Luego,

$$\begin{aligned} I_x &= \int y^2 dA \\ &= \int_0^h y^2 bdy = b\int_0^h y^2 dy \\ &= b\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h \\ &= \frac{bh^3}{3}. \end{aligned}$$

- Cuando el eje pasa por el centroide (I_{xcg}):

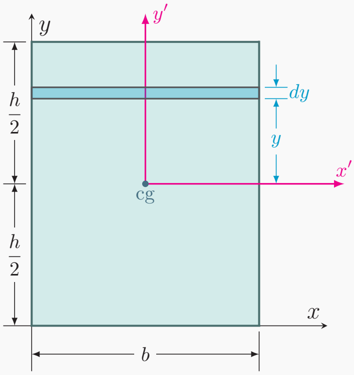


Figura 3.106

De la Figura 3.106 vemos que

$$dA = b\,dy$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned} I_{xcg} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 bdy = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy \\ &= b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{3}\left[y^3\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \\ &= \frac{b}{3}\left[\frac{h^3}{8} - \left(-\frac{h^3}{8}\right)\right] = \frac{b}{3}\left(\frac{2h^3}{8}\right) \\ &= \frac{bh^3}{12}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.61.

Halle los momentos de inercia I_x e I_y de la región mostrada en la Figura 3.107.

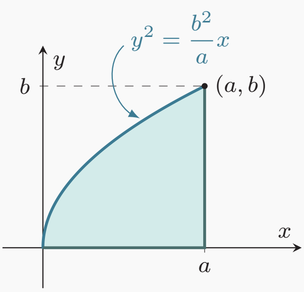


Figura 3.107

Solución.

(i) Cálculo de I_x:

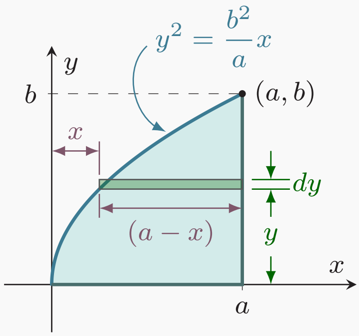


Figura 3.108

Observando la Figura 3.108, tenemos que

$$dA = (a - x)dy.$$

Además, como $y^2 = \frac{b^2}{a}x$, podemos despejar x:

$$x = \frac{ay^2}{b^2}.$$

Por lo que, el diferencial de área queda definido como

$$dA = \left(a - \frac{ay^2}{b^2}\right) dy.$$

En consecuencia, el momento de inercia respecto del eje x está dado por:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^b y^2 dA = \int_0^b y^2 \left(a - \frac{ay^2}{b^2}\right) dy \\ &= \int_0^b \left(ay^2 - \frac{a}{b^2}y^4\right) dy \\ &= \left[\frac{ay^3}{3} - \frac{a}{b^2}\frac{y^5}{5}\right]_0^b = \frac{2}{15}ab^3. \end{aligned}$$

(ii) Cálculo de I_y:

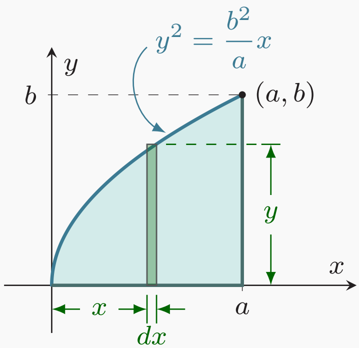


Figura 3.109

Para este caso, según la Figura 3.109, el diferencial de área queda determinado por:

$$dA = ydx.$$

Asimismo, puesto que $y^2 = \frac{b^2}{a}x$, tenemos que

$$y = \frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{x}.$$

Por lo tanto,

$$I_y = \int x^2 dA = \int_0^a x^2 \left(\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{x}\right) dx.$$

Finalmente, integrando y evaluando se obtiene

$$I_y = \frac{2}{7}a^3b.$$

Ejercicios propuestos 3.6.3.

1. Para la figura mostrada, calcule el momento de inercia respecto al eje y (I_y), y respecto al eje x (I_x).

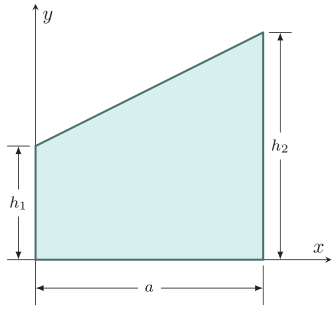


Figura 3.110

2. Halle los momentos de inercia I_x e I_y de la región mostrada en la Figura 3.111.

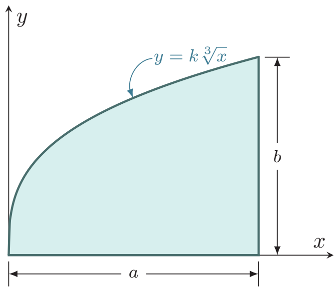


Figura 3.111

3. Halle los momentos de inercia I_x e I_y de la región mostrada en la Figura 3.112.

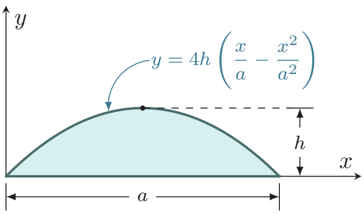


Figura 3.112

4. Halle los momentos de inercia I_x e I_y de la región mostrada en la Figura 3.113.

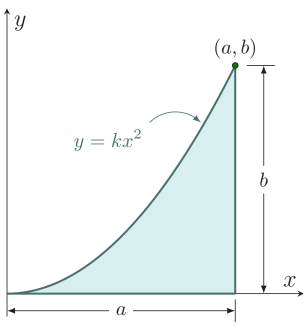


Figura 3.113

3.6.4. Fuerza hidrostática sobre una superficie plana

Cuando una superficie está sumergida en un fluido, debido a este se crean fuerzas en la superficie. Para fluidos en reposo, se sabe que no hay esfuerzos cortantes presentes. También se sabe que si el fluido es incompresible, la presión varía linealmente con la profundidad.

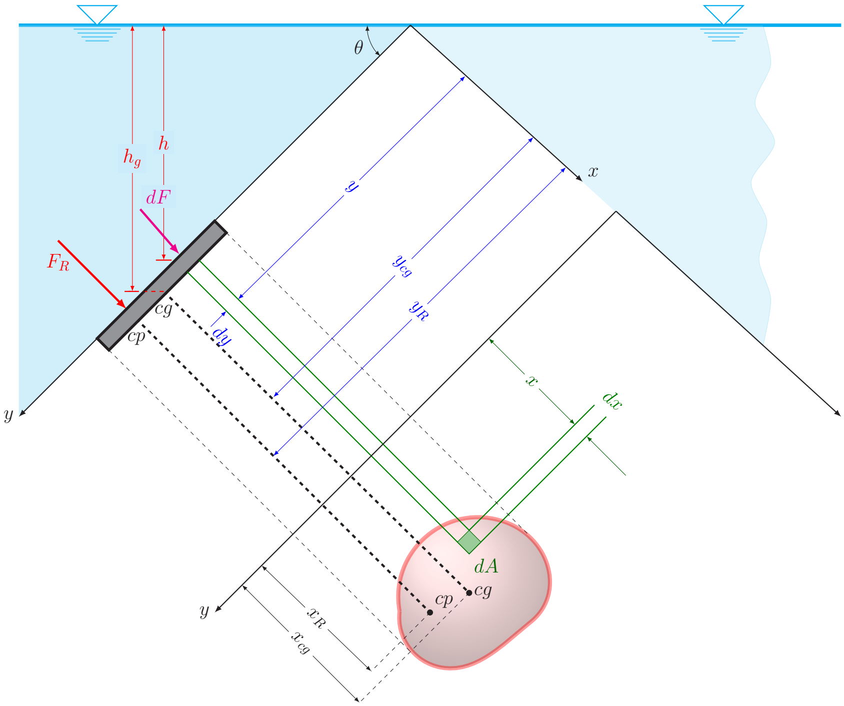


Figura 3.114

En la Figura 3.114, se desea determinar la dirección, ubicación y magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre uno de los lados de esta área debido al líquido en contacto con el área.

$$P = \frac{dF}{dA} \Longrightarrow dF = PdA \tag{3.62}$$

Pero se sabe que:

$$P = \gamma h \tag{3.63}$$

Luego, sustituyendo (3.63) en (3.62): $dF = \gamma h dA$, e integrando se tiene:

$$\int_0^{F_R} dF = \int_A \gamma h dA, \quad F_R = \int_A \gamma h dA. \tag{3.64}$$

Del gráfico: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{h}{y}$, entonces

$$h = y \operatorname{sen}\theta \tag{3.65}$$

Así, reemplazando (3.65) en (3.64) se tiene:

$$F_R = \gamma \operatorname{sen}\theta \int_A y dA \tag{3.66}$$

Pero la integral de la ecuación (3.66) es el primer momento del área con respecto al eje x; es decir,

$$\int_A y dA = y_{cg} A. \tag{3.67}$$

Sustituyendo (3.67) en (3.66):

$$F_R = \gamma \operatorname{sen}(\theta) y_{\text{cg}} A. \tag{3.68}$$

Además, del gráfico tenemos que

$$h_{\text{cg}} = y_{\text{cg}} \operatorname{sen} \theta. \tag{3.69}$$

Por lo que, al reemplazar (3.69) en (3.68) se obtiene:

$$F_R = \gamma h_{\text{cg}} A. \tag{3.70}$$

donde h_{cg} es la distancia vertical de la superficie del fluido al centroide del área.

Importante. La ecuación (3.70) que es el valor de la fuerza resultante, es independiente del valor del ángulo θ.

Cálculo de la ubicación de la fuerza resultante

Aplicando el momento de la fuerza resultante que debe ser igual al momento de la fuerza de presión distribuida:

$$F_R y_R = \int_A y dF,$$

$$\begin{aligned} F_R y_R &= \int_A y\gamma h \, dA = \int_A y\gamma y \operatorname{sen} \theta dA \\ &= \int_A \gamma y^2 \operatorname{sen} \theta dA = \gamma \operatorname{sen} \theta \int_A y^2 dA \end{aligned} \tag{3.71}$$

Reemplazando (3.68) en (3.71):

$$\gamma \operatorname{sen}(\theta) y_{\text{cg}} A = \gamma \operatorname{sen}(\theta) \int_A y^2 dA,$$

entonces

$$y_{\text{cg}} A = \int_A y^2 dA. \tag{3.72}$$

Además, como $y_R = \dfrac{\int y^2 dA}{y_{\text{cg}\,A}}$, tenemos

$$y_R = \frac{I_x}{y_{\text{cg}} A}. \tag{3.73}$$

Por lo que, aplicando el teorema de Steiner, resulta

$$y_R = \frac{I_x}{y_{\text{cg}} A} = \frac{I_{x\,\text{cg}} + A y_{\text{cg}}^2}{y_{\text{cg}} A} = \frac{I_{x\,\text{cg}}}{y_{\text{cg}} A} + y_{\text{cg}}.$$

Finalmente,

$$y_R = y_{\text{cg}} + \frac{I_{x\,\text{cg}}}{y_{\text{cg}} A}, \tag{3.74}$$

donde $I_{x\,\text{cg}}$ es el momento de inercia con respecto al eje que pasa por su centroide.

La ecuación (3.74) muestra claramente que la fuerza resultante no pasa por el centroide, sino que siempre se encuentra abajo de este, ya que

$$\frac{I_{x\,\mathrm{cg}}}{y_{\mathrm{cg}}A} > 0.$$

La abscisa x_R de la fuerza resultante, se determina de manera similar que la anterior; esto es,

$$\begin{aligned} F_R x_R &= \int_A x dF = \int_A x\gamma h dA \\ &= \int_A x\gamma y \operatorname{sen}\theta dA \\ &= \gamma \operatorname{sen}\theta \int_A xydA. \end{aligned}$$

Además, como $F_R = \gamma \operatorname{sen}(\theta) y_{\mathrm{cg}} A$, tenemos

$$y_{\mathrm{cg}\,Ax_R} = \int_A xydA.$$

En consecuencia,

$$x_R = \frac{\int_A xydA}{y_{cg}A}. \tag{3.75}$$

La integral que aparece en la relación (3.75), es conocida como el producto de inercia:

$$I_{xy} = \int_A xydA,$$

luego, al usar el teorema de Steiner, se tiene

$$I_{xy} = I_{xy\,\mathrm{cg}} + Ax_{\mathrm{cg}}y_{\mathrm{cg}}. \tag{3.76}$$

Sustituyendo (3.76) en (3.75):

$$x_R = \frac{I_{xy}}{y_{\mathrm{cg}}A} = \frac{I_{xy\,\mathrm{cg}} + Ax_{\mathrm{cg}}y_{\mathrm{cg}}}{y_{\mathrm{cg}}A} = x_{\mathrm{cg}} + \frac{I_{xy\,\mathrm{cg}}}{y_{\mathrm{cg}}A}.$$

Finalmente, la abscisa de la fuerza resultante es

$$x_R = x_{\mathrm{cg}} + \frac{I_{xy\,\mathrm{cg}}}{y_{\mathrm{cg}}A}. \tag{3.77}$$

Importante.

- Si el área sumergida es simétrica con respecto a un eje que pasa por el centroide y es paralelo a cualquiera de los ejes x o y, la resultante debe estar a lo largo de la recta $x = x_{\mathrm{cg}}$, ya que en este caso $I_{xy\,\mathrm{cg}} = 0$.
- El punto a través del que actúa la fuerza resultante se denomina centro de presión (c. p.). En las ecuaciones (3.74) y (3.77) se puede observar que cuando y_{cg} crece, el centro de presión se desplaza hacia el centroide del área.

Ejemplo 3.62. En Figura 3.115, determine las fuerzas en A y en B debido a la presión hidrostática de la compuerta (6×6).

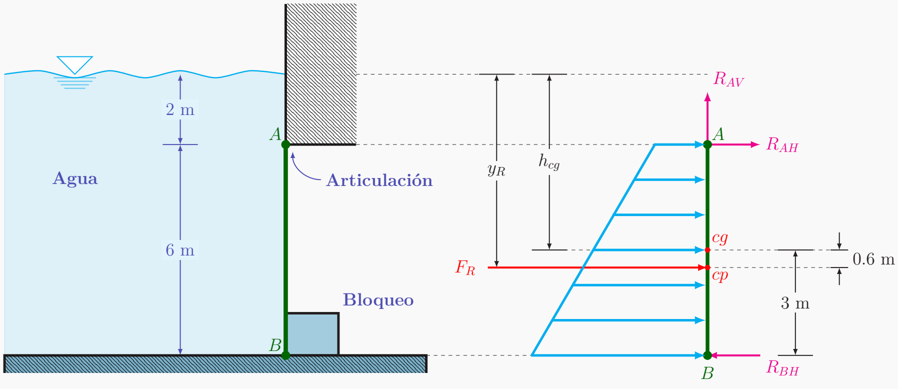


Figura 3.115

Solución.

(i) Cálculo de la fuerza de presión:

$$F_R = \gamma_{H_2O} h_{cg} A,$$

donde $A = 6 \times 6 = 36 \text{ m}^2$, $h_{cg} = 5$ m y $\gamma_{H_2O} = 9.81 \dfrac{\text{KN}}{\text{m}^3}$.
Entonces

$$F_R = (9.81)(5)(36) = 1766 \text{ KN}.$$

(ii) Localización de la fuerza de presión resultante:

$$y_R = y_{cg} + \frac{I_{xcg}}{y_{cg} A},$$

donde $y_{cg} = h_{cg} = 5$ m e $I_{xcg} = \dfrac{bh^3}{12} = \dfrac{6(6)^3}{12} = 108 \text{ m}^4$.
Por lo tanto,

$$y_R = 5 + \frac{108}{5(36)} = 5.6 \text{ m}.$$

(iii) Cálculo de las reacciones: Como $y_R - h_{cg} = 0.6$ m entonces $\overline{Acp} = 3.6$ m.
Luego, como está en equilibrio, tenemos que:

- $\sum M_A = 0$:

$$-R_{BH}(6) + 3.6(F_R) = 0 \Longrightarrow R_{BH} = 1060 \text{ KN}.$$

- $\sum F_x = 0$:

$$R_{AH} + F_R - R_B H = 0 \Longrightarrow R_{AH} = 1060 - 1766 = -706 \text{ KN}.$$

Por ser negativa, va en sentido contrario al supuesto.

- Como no hay fuerzas verticales:

$$R_{AV} = 0.$$

Ejemplo 3.63. Una superficie en forma de triángulo rectángulo vertical, tiene un vértice en la superficie libre de un líquido, como se muestra en la Figura 3.116. Determine la fuerza en uno de los lados.

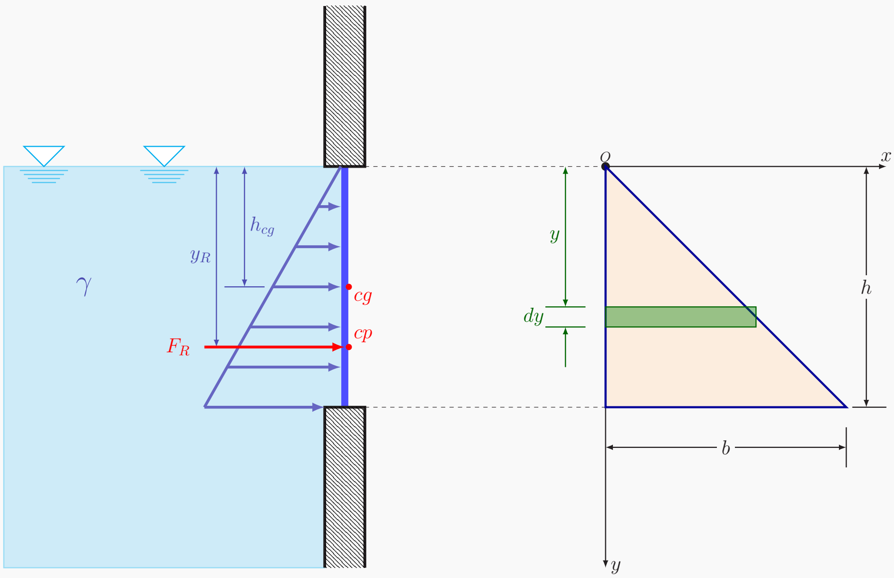


Figura 3.116

Solución. Tenemos que $P = \dfrac{dF}{dA}$, entonces

$$dF = PdA = \gamma y dA. \tag{3.78}$$

Además, de la Figura 3.116 el diferencial de área es

$$dA = xdy. \tag{3.79}$$

Luego, por semejanza de triángulo, se tiene:

$$\frac{y}{h} = \frac{x}{b} \quad \text{entonces} \quad x = b\frac{y}{h}. \tag{3.80}$$

Entonces, reemplazando (3.79) y (3.80) en (3.78), obtenemos:

$$dF = \gamma y \left(\frac{by}{h} dy\right) = \frac{\gamma b}{h} y^2.$$

Integrando, encontramos la fuerza en uno de sus lados:

$$F = \frac{\gamma b}{h} \int_0^h y^2 dy = \frac{\gamma b}{h} \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}\gamma b h^2.$$

Ejercicios propuestos 3.6.4.

1. Una compuerta cuadrada de dimensión b separa dos fluidos de densidades ρ_1 y ρ_2, como se muestra en la Figura 3.117. La compuerta está montada en una articulación sin fricción. Conforme aumenta la profundidad del fluido de la derecha, la compuerta se abrirá. Determine la proporción ρ_2/ρ_1 justo para que se la compuerta se abra en términos de H_2, H_1 y b.

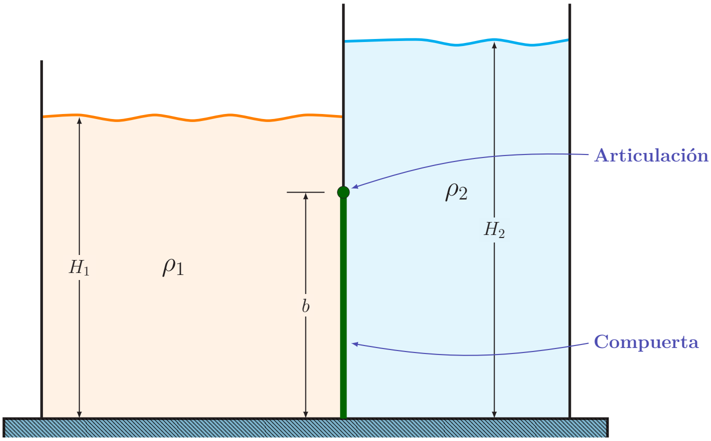


Figura 3.117

2. Una ventana rectangular con b de ancho, se coloca en la pared inclinada de una alberca, como se muestra en la Figura 3.118. Determine la fuerza resultante que actúa sobre la compuerta y su punto de aplicación.

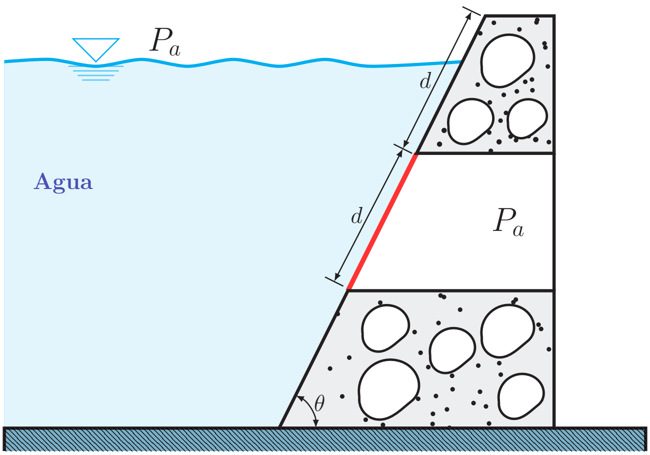


Figura 3.118

Bibliografía

[1] Adams, Robert. (2009). *Cálculo*. Sexta edición. PEARSON EDUCACIÓN, S.A. Madrid, España.

[2] Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2010). *Introducción al análisis matemático de una variable* (3a ed.). Limusa Wiley.

[3] Beer, F. P., Johnston, E. R., & Cornwell, P. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica*. McGraw-Hill.

[4] Beer, F. P., Johnston, E. R., & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática* (10ª ed.). McGraw-Hill.

[5] Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2005). *Cálculo* (3ª reimp.). Compañía Editorial Continental.

[6] Fox, R. W., & McDonald, A. T. (1995). *Introducción a la mecánica de fluidos* (4ª ed.). McGraw-Hill.

[7] Gamio Arisnabarreta, L. E. (2015). *Estática: Teoría y aplicaciones* (1ª ed.). Editorial MACRO.

[8] Hibbeler, R. C. (2004). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática* (10ª ed.). Pearson.

[9] Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., & McCallum, W. G. (2012). *Calculus: Single and multivariable*. Wiley.

[10] Kong, M. (2004). *Cálculo integral*. Fondo Editorial PUCP.

[11] Larson, R. E. (2016). *Cálculo*. Tomo I (10a. ed.). Cengage Learning.

[12] Leithold, L. (1998). *El cálculo*. México DF: Oxford University Press.

[13] Mitacc, M., Cárdenas, V., Roncal, I., & Villanueva, F. (2018). *Cálculo II*. Universidad de Lima, Fondo Editorial.

[14] Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2007). *Cálculo diferencial e integral*. Pearson Educación.

[15] Rogawski, J. (2016). *Cálculo de una variable* (2.ª ed.). Editorial Reverté.

[16] Saenz, J. (2016). *Cálculo integral: Con Funciones Trascendentes Tempranas.*

[17] Smits, A. J. (2019). *A physical introduction to fluid mechanics* (2ª ed.).

[18] Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas* (7a. ed.). Cengage Learning.

[19] Swokowski, E. W. (1991). *Calculus: The Classic Edition.* Brooks/Cole Thomson Learning.

[20] Tan, S. T. (2010). *Calculus: Early transcendentals.* Cengage Learning.

[21] Thomas, G. B., Jr. (2010). *Cálculo de una variable* (12.ª ed.). Pearson Educación.

[22] Torres H, J. (1973). *Mecánica aplicada: Estática y resistencia de materiales.* Representaciones y Servicios de Ingeniería.

[23] Venero Baldeón, J. A. (2019). *Análisis matemático 2* (2a. Edición). Lima, Perú. Representaciones GEMAR.

[24] Zill, D., & Wright, W. S. (2011). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas (4.ª ed.). Cengage Learning.

JORGE EMILIANO CONDEÑA CAHUANA

Matemático e Informático graduado de la Universidad Nacional San Luis Gonzaga de Ica. Con grado de Magíster en Matemática por la Pontificia Universidad Católica del Perú. Docente Auxiliar en el Departamento Académico de Matemática de la Facultad de Ciencias de la UNALM, donde imparte los cursos de Análisis Matemático I, III y IV. Su experiencia docente incluye la enseñanza de Cálculo Integral, Métodos Numéricos I, Cálculo Avanzado para Estadística y Ecuaciones Diferenciales.

CARMEN ROSA MONZÓN MONZÓN

Ciencias Matemáticas de profesión, graduada de la Universidad Nacional San Luis Gonzaga de Ica. Obtuvo su grado de Magíster en Matemática en la Pontificia Universidad Católica del Perú. Se desempeña como docente en el Departamento Académico de Matemática de la UNALM, donde imparte los cursos de Análisis Matemático I, Análisis Matemático II y Cálculo Avanzado I.

MARIA DEL PILAR SALAZAR DÁVILA

Licenciada en Matemáticas y Educación con especialidad en Matemática y Computación. Magíster en Educación con mención en Docencia y Gestión Educativa, egresada de la maestría en Matemática Aplicada de la Universidad Mayor de San Marcos. Coordinadora del curso Razonamiento Matemático en el CEPRE - UNALM. Profesora Auxiliar del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias - UNALM. Ha impartido los cursos de Matemática Básica, Cálculo Diferencial e Integral, entre otros.

VÍCTOR TREJO CADILLO

Ingeniero Agrícola y Profesor Principal del Departamento Académico de Matemática de la Facultad de Ciencias de la UNALM. Obtuvo el grado de Mestre em Engenharia Civil en el área de concentración de Ingeniería hidráulica, por la Escuela Politécnica de la Universidad de Sao Paulo, Brasil. Ha sido Jefe de la Oficina Académica de Estudios, jefe del Dpto. Académico de Matemática y Coordinador en el CEPRE-UNALM. Ha impartido los cursos de Matemática I y II, Cálculo Diferencial y Cálculo Integral, entre otros.

Cálculo Integral y sus Aplicaciones es un libro de texto integral dirigido a estudiantes universitarios de ciencias e ingeniería. Este libro proporciona una base sólida para comprender y dominar el cálculo integral, abarcando desde conceptos fundamentales hasta aplicaciones avanzadas.

Diseñado para guiar a los estudiantes de la Universidad Nacional Agraria La Molina, este libro tiene una presentación clara y progresiva de los temas, facilitando el avance hacia cursos superiores de matemáticas.

Fondo Editorial
Universidad Nacional Agraria La Molina